

Algebra

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner:

a. $\frac{5}{24} + \frac{7}{32} + \frac{3}{40}$

b. $\frac{2}{15} + \frac{5}{30} + \frac{3}{75}$

c. $\frac{1}{14} + \frac{3}{18} + \frac{3}{28}$

2. Lösen Sie die Klammern auf und fassen Sie zusammen.

Welche Klammern sind unnötig?

a. $(3a - 4b) - (5a - 2b)$

b. $8a - [(14a - 8b + 2c) - (8a - 12b + 2c)]$

c. $24a - [(13a - 6b + 4c) - (9a + 12b - 3c)]$

d. $3a - \{2a - (12a - 4x) - [2x - (3x + 3a) - 19a]\}$

e. $(4x + 6y) - \{6x - [7y - (5x + 3y) - (6y - 8x) - 3x] - 3x\}$

3. Bringen Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen:

a. $\frac{2a - b}{3} - \frac{5a - 4b}{3} + \frac{18a - 27b}{9}$

b. $\frac{a - b}{2} + \frac{3a + 5b}{15} - \frac{2a - 7b}{20} + \frac{5b + 6a}{20}$

c. $\frac{4u - 5v + 8}{18} - \frac{7u + 3v - 5}{30} + \frac{2u - 5v - 3}{45}$

d. $\frac{x + 5y - 7z}{15} + \frac{3x + 5y - 7z}{20} - \frac{2x - y + 5z}{30}$

4. Berechne Sie:

a. $(4x + 3)(5x + 8)$

b. $(5a + 7)(8a + 3)$

c. $(3x + 6)(8x - 10)$

d. $(-2x + 6)(-3x + 4)$

e. $(-3a + 2b)(2a + 3b)$

f. $(2a - 3)(3a + 4)$

g. $(3x - y)(-2y + 3)$

h. $(4u - 5v)(7u - 3v)$

i. $(-7s - 3t)(2s - 6t)$

5. Berechnen Sie:

- a. $(a + b)^2$
- b. $(a - b)^2$
- c. $(a + b)(a - b)$
- d. $(2a + 3b)^2$
- e. $(3a - b)^2$
- f. $(2a + b)(2a - b)$
- g. $(-x + y)^2$
- h. $(-2x - 3y)^2$
- i. $(2a + 3b)(3b - 2a)$
- j. $(-5y + 8x)^2$
- k. $(-3a - 5b)^2$
- l. $(8x - 3y)(3y + 8x)$

6. Berechnen Sie:

- a. $(x + 3)^2 - (x - 1)^2$
- b. $(5x - 3y)^2 - (2x + y)^2$
- c. $(13a - 11b)^2 - (17a - 21b)^2$
- d. $(9a - 7b)^2 - (2a + 3b)(-3b + 2a)$

7. Schreiben Sie - wenn möglich - als vollständige binomische Formel:

- a. $x^2 + 10x + 25 = (\quad)^2$
- b. $4x^2 + 4xy + y^2 = (\quad)^2$
- c. $4u^2 - 10uv + 9v^2 = (\quad)^2$
- d. $16u^2 + 8u + 1 = (\quad)^2$
- e. $25y^2 - 80xy + 64x^2 = (\quad)^2$

8. Ergänzen Sie zu einer vollständigen binomischen Formel:

- a. $x^2 + 2x + \dots = (\quad)^2$
- b. $x^2 - 6x + \dots = (\quad)^2$
- c. $x^2 + x + \dots = (\quad)^2$
- d. $u^2 - 5u + \dots = (\quad)^2$
- e. $x^2 - 2xy + \dots = (\quad)^2$
- f. $x^2 - 9xy + \dots = (\quad)^2$
- g. $4x^2 + 8x + \dots = (\quad)^2$
- h. $9a^2 - 12ab + \dots = (\quad)^2$

Faktorisieren, Ausklammern

1. Schreiben Sie als Produkt von Faktoren:

a. $x^2 - 4y^2$

b. $9u^2 - 25v^2$

c. $(a + b)x + (a + b)y$

d. $(u + v)x - (u + v)y$

e. $ax + ay + bx + by$

f. $ab + 5a + 5b + b^2$

g. $x^2 - ax + 2x - 2a$

h. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay$

i. $6a^2 - 15a + 2ab - 5b$

2. Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzen Sie:

a. $\frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

b. $\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x}$

c. $\frac{x^2 - 1}{ax - a}$

d. $\frac{ab + b}{ac + a}$

e. $\frac{a^2 - 9}{a^2 - 6a + 9}$

f. $\frac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2}$

3. Bringen Sie auf den Hauptnenner und fassen Sie zusammen:

a. $\frac{1}{a + b} - \frac{1}{a - b}$

b. $\frac{x + y}{x} - \frac{x}{x + y}$

c. $\frac{3}{a + b} + \frac{6b}{a^2 - b^2} + \frac{2}{a - b}$

d. $\frac{a + 2}{a - 2} + \frac{a - 2}{a + 2} - \frac{a^2 + 4}{a^2 - 4}$

e. $\frac{u - v}{u + v} - \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 - v^2} + \frac{u^2 - v^2}{u^2 + 2uv + v^2}$

4. Zerlegen Sie Zähler und Nenner in Linearfaktoren und kürzen Sie:

a. $\frac{3x}{x+y} : \frac{14x}{7x+7y}$

b. $\frac{4(x^2 - y^2)}{5(a^2 - b^2)} : \frac{2x + 2y}{5a - 5b}$

c. $\frac{9x^2 + 6x + 1}{2x + 1} : \frac{3x + 1}{4x^2 - 1}$

d. $\frac{a^2 - 4b^2}{a^2 + 4ab + 4b^2} : \frac{a - 2b}{a + 2b}$

e. $\frac{6xy - 6y^2}{5(x + y)^2} : \frac{9x^2 - 9xy}{3x + 3y}$

f. $\frac{12x^2y - 6xy}{2a - 3} : \frac{10x^2 - 5x}{2ab - 3b}$

5. Berechnen Sie:

a. $(\sqrt{a^2 + x^2} + x)(\sqrt{a^2 + x^2} - x)$

b. $(\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})(\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x})$

6. Lösen Sie nach x auf und bestimmen Sie, für welche y Lösungen existieren:

a. $\frac{1}{3}x + 1 = 4 - \frac{1}{2}y$

b. $x - 1 = \frac{1}{y} + 2$

c. $\frac{2}{x} = \frac{3}{y} + \frac{1}{4}$

d. $\frac{5}{x} - \frac{3}{y} = 7$

e. $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3y} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{5y} + 2$

f. $\frac{2}{3x} - \frac{3}{4y} = \frac{3}{2x} + \frac{4}{3y} - \frac{4}{3}$

7. Vereinfachen Sie:

$$\frac{1-x^2}{x^{n+3}} + \frac{1+x^3-x^{n-1}}{x^{2n+2}} - \frac{1-x^{n-2}}{x^{2n-1}}$$

8. Klammern Sie geeignete Faktoren aus:

a. $2a^2 - 4ab$

b. $a^2b + ab^2$

c. $8a^2b^3 + 24ab^2$

d. $x^7y^3 - 2x^5y^5$

e. $a^{n+1}b^3 + a^nb^4$

f. $a^{n+1}b^2 - a^{n-1}b^4$

Potenzgesetze mit gebrochenen Hochzahlen

1. Schreiben Sie als Potenz mit gebrochener Hochzahl:

a. $\sqrt[3]{x}$

b. $\sqrt[4]{y}$

c. $\sqrt[7]{a+b}$

d. $\sqrt[5]{a^6}$

e. $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$

f. $\frac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$

2. Vereinfachen Sie:

a. $\sqrt[4]{a^8}$

b. $\sqrt[16]{a^{8n}}$

c. $(\sqrt[9]{a^2})^3$

d. $\sqrt{\sqrt{a}}$

e. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}}$

f. $(\sqrt[5]{(\sqrt[4]{a^{20}})})^2$

g. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}$

h. $(a^{\frac{3}{4}})^{12}$

i. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

3. Klammern Sie geeignete Faktoren aus:

a. $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^3 + a^2 \cdot b^{\frac{5}{2}}$

b. $x^{\frac{4}{3}} \cdot y^2 - 2x^2 \cdot y^{\frac{5}{3}}$

c. $a^{\frac{2}{n}} \cdot b + a^{\frac{4}{n}} \cdot b^{\frac{n+2}{n}}$

4. Vereinfachen Sie:

$$a. \frac{2\sqrt{a} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y^{-1}} : \frac{6 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{15 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}$$

$$b. \frac{20 \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^2}{12 \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} : \frac{5 \cdot x^2 \cdot y^{-\frac{2}{7}}}{3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot b^{\frac{2}{3}}}$$

$$c. \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} + \frac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{a^5}} + \left(\frac{1}{a}\right)^{-1}$$

$$d. \frac{a^{-\frac{m}{n}} \left(a^2 \cdot \sqrt[n]{a^{m-2n}}\right)^{\frac{1}{m}}}{\sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{m-1}}}}$$

$$e. \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} - \frac{a + b - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}}$$

$$f. \sqrt{\left(\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right)}$$

$$g. \left[\sqrt[5]{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2} \cdot \left(\sqrt[9]{\frac{(a-b)^3}{(a+b)^2}} : \sqrt[15]{\frac{(a+b)^4}{(a-b)^2}} \right) \right] : \sqrt[45]{\frac{(a-b)^8}{(a+b)^4}}$$

$$h. \sqrt[3]{3a^2b^2c^4 - 4a^4b^2c^2 + 5a^2b^4c^2} : \sqrt[3]{\frac{3c}{ab} - \frac{4a}{bc} + \frac{5b}{ac}}$$

Geraden, Parabeln, Beträge, Ungleichungen, Nullstellen von Funktionen

- Die Gerade g gehe durch die Punkte A und B . Die Gerade h gehe durch den Punkt C und sei parallel zu g . Die Gerade k gehe durch C und stehe senkrecht zu g . Berechnen Sie die Gleichungen der Geraden g , h und k . Bestimmen Sie den Abstand d_{AB} der Punkte A und B . Bestimmen Sie auch die Steigung m_{AB} der Geraden g und den Mittelpunkt M_{AB} der Strecke \overline{AB} .
 - $A(-2/0), B(4/3), C(1/4)$
 - $A(-2/1), B(2/ - 1), C(2/4)$
 - $A(-1/4), B(4/ - 1), C(3/2)$
 - $A(-\sqrt{2}/\sqrt{3}), B(2 - \sqrt{5}/\sqrt{2}), C(\frac{1}{3}/\frac{4}{5})$
- Ermitteln Sie durch Zeichnung und Rechnung:
 - Für welche x wird $y_1 > y_2$ mit $y_1 = \frac{1}{2}x + 2$ und $y_2 = -x + 5$?
 - Für welche x wird $y_1 > y_2$ mit $y_1 = -\frac{1}{2}x + 2$ und $y_2 = \frac{3}{4}x - 3$?
- Schreiben Sie ohne Betragstriche und zeichnen Sie:
 - $y = |2x - 3|$
 - $y = |-3x + 5| - 4$
 - $y = |-x - 3| - |2x + 3| - 4$
- Berechnen Sie die Lösungsmenge:
 - $|x| + 3x = 8$
 - $|2x - 1| + 1 = |6 - x|$
 - $|x + 2| - 3 = 2 \cdot |4 - x|$
- Bestimmen Sie die Definitionsmenge und berechnen Sie die Lösungsmenge:
 - $4x - 3 < 3(x + 1)$
 - $x^2 - 15 < (x + 5)^2$
 - $2(x^2 - 16) > 2x^2 + 14x - 4$
 - $\frac{2x-2}{2x+2} \leq 2$
 - $\frac{8}{2x-4} + \frac{24}{2x+4} = \frac{\frac{9}{2}}{(x-2)(x+2)}$
 - $\frac{3x}{x+1} + \frac{5}{x} = 3$
 - $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{12}{x^2-4}$
 - $\frac{b(a-2x)}{ax} + \frac{a}{b} = \frac{a(a-x)}{bx}$

6. Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitels S der Parabel $p(x)$:
- $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$
 - $p(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{5}{4}$
 - $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
7. Bestimmen Sie $b \in \mathbb{R}$ so, dass die Parabel $p(x) = x^2 + bx + 3$ den Scheitel
- $S(0/y_s)$,
 - $S(-1/y_s)$,
 - $S(\frac{4}{3}/y_s)$ besitzt.
8. Eine Parabel $p(x)$ besitze den Scheitel S und gehe durch den Punkt P . Bestimmen Sie ihre Gleichung:
- $S(2/-2), P(6/6)$
 - $S(3/2), P(4/\frac{5}{2})$
 - $S(-1/2), P(1/1)$
9. Bestimmen Sie den Scheitel S und die Nullstellen folgender Parabeln und skizzieren Sie sie:
- $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$
 - $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
10. Ermitteln Sie die Lösungen durch quadratische Ergänzung:
- $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$
 - $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$
 - $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$
11. Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen mit der Mitternachtsformel oder vielleicht sogar einfacher:
- $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$
 - $-\frac{2}{7}x^2 + 3 = 0$
 - $4x^2 - 2x = 0$
12. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion $p_a(x) = ax^2 - 4x + 2$ keine bzw. eine bzw. zwei Nullstellen besitzt.
13. Zerlegen Sie die quadratische Funktion in Linearfaktoren:
- $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$
 - $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$
 - $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

14. Geben Sie eine quadratische Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt:

a. $L = \{5; 7\}$

b. $L = \{-3; \frac{2}{3}\}$

c. $L = \{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$

15. Berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabel $p(x)$ und der Geraden $g(x)$:

a. $p(x) = x^2 + 2x$

$$g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$$

b. $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

$$g(x) = -x + \frac{7}{2}$$

c. $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

$$g(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

16. Wie ist $m \in \mathbb{R}$ bzw. $b \in \mathbb{R}$ zu wählen, damit die Gerade $g(x)$ die Parabel $p(x)$ berührt?

a. $p(x) = x^2 + 3x$

$$g_b(x) = -x + b$$

b. $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$

$$g_m(x) = mx$$

17. Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Parabeln:

a. $p_1(x) = x^2 + 2x - 3$

$$p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$$

b. $p_1(x) = x^2 + 2x - 2$

$$p_2(x) = x^2 - x + 4$$

18. Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender quadratischer Ungleichungen:

a. $x^2 - 3x - 4 > 0$

b. $\frac{1}{2}x^2 + x \leq 4$

19. Schreiben Sie ohne Betragsstriche und zeichnen Sie:

a. $p(x) = |x^2 - 4|$

b. $p(x) = \left| -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right|$

c. $p(x) = |2x^2 - 8x| + |2 - 2x| + 2$

20. Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen:

a. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b. $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$

c. $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$

d. $(x^3 + 2)^2 + 3(x^3 + 2) - 18 = 0$

21. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f(x)$ und zerlegen Sie soweit wie möglich in Linearfaktoren und skizzieren Sie:

a. $f(x) = x^3 - 13x + 12$

b. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

c. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

d. $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$

e. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

f. $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4$

g. $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x$

22. Bestimmen Sie den Grad, die Nullstellen und die Koeffizienten der Funktion $f(x)$:

a. $f(x) = \frac{1}{2}x(x - 2)(8 - x)$

b. $f(x) = -2(x^2 + 1)(2 + x)(x - 2)$

c. $f(x) = 3x^2(x^2 + 4)(x - 1)$

23. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Symmetrie folgender Funktionen:

a. $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

b. $f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x^3 + x}$

c. $f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + x}$