Algebra

1. Lösung

   Es handelt sich um Additionen von Brüchen, deshalb muss man den Hauptnenner suchen. Dieser ergit sich aus dem kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der jeweiligen Nenner.

   a. $\frac{5}{24} + \frac{7}{32} + \frac{3}{40} = \frac{5}{24}\frac{20}{20} + \frac{7}{32}\frac{15}{15} + \frac{3}{40}\frac{12}{12} = \frac{100}{480} + \frac{105}{480} + \frac{36}{480}$
   $= \frac{241}{480}$

   b. $\frac{2}{15} + \frac{5}{30} + \frac{3}{75} = \frac{2}{15}\frac{10}{10} + \frac{5}{30}\frac{5}{5} + \frac{3}{75}\frac{2}{2} = \frac{20}{150} + \frac{25}{150} + \frac{6}{150} = \frac{51}{150}$
   $= \frac{17}{50}$

   c. $\frac{1}{14} + \frac{3}{18} + \frac{3}{28} = \frac{1}{14}\frac{18}{18} + \frac{3}{18}\frac{14}{14} + \frac{3}{28}\frac{9}{9} = \frac{18}{252} + \frac{42}{252} + \frac{27}{252} = \frac{87}{252}$
   $= \frac{29}{84}$

2. Lösung

   "Plusklammern" können weggelassen werden und
   "Minusklammern" werden aufgelöst, indem man die Vorzeichen in den jeweiligen Klammern umdreht.
   $+(a+b) = a+b$ man kann dies interpretieren als Ausmultiplizieren der Klammer mit dem Faktor $+1$, also
   $+(a+b) = (+1) \cdot (a+b) = (+1) \cdot a + (+1) \cdot b = a+b$
   $-(a+b) = -a-b$ man kann dies interpretieren als Ausmultiplizieren der Klammer mit dem Faktor -1, also
   $-(a+b) = (-1) \cdot (a+b) = (-1) \cdot a + (-1) \cdot b = -a + (-b) = -a-b$
   Ferner ist es noch ratsam, die Klammern im "Zwiebelprinzip" von aussen nach innen (innen nach aussen) sukzessive aufzulösen.

   a. $(3a-4b)-(5a-2b) = 3a-4b-5a+2b$
   $= -2a-2b$

   b. $8a - [(14a-8b+2c)-(8a-12b+2c)]$
   $= 8a-(14a-8b+2c)+(8a-12b+2c)$
   $= 8a-14a+8b-2c+8a-12b+2c$
   $= 2a-4b$

   c. $24a - [(13a-6b+4c)-(9a+12b-3c)]$
   $= 24a-(13a-6b+4c)+(9a+12b-3c)$
   $= 24a-13a+6b-4c+9a+12b-3c$
   $= 20a+18b-7c$

   d. $3a - \{2a-(12a-4x)-[2x-(3x+3a)-19a]\}$
   $= 3a-2a+(12a-4x)+[2x-(3x+3a)-19a]$
   $= 3a-2a+12a-4x+2x-3x-3a-19a$
   $= -9a-5x$

e. $(4x+6y)-\{6x-[7y-(5x+3y)-(6y-8x)-3x]-3x\}$
$= 4x+6y-6x+[7y-(5x+3y)-(6y-8x)-3x]+3x$
$= 4x+6y-6x+7y-5x-3y-6y+8x-3x+3x$
$= x+4y$

3. Lösung
Es handelt sich hierbei um Additionen (Subtraktionen) von Brüchen, deshalb muss man den Hauptnenner suchen. Dieser ergibt sich aus dem kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der jeweilig an der Summe (Differenz) beteiligten Nenner - hier muss beim Erweitern der Summanden (Subtrahenden) jedoch auf den Zähler aufgepasst werden (diesen setzt man in Klammern). Nach dem Erweitern muss der Zähler jeweils ausmultipliziert werden und es muss zusätzlich auf die Vorzeichen der Zählerklammern geachtet werden.

a. $\dfrac{2a-b}{3}-\dfrac{5a-4b}{3}+\dfrac{18a-27b}{9} = \dfrac{2a-b}{3}\,\dfrac{3}{3}-\dfrac{5a-4b}{3}\,\dfrac{3}{3}+\dfrac{18a-27b}{9}$
$\dfrac{3(2a-b)-3(5a-4b)+18a-27b}{9} = \dfrac{6a-3b-15a+12b+18a-27b}{9}$
$= a-2b$

b. $\dfrac{a-b}{2}+\dfrac{3a+5b}{15}-\dfrac{2a-7b}{20}+\dfrac{5b+6a}{20}$
$= \dfrac{9}{10}a+\dfrac{13}{30}b$

c. $\dfrac{4u-5v+8}{18}-\dfrac{7u+3v-5}{30}+\dfrac{2u-5v-3}{45}$
$= \dfrac{1}{30}u-\dfrac{22}{45}v+\dfrac{49}{90}$

d. $\dfrac{x+5y-7z}{15}+\dfrac{3x+5y-7z}{20}-\dfrac{2x-y+5z}{30}$
$= \dfrac{3}{20}x+\dfrac{37}{60}y-\dfrac{59}{60}z$

4. Lösung
Das Ausmultiplizieren erfolgt durch die Regel
$(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$
und anschließendem Zusammenfassen gleichartiger Terme.

a. $(4x+3)(5x+8) = 20x^2+32x+15x+24 = 20x^2+47x+24$

b. $(5a+7)(8a+3) = 40a^2+71a+21$

c. $(3x+6)(8x-10) = 24x^2+18x-60$

d. $(-2x+6)(-3x+4) = 6x^2-26x+24$

e. $(-3a+2b)(2a+3b) = -6a^2+6b^2-5ab$

f. $(2a-3)(3a+4) = 6a^2-a-12$

g. $(3x-y)(-2y+3) = 9x-3y-6xy+2y^2$

h. $(4u-5v)(7u-3v) = 28u^2-47uv+15v^2$

i. $(-7s-3t)(2s-6t) = -14s^2+36st+18t^2$

5. Lösung
Es handelt sich hierbei um die sogenannten binomischen Formeln. Durch deren

Anwendung erspart man sich das Ausmultiplizieren.
Sind Sie jedoch unsicher in deren Anwendung, so können Sie einen Umweg über das Ausmultiplizieren machen

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(-a-b)^2 = (-a-b)(-a-b) = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

und verfahren wie in voriger Aufgabe.

a. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

b. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

d. $(2a+3b)^2 = 4a^2 + 12ab + 9b^2$

e. $(3a-b)^2 = 9a^2 - 6ab + b^2$

f. $(2a+b)(2a-b) = 4a^2 - b^2$

g. $(-x+y)^2 = (y-x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$

h. $(-2x-3y)^2 = (2x+3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

i. $(2a+3b)(3b-2a) = (3b+2a)(3b-2a) = 9b^2 - 4a^2$

j. $(-5y+8x)^2 = (8x-5y)^2 = 64x^2 - 80xy + 25y^2$

k. $(-3a-5b)^2 = (3a+5b)^2 = 9a^2 + 30ab + 25b^2$

l. $(8x-3y)(3y+8x) = (8x-3y)(8x+3y) = 64x^2 - 9y^2$

6. Lösung
Nach der alten Algebra-Regel "Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich" - erst die binomischen Formeln ausmultiplizieren und danach gleichartige Terme zusammenfassen.

a. $(x+3)^2 - (x-1)^2 = x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 2x + 1)$
$= 8x + 8$

b. $(5x-3y)^2 - (2x+y)^2 = 21x^2 - 34xy + 8y^2$

c. $(13a-11b)^2 - (17a-21b)^2 = 428ab - 120a^2 - 320b^2$

d. $(9a-7b)^2 - (2a+3b)(-3b+2a) = 77a^2 - 126ab + 58b^2$

7. Lösung
Dies erfolgt durch Faktorisieren (binomische Formeln rückwärts) und anschließender Probe

$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

a. $x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

b. $4x^2 + 4xy + y^2 = (2x+y)^2$

c. $4u^2 - 10uv + 9v^2$ nicht faktorisierbar

d. $16u^2 + 8u + 1 = (4u+1)^2$

e. $25y^2 - 80xy + 64x^2 = (5y - 8x)^2$

8. Lösung

Ergänzen zu einer vollständigen binomischen Formel für $a > 0$ erfolgt nach folgender Regel:

$ax^2 \pm bx + \ldots = (\sqrt{a}\,x + \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 = ax^2 + bx + \frac{1}{4a}b^2$

a. $x^2 + 2x + \ldots = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

b. $x^2 - 6x + \ldots = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$

c. $x^2 + x + \ldots = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = x^2 + x + \frac{1}{4}$

d. $u^2 - 5u + \ldots = \left(u - \frac{5}{2}\right)^2 = u^2 - 5u + \frac{25}{4}$

e. $x^2 - 2xy + \ldots = (x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

f. $x^2 - 9xy + \ldots = (x - \frac{9}{2}y)^2 = x^2 - 9xy + \frac{81}{4}y^2$

g. $4x^2 + 8x + \ldots = (2x + 2)^2 = 4x^2 + 8x + 4$

h. $9a^2 - 12ab + \ldots = (3a - 2b)^2 = 9a^2 - 12ab + 4b^2$

Faktorisieren, Ausklammern

1. Lösung

   Eine Faktorisierung erfolgt durch Ausklammern gemeinsamer Faktoren und anschließender evtl. binomischer Formeln "rückwärts" oder umgekehrt.

   a. $x^2 - 4y^2 = (x - 2y)(x + 2y)$

   b. $9u^2 - 25v^2 = (3u - 5v)(3u + 5v)$

   c. $(a + b)x + (a + b)y = (x + y)(a + b)$

   d. $(u + v)x - (u + v)y = (x - y)(u + v)$

   e. $ax + ay + bx + by = (x + y)(a + b)$

   f. $ab + 5a + 5b + b^2 = (b + 5)(a + b)$

   g. $x^2 - ax + 2x - 2a = (x + 2)(x - a)$

   h. $6x^2 + 3xy - 2ax - ay = (a - 3x)(-2x - y) = -(a - 3x)(2x + y)$

   i. $6a^2 - 15a + 2ab - 5b = (2a - 5)(3a + b)$

2. Lösung

   Separates Faktorisieren des Zählers und Nenners und anschließendes Kürzen.

   a. $\dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1} = \dfrac{x(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \dfrac{x}{x - 1}$

   b. $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + x} = \dfrac{(x + 1)^2}{x(x + 1)} = \dfrac{x + 1}{x}$

   c. $\dfrac{x^2 - 1}{ax - a} = \dfrac{(x + 1)(x - 1)}{a(x - 1)} = \dfrac{x + 1}{a}$

   d. $\dfrac{ab + b}{ac + a} = \dfrac{b(a + 1)}{a(c + 1)}$

   e. $\dfrac{a^2 - 9}{a^2 - 6a + 9} = \dfrac{(a + 3)(a - 3)}{(a - 3)^2} = \dfrac{a + 3}{a - 3}$

   f. $\dfrac{2x^2 - xy}{4x^2 - y^2} = \dfrac{x(2x - y)}{(2x + y)(2x - y)} = \dfrac{x}{2x + y}$

3. Lösung

Bestimmen Sie den Hauptnenner und vereinfachen Sie damit die Summe der Brüche auf einen Bruch. Verfahren Sie danach weiter, wie in voriger Aufgabe.

a. $\frac{1}{a+b} - \frac{1}{a-b} = -2\frac{b}{a^2-b^2} = 2\frac{b}{b^2-a^2}$

b. $\frac{x+y}{x} - \frac{x}{x+y} = \frac{y(2x+y)}{x(x+y)}$

c. $\frac{3}{a+b} + \frac{6b}{a^2-b^2} + \frac{2}{a-b} = \frac{5}{a-b}$

d. $\frac{a+2}{a-2} + \frac{a-2}{a+2} - \frac{a^2+4}{a^2-4} = \frac{a^2+4}{a^2-4}$

e. $\frac{u-v}{u+v} - \frac{2(u^2+v^2)}{u^2-v^2} + \frac{u^2-v^2}{u^2+2uv+v^2} = -\frac{4uv}{u^2-v^2} = \frac{4uv}{v^2-u^2}$

4. Lösung

Umschreiben des Doppelbruchs nach der Regel

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

und dann verfahren wie in den vorigen Aufgaben.

a. $\frac{3x}{x+y} : \frac{14x}{7x+7y} = \frac{3x}{x+y} \cdot \frac{7(x+y)}{14x} = \frac{3}{2}$

b. $\frac{4(x^2-y^2)}{5(a^2-b^2)} : \frac{2x+2y}{5a-5b} = \frac{4(x+y)(x-y)}{5(a+b)(a-b)} \cdot \frac{5(a-b)}{2(x+y)} = \frac{2(x-y)}{a+b}$

c. $\frac{9x^2+6x+1}{2x+1} : \frac{3x+1}{4x^2-1} = \frac{(3x+1)^2}{2x+1} \cdot \frac{(2x+1)(2x-1)}{3x+1} = 6x^2-x-1$

d. $\frac{a^2-4b^2}{a^2+4ab+4b^2} : \frac{a-2b}{a+2b} = \frac{(a+2b)(a-2b)}{(a+2b)^2} \cdot \frac{a+2b}{a-2b} = 1$

e. $\frac{6xy-6y^2}{5(x+y)^2} : \frac{9x^2-9xy}{3x+3y} = \frac{6y(x-y)}{5(x+y)^2} \cdot \frac{3(x+y)}{9x(x-y)} = \frac{2y}{5x(y+x)}$

f. $\frac{12x^2y-6xy}{2a-3} : \frac{10x^2-5x}{2ab-3b} = \frac{6xy(2x-1)}{2a-3} \cdot \frac{b(2a-3)}{5x(2x-1)} = \frac{6}{5}by$

5. Lösung

Multiplizieren Sie gliedweise aus oder verwenden Sie vereinfachend die dritte binomische Formel

$(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

a. $\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right)\left(\sqrt{a^2+x^2}-x\right) = (\sqrt{a^2+x^2})^2 - x^2$

$= a^2+x^2-x^2 = a^2$

b. $(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}) = (\sqrt{a+x})^2-(\sqrt{a-x})^2$

$= a+x-(a-x) = 2x$

6. Lösung

Lösen Sie nach x auf, in dem Sie die passenden Regeln der Algebra (Äquivalenzumformungen) anwenden und den Definitionsbereich der Variablen x und y festlegen und anschließend kontrollieren, für welche y überhaupt eine Lösung existiert.

a. $\frac{1}{3}x + 1 = 4 - \frac{1}{2}y$

Definitionsbereich: $x, y \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{3}x = 3 - \frac{1}{2}y$

$\Rightarrow x = 9 - \dfrac{3}{2}y$

Es existiert eine Lösung für $y \in \mathbb{R}$.

b. $x - 1 = \dfrac{1}{y} + 2$

Definitionsbereich: $x \in \mathbb{R}, y \neq 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{y} + 3$

Es existiert nur eine Lösung für $y \neq 0$.

c. $\dfrac{2}{x} = \dfrac{3}{y} + \dfrac{1}{4}$

Definitionsbereich: $x \neq 0, y \neq 0$

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{2y} + \dfrac{1}{8}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{\dfrac{3}{2y} + \dfrac{1}{8}} = \dfrac{8y}{y + 12}$

Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; -12\}$.

d. $\dfrac{5}{x} - \dfrac{3}{y} = 7$

Definitionsbereich: $x \neq 0, y \neq 0$

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{3}{5y} + \dfrac{7}{5}$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{\dfrac{3}{5y} + \dfrac{7}{5}} = \dfrac{5y}{7y + 3}$

Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; -\dfrac{7}{3}\}$.

e. $\dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{3y} = \dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{5y} + 2$

Definitionsbereich: $x \neq 0, y \neq 0$

Multiplikation mit 30

$\dfrac{15}{x} + \dfrac{10}{y} = \dfrac{10}{x} - \dfrac{6}{y} + 60$

$\dfrac{5}{x} = -\dfrac{16}{y} + 60$

$\dfrac{1}{x} = -\dfrac{16}{5y} + 12$

$\Rightarrow x = \dfrac{1}{-\dfrac{16}{5y} + 12} = \dfrac{5y}{60y - 16}$

Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; \dfrac{4}{15}\}$.

f. $\dfrac{2}{3x} - \dfrac{3}{4y} = \dfrac{3}{2x} + \dfrac{4}{3y} - \dfrac{4}{3}$

Definitionsbereich: $x \neq 0, y \neq 0$

Multiplikation mit 12

$\dfrac{8}{x} - \dfrac{9}{y} = \dfrac{18}{x} + \dfrac{16}{y} - 16$

$$-\frac{10}{x} = \frac{25}{y} - 16$$

$$\frac{1}{x} = -\frac{5}{2y} + \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{-\frac{5}{2y} + \frac{8}{5}} = \frac{10y}{16y - 25}$$

Es existiert nur eine Lösung für $y \in \mathbb{R} \setminus \{0; \frac{25}{16}\}$.

7. Lösung

   Hauptnenner suchen und mit Hilfe der Regeln der Algebra Zähler und Nenner jeweils Zusammenfassen, gegebenenfalls Faktorisieren und danach Kürzen.

   $$\frac{1 - x^2}{x^{n+3}} + \frac{1 + x^3 - x^{n-1}}{x^{2n+2}} - \frac{1 - x^{n-2}}{x^{2n-1}}$$

   Der Hauptnenner ist HN $= x^{2n+2}$

   $$\frac{1 - x^2}{x^{n+3}}\frac{x^{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{1 + x^3 - x^{n-1}}{x^{2n+2}} - \frac{1 - x^{n-2}}{x^{2n-1}}\frac{x^3}{x^3}$$

   $$= \frac{x^{n-1} - x^{n+1} + 1 + x^3 - x^{n-1} - x^3 + x^{n+1}}{x^{2n+2}} = \frac{1}{x^{2n+2}}$$

8. Lösung

   Suchen des kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der einzelnen Terme (Summanden/Subtrahenden) und dieses Ausklammern oder binomische Formel rückwärts.

   a. $2a^2 - 4ab = 2a(a - 2b)$

   b. $a^2b + ab^2 = ab(a + b)$

   c. $8a^2b^3 + 24ab^2 = 8ab^2(ab + 3)$

   d. $x^7y^3 - 2x^5y^5 = x^5y^3(x^2 - 2y^2)$

   e. $a^{n+1}b^3 + a^nb^4 = a^nb^3(a + b)$

   f. $a^{n+1}b^2 - a^{n-1}b^4 = a^{n-1}b^2(a + b)(a - b)$

Potenzgesetze mit gebrochenen Hochzahlen

1. Lösung
   Zum Umschreiben einer Wurzel in eine Potenz benützen Sie für die Lösung die folgende Formel
   $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
   a. $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
   b. $\sqrt[4]{y} = y^{\frac{1}{4}}$
   c. $\sqrt[7]{a+b} = (a+b)^{\frac{1}{7}}$
   d. $\sqrt[5]{a^6} = a^{\frac{6}{5}}$
   e. $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} = \dfrac{1}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{-\frac{3}{4}}$
   f. $\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{3}{x^{\frac{2}{3}}} = 3x^{-\frac{2}{3}}$
2. Lösung
   Verfahren Sie wie in der vorigen Aufgabe und benützen Sie die Potenzgesetze
   $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
   $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
   $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
   $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
   a. $\sqrt[4]{a^8} = a^{\frac{8}{4}} = a^2$
   b. $\sqrt[16]{a^{8n}} = a^{\frac{8n}{16}} = a^{\frac{n}{2}}$
   c. $\left(\sqrt[6]{a^2}\right)^3 = \left(a^{\frac{2}{6}}\right)^3 = a$
   d. $\sqrt{\sqrt{a}} = \left(a^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$
   e. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^2}} = \left(a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{4}} = a^{\frac{1}{6}}$
   f. $\left(\sqrt[5]{\left(\sqrt[4]{a^{20}}\right)}\right)^2 = \left(\left(a^{\frac{20}{4}}\right)^{\frac{1}{5}}\right)^2 = a^2$
   g. $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$
   h. $\left(a^{\frac{3}{4}}\right)^{12} = a^9$
   i. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^2 \cdot \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^2 \cdot a^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{7}{2}}$
3. Lösung
   Suchen des kgV (kleinsten gemeinsamen Vielfachen) der einzelnen Terme (Summanden/Subtrahenden) und dieses Ausklammern.
   a. $a^{\frac{3}{2}} \cdot b^3 + a^2 \cdot b^{\frac{5}{2}} = a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{5}{2}} (\sqrt{b} + \sqrt{a})$

b. $x^{\frac{4}{3}} \cdot y^2 - 2x^2 \cdot y^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{4}{3}} y^{\frac{5}{3}} (y^{\frac{1}{3}} - 2x^{\frac{2}{3}})$

c. $a^{\frac{2}{n}} \cdot b + a^{\frac{4}{n}} \cdot b^{\frac{n+2}{n}} = a^{\frac{2}{n}} \cdot b(1 + a^{\frac{2}{n}} \cdot b^{\frac{2}{n}})$

4. Lösung

Lösen Sie gegebenenfalls den Doppelbruch auf und fassen Sie dann Zähler und Nenner mit Hilfe der Potenzgesetze zusammen und kürzen Sie anschließend.

a. $$\frac{2\sqrt{a} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}{5 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot y^{-1}} : \frac{6 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}}{15 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}} = \frac{2a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{1}{2}}}{5 \cdot x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{-1}} \cdot \frac{15 \cdot a^{-\frac{1}{2}} \cdot b^{-\frac{2}{3}}}{6 \cdot x^{-\frac{1}{2}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} = b^{-\frac{7}{6}} x^{\frac{1}{6}} y^{\frac{3}{2}}$$

b. $$\frac{20 \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^2}{12 \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} : \frac{5 \cdot x^2 \cdot y^{-\frac{2}{7}}}{3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot b^{\frac{2}{3}}} = \frac{20 \cdot a^{-\frac{2}{3}} \cdot b^2}{12 \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot y^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{3 \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot b^{\frac{2}{3}}}{5 \cdot x^2 \cdot y^{-\frac{2}{7}}} = b^{\frac{8}{3}} x^{-\frac{11}{4}} y^{\frac{11}{14}}$$

c. $$\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot a^{-\frac{1}{4}} + \frac{\left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[4]{a^5}} + \left(\frac{1}{a}\right)^{-1} = a^{\frac{7}{12}} + 2a$$

d. $$\frac{a^{-\frac{m}{n}} \left(a^2 \cdot \sqrt[n]{a^{m-2n}}\right)^{\frac{1}{m}}}{\sqrt[n]{\frac{a^n}{a^{m-1}}}} = a^{-1}$$

e. $$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} - \frac{a + b - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{ab} + b + a - \sqrt{ab} - a - b + \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1$$

f. $$\sqrt{\left(\sqrt[3]{x + \sqrt{x^2 - a^2}}\right) \cdot \left(\sqrt[3]{x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right)} = \sqrt[6]{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)} = a^{\frac{1}{3}}$$

g. $$\left[\sqrt[5]{\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2} \cdot \left(\sqrt[9]{\frac{(a-b)^3}{(a+b)^2}} : \sqrt[15]{\frac{(a+b)^4}{(a-b)^2}}\right)\right] : \sqrt[45]{\frac{(a-b)^8}{(a+b)^4}}$$

$$= \sqrt[5]{\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}} \cdot \sqrt[9]{\frac{(a-b)^3}{(a+b)^2}} \cdot \sqrt[15]{\frac{(a-b)^2}{(a+b)^4}} \cdot \sqrt[45]{\frac{(a+b)^4}{(a-b)^8}}$$

$$= \frac{(a+b)^{\frac{2}{5}} (a-b)^{\frac{1}{3}} (a-b)^{\frac{2}{15}} (a+b)^{\frac{4}{45}}}{(a-b)^{\frac{2}{5}} (a+b)^{\frac{2}{9}} (a+b)^{\frac{4}{15}} (a-b)^{\frac{8}{45}}} = (a-b)^{-\frac{1}{9}}$$

h. $$\sqrt[3]{3a^2b^2c^4 - 4a^4b^2c^2 + 5a^2b^4c^2} : \sqrt[3]{\frac{3c}{ab} - \frac{4a}{bc} + \frac{5b}{ac}} = \frac{\sqrt[3]{(abc)^2(3c^2 - 4a^2 + 5b^2)}}{\sqrt[3]{\frac{3c^2 - 4a^2 + 5b^2}{abc}}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{(abc)^2[3c^2 - 4a^2 + 5b^2]}{\frac{3c^2 - 4a^2 + 5b^2}{abc}}} = \sqrt[3]{\frac{(abc)^3(3c^2 - 4a^2 + 5b^2)}{3c^2 - 4a^2 + 5b^2}} = abc$$

Geraden, Parabeln, Beträge, Ungleichungen, Nullstellen von Funktionen

1. Lösung

   Geradengleichung durch zwei Punkte A und B

   Zwei-Punkte-Form: $\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$

   Gerade durch einen Punkt C mit der Steigung m

   Punkt-Steigungs-Form: $\frac{y-y_C}{x-x_C} = m$

   Zwei Geraden g_1 und g_2 sind parallel, wenn ihre Steigungen gleich sind: $m_1 = m_2$

   Zwei Geraden g_1 und g_2 sind orthogonal, wenn gilt: $m_1 m_2 = -1$

   Der Abstand zweier Punkte A und B ist: $d_{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

   Der Mittelpunkt zweier Punkte A und B ist: $M_{AB}(\frac{x_A+x_B}{2}/\frac{y_A+y_B}{2})$

   a. $A(-2/0), B(4/3), C(1/4)$

      Bestimmung der Geraden g

      $$\frac{y-y_A}{x-x_A} = \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$$

      $$\frac{y-0}{x-(-2)} = \frac{3-0}{3-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y}{x+2} = \frac{3}{5} \Rightarrow y = \frac{3}{5}(x+2)$$

      $$g : y = \frac{3}{5}x + \frac{6}{5}$$

      Bestimmung der Geraden h durch C parallel zu g, also mit der Steigung

      $$m_h = m_g = \frac{3}{5}$$

      $$\frac{y-y_C}{x-x_C} = m_h$$

      $$\frac{y-4}{x-1} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \frac{y-4}{x-1} = \frac{3}{5} \Rightarrow y-4 = \frac{3}{5}(x-1)$$

      $$h : y = \frac{3}{5}x + \frac{17}{5}$$

      Bestimmung der Geraden k durch C orthogoal zu g, also mit der Steigung

      $$m_k = -\frac{1}{m_g} = -\frac{5}{3}$$

      $$\frac{y-y_C}{x-x_C} = m_k$$

      $$\frac{y-4}{x-1} = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{y-4}{x-1} = -\frac{5}{3} \Rightarrow y-4 = -\frac{5}{3}(x-1)$$

      $$k : y = -\frac{5}{3}x + \frac{17}{3}$$

      Bestimmung des Abstands der Punkte A und B

      $$d_{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

      $$d_{AB} = \sqrt{(4-(-2))^2+(3-0)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

      Bestimmung des Mittelpunkts der Punkte A und B

$M_{AB}(\frac{x_A + x_B}{2} / \frac{y_A + y_B}{2})$
$M_{AB}(\frac{-2+4}{2} / \frac{0+3}{2})$
$M_{AB}(1/\frac{3}{2})$

b. $A(-2/1), B(2/-1), C(2/4)$

Bestimmung der Geraden g

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$\frac{y-1}{x-(-2)} = \frac{-1-1}{2-(-2)} \Leftrightarrow \frac{y-1}{x+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{2}(x+2)$$
$$g : y = -\frac{1}{2}x$$

Bestimmung der Geraden h durch C parallel zu g, also mit der Steigung

$$m_h = m_g = -\frac{1}{2}$$
$$\frac{y - y_C}{x - x_C} = m_h$$
$$\frac{y-4}{x-2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 4 = -\frac{1}{2}(x-2)$$
$$h : y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Bestimmung der Geraden k durch C orthogoal zu g, also mit der Steigung

$$m_k = -\frac{1}{m_g} = 2$$
$$\frac{y - y_C}{x - x_C} = m_k$$
$$\frac{y-4}{x-2} = 2 \Rightarrow y - 4 = 2(x-2)$$
$$k : y = 2x$$

Bestimmung des Abstands der Punkte A und B

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$
$$d_{AB} = \sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Bestimmung des Mittelpunkts der Punkte A und B

$M_{AB}(\frac{x_A + x_B}{2} / \frac{y_A + y_B}{2})$
$M_{AB}(\frac{-2+2}{2} / \frac{1+(-1)}{2})$
$M_{AB}(0/0)$

c. $A(-1/4), B(4/-1), C(3/2)$

Bestimmung der Geraden g

$$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$\frac{y-4}{x-(-1)} = \frac{-1-4}{4-(-1)} \Leftrightarrow \frac{y-4}{x+1} = -1 \Rightarrow y - 4 = -(x+1)$$

$g: y = -x + 3$

Bestimmung der Geraden h durch C parallel zu g, also mit der Steigung

$m_h = m_g = -1$

$\frac{y - y_C}{x - x_C} = m_h$

$\frac{y - 2}{x - 3} = -1 \Rightarrow y - 2 = -(x - 3)$

$h: y = -x + 5$

Bestimmung der Geraden k durch C orthogoal zu g, also mit der Steigung

$m_k = -\frac{1}{m_g} = 1$

$\frac{y - y_C}{x - x_C} = m_k$

$\frac{y - 2}{x - 3} = 1 \Rightarrow y - 2 = x - 3$

$k: y = x - 1$

Bestimmung des Abstands der Punkte A und B

$d_{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$d_{AB} = \sqrt{(4 - (-1))^2 + (-1 - 4)^2} = \sqrt{25 + 25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

Bestimmung des Mittelpunkts der Punkte A und B

$M_{AB}(\frac{x_A + x_B}{2} / \frac{y_A + y_B}{2})$

$M_{AB}(\frac{-1 + 4}{2} / \frac{4 + (-1)}{2})$

$M_{AB}(\frac{3}{2} / \frac{3}{2})$

d. $A(-\sqrt{2} / \sqrt{3}), B(2 - \sqrt{5} / \sqrt{2}), C(\frac{1}{3} / \frac{4}{5})$

Bestimmung der Geraden g

$\frac{y - y_A}{x - x_A} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$\frac{y - \sqrt{3}}{x - (-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{5} - (-\sqrt{2})} \Leftrightarrow \frac{y - \sqrt{3}}{x + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}} \Rightarrow y - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

$g: y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}} x + \frac{2 - \sqrt{6}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}} + \sqrt{3} \approx -0,27x + 1,35$

Bestimmung der Geraden h durch C parallel zu g, also mit der Steigung

$m_h = m_g = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$

$\frac{y - y_C}{x - x_C} = m_h$

$\frac{y - \frac{4}{5}}{x - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}} \Rightarrow y - \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}}(x - \frac{1}{3})$

$h: y = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{2} - \sqrt{5}} x - \frac{2 - \sqrt{6}}{6 + 3\sqrt{2} - 3\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \approx -0,27x + 0,67$

Bestimmung der Geraden k durch C orthogoal zu g, also mit der Steigung

$$m_k = -\frac{1}{m_g} = -\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$\frac{y-y_C}{x-x_C} = m_k$$

$$\frac{y-\frac{4}{5}}{x-\frac{1}{3}} = -\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \Rightarrow y-\tfrac{4}{5} = -\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}(x-\tfrac{1}{3})$$

$$k: y = -\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}x + \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{5}}{3\sqrt{2}-3\sqrt{3}} + \frac{4}{5} \approx 3,7x-0,44$$

Bestimmung des Abstands der Punkte A und B $A(-\sqrt{2}/\sqrt{3}), B(2-\sqrt{5}/\sqrt{2})$

$$d_{AB} = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

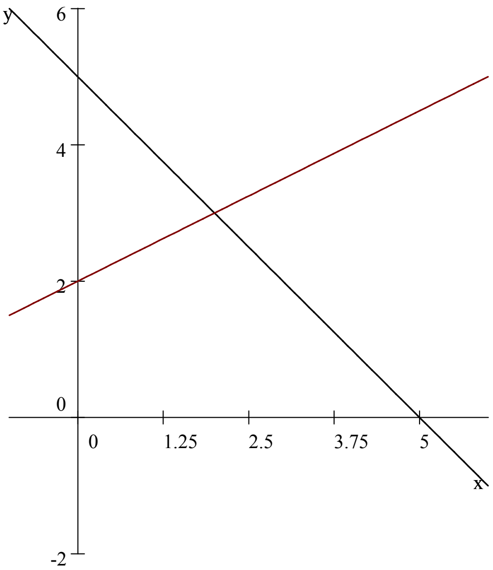
$$d_{AB} = \sqrt{(2-\sqrt{5}-(-\sqrt{2}))^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2} = 1,22$$

Bestimmung des Mittelpunkts der Punkte A und B

$$M_{AB}\left(\frac{x_A+x_B}{2}/\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

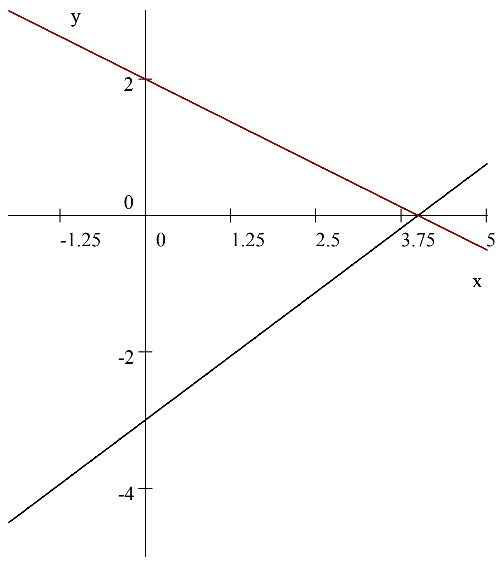
$$M_{AB}(-0,83/1,57)$$

2. Lösung
   Zu lösen ist jeweils eine lineare Ungleichung. Diese löst man mit Hilfe von Äquivalenzumformungen - man muss jedoch darauf achten, dass bei Multiplikation und Division mit einer negativen Zahl das Relationszeichen umgedreht wird.
   a. Für welche x wird $y_1 > y_2$ mit $y_1 = \frac{1}{2}x + 2$ und $y_2 = -x + 5$?



$\frac{1}{2}x + 2 > -x + 5$
$\frac{3}{2}x > 3$
$x > 2$

   b. Für welche x wird $y_1 > y_2$ mit $y_1 = -\frac{1}{2}x + 2$ und $y_2 = \frac{3}{4}x - 3$?



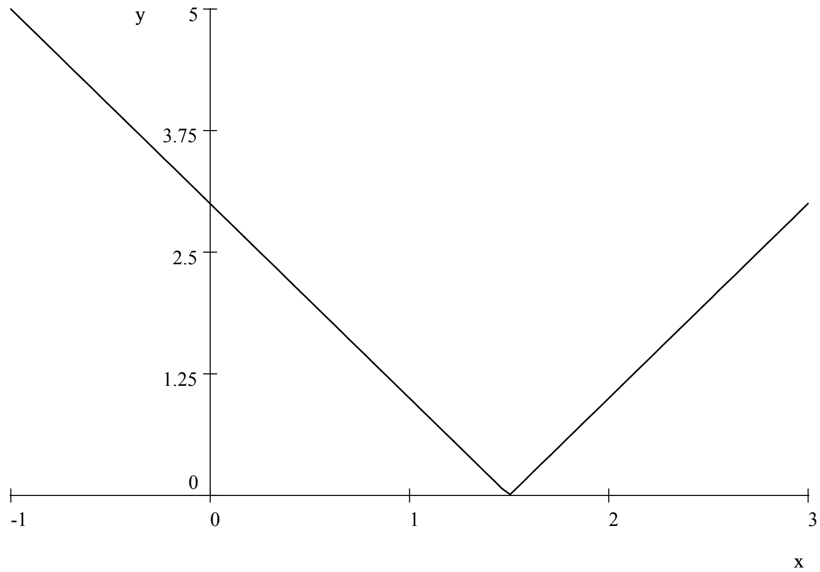
$-\frac{1}{2}x + 2 > \frac{3}{4}x - 3$
$-\frac{5}{4}x > -5$
$x < 4$

3. Lösung

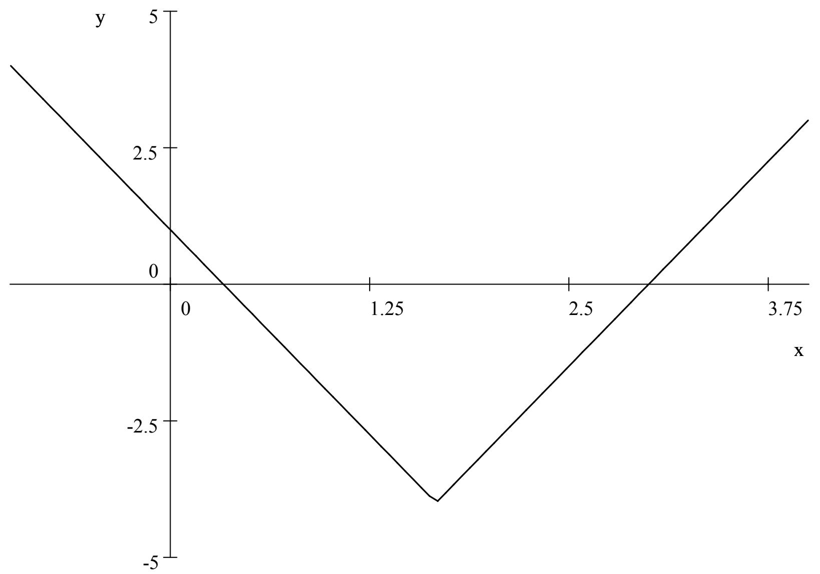
Die Definition des Betrags lautet:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

a. $y = |2x - 3| = \begin{cases} 2x - 3 & \text{für} \quad 2x - 3 \geq 0 \\ -2x + 3 & \text{für} \quad 2x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 3 & \text{für} \quad x \geq \dfrac{3}{2} \\ -2x + 3 & \text{für} \quad x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$



b. $y = |-3x + 5| - 4 = \begin{cases} -3x + 1 & \text{für} \quad -3x + 5 \geq 0 \\ 3x - 9 & \text{für} \quad -3x + 5 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 3 & \text{für} \quad x \leq \dfrac{5}{3} \\ -2x + 3 & \text{für} \quad x > \dfrac{5}{3} \end{cases}$



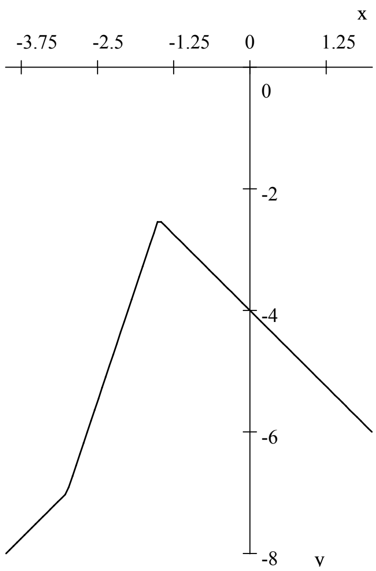
c. $y = |-x-3| - |2x+3| - 4$

Diese Funkton besitzt zwei Beträge, der linke Betrag wird Null für $x_1 = -3$, der rechte Betrag wird Null für $x_2 = -\frac{3}{2}$

Das Argument des linken Betrags wird positv für $x \leq -3$,
das Argument des linken Betrags wird negativ für $x > -3$,
das Argument des rechten Betrags wird positiv für $x \geq -\frac{3}{2}$,
das Argument des rechten Betrags wird negativ für $x < -\frac{3}{2}$

Daraus ergibt sich die betragsfreie Darstellung zu

$$y = |-x-3| - |2x+3| - 4 = \begin{cases} -x-4 & \text{für} \quad x \geq -\frac{3}{2} \\ 3x+2 & \text{für} \quad -3 < x < -\frac{3}{2} \\ x-4 & \text{für} \quad x \leq -3 \end{cases}$$



4. Lösung

Mit der Definition des Betrags ergibt dies Fallunterscheidungen.

a. $|x| + 3x = 8$

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
$4x = 8 \Rightarrow x_1 = 2 \in D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$
$2x = 8 \Rightarrow x_2 = 4 \notin D_2$

Die Gesamtlösung ist: $x_1 = 2$

b. $|2x - 1| + 1 = |6 - x|$

Diese Gleichung besitzt zwei Beträge, der linke Betrag wird Null für $x_1 = \frac{1}{2}$,
der rechte Betrag wird Null für $x_2 = 6$
Das Argument des linken Betrags wird positv für $x \geq \frac{1}{2}$,
das Argument des linken Betrags wird negativ für $x < \frac{1}{2}$,
das Argument des rechten Betrags wird positiv für $x \leq 6$,
das Argument des rechten Betrags wird negativ für $x > 6$
Daraus ergeben sich die folgende Fallunterscheidungen

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1}{2}\}$
$-(2x - 1) + 1 = 6 - x \Leftrightarrow -2x + 1 + 1 = 6 - x$
$x_1 = -4 \in D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2} \leq x \leq 6\}$
$2x - 1 + 1 = 6 - x \Leftrightarrow 3x = 6$
$x_2 = 2 \in D_2$

3. Fall: $D_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 6\}$
$2x - 1 + 1 = -(6 - x) \Leftrightarrow 2x = -6 + x$
$x_3 = -6 \notin D_3$

Die Gesamtlösung ist: $x_1 = -4,\ x_2 = 2$

c. $|x + 2| - 3 = 2 \cdot |4 - x|$

Diese Gleichung besitzt zwei Beträge, der linke Betrag wird Null für $x_1 = -2$,
der rechte Betrag wird Null für $x_2 = 4$
Das Argument des linken Betrags wird positv für $x \geq -2$,
das Argument des linken Betrags wird negativ für $x < -2$,
das Argument des rechten Betrags wird positiv für $x \leq 4$,
das Argument des rechten Betrags wird negativ für $x > 4$
Daraus ergeben sich die folgende Fallunterscheidungen

1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$
$-(x + 2) - 3 = 2(4 - x) \Leftrightarrow -x - 5 = 8 - 2x$
$x_1 = 13 \notin D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$
$x + 2 - 3 = 2(4 - x) \Leftrightarrow x - 1 = 8 - 2x$
$x_2 = 3 \in D_2$

3. Fall: $D_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 4\}$
$x + 2 - 3 = -2(4 - x) \Leftrightarrow x - 1 = -8 + 2x$
$x_3 = 7 \in D_3$

Die Gesamtlösung ist: $x_1 = 3,\ x_2 = 7$

5. Lösung

Bei Ungleichungen ist darauf zu achten, dass sich bei Multiplikation/Division mit einer negativen Zahl das Ungleichungszeichen umdreht.
Bei Bruchungleichungen ist bei Durchmultiplizieren des Nenners auf dessen Vorzeichen zu achten und eine Fallunterscheidung notwendig.

a. $4x - 3 < 3(x + 1)$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}$
$4x - 3 < 3x + 3$
$x < 6$

b. $x^2 - 15 < (x + 5)^2$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}$
$x^2 - 15 < x^2 + 10x + 25$
$-10x < 40$
$x > 4$

c. $2(x^2 - 16) > 2x^2 + 14x - 4$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}$
$2x^2 - 32 > 2x^2 + 14x - 4$
$-14x > 28$
$x < -2$

d. $\frac{2x-2}{2x+2} \leq 2$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
1. Fall: $D_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$ (Nenner ist negativ)
$2x - 2 \geq 2(2x + 2) \Leftrightarrow 2x - 2 \geq 4x + 4$
$-2x \geq 6$
$x \leq -3 \in D_1$

2. Fall: $D_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ (Nenner ist positiv)
$2x - 2 \leq 2(2x + 2) \Leftrightarrow 2x - 2 \leq 4x + 4$
$-2x \leq 6$
$x \geq -3$ dies geschnitten mit dem Definitionsbereich D_2
$x > -1$

Die Gesamtlösung ist: $(-1, \infty) \cup (-\infty, -3]$

e. $\frac{8}{2x-4} + \frac{24}{2x+4} = \frac{\frac{9}{2}}{(x-2)(x+2)}$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$
Die obige Bruchgleichung umgeschrieben
$\frac{4}{x-2} + \frac{12}{x+2} = \frac{9}{2(x-2)(x+2)}$
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= 2(x-2)(x+2) \neq 0$ liefert
$8(x + 2) + 24(x - 2) = 9 \Leftrightarrow 8x + 16 + 24x - 48 = 9$
$32x = 41$
$x_1 = \frac{41}{32} \in D$

f. $\frac{3x}{x+1} + \frac{5}{x} = 3$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}\backslash\{0; -1\}$
Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= x(x+1) \neq 0$ liefert

$3x^2 + 5(x+1) = 3x(x+1) \Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 5 = 3x^2 + 3x$

$2x = -5$

$x_1 = -\frac{5}{2} \in D$

g. $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-2} = -\frac{12}{x^2-4}$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}\backslash\{-2;2\}$

Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= (x-2)(x+2) \neq 0$ liefert

$3(x-2) + 2(x+2) = -12 \Leftrightarrow 3x - 6 + 2x + 4 = -12$

$5x = -10$

$x_1 = -2 \notin D$

Keine Lösung

h. $\frac{b(a-2x)}{ax} + \frac{a}{b} = \frac{a(a-x)}{bx}$ Der Definitionsbereich ist: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ und die Forderung $a \neq 0,\ b \neq 0$

Multiplikation mit dem Hauptnenner HN $= abx \neq 0$ liefert

$b^2(a-2x) + a^2x = a^2(a-x) \Leftrightarrow ab^2 - 2b^2x + a^2x = a^3 - a^2x$

$x(-2b^2 + 2a^2) = a^3 - ab^2$

$2x(a^2 - b^2) = a(a^2 - b^2)$

1. Fall: $a^2 - b^2 = 0 \Leftrightarrow |a| = |b| \neq 0$

$x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

2. Fall: $a^2 - b^2 \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq |b|$ und $a \neq 0,\ b \neq 0$

$x_1 = \frac{a}{2}$

6. Lösung

Die x-Koordinate des Scheitels einer Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$, sonst keine Parabel) liegt bei

$x_s = -\frac{b}{2a}$ und die y-Koordinate des Scheitels bei

$p(x_s) = y_s = c - \frac{b^2}{4a}$

a. $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

$x_s = -\frac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = 1$

$y_s = p(x_s) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -1$

$S(1/-1)$

b. $p(x) = \frac{3}{4}x^2 + 3x - \frac{5}{4}$

$x_s = -\frac{3}{2 \cdot \frac{3}{4}} = -2$

$y_s = p(x_s) = \frac{3}{4}(-2)^2 + 3(-2) - \frac{5}{4} = -\frac{17}{4}$

$S(-2/-\frac{17}{4})$

c. $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$

$x_s = -\frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2})} = 1$

$y_s = p(x_s) = -\frac{1}{2} + 1 + 4 = \frac{9}{2}$

$S(1/\frac{9}{2})$

7. Lösung

   Die x-Koordinate des Scheitels einer Parabel $p(x) = x^2 + bx + c$ liegt bei $x_s = -\dfrac{b}{2}$ und die y-Koordinate des Scheitels bei $p(x_S) = y_s = c - \dfrac{b^2}{4}$

   a. $S(0/y_s)$

      $x_s = 0 = -\dfrac{b}{2} \Rightarrow b = 0$

      $y_s = 3$

   b. $S(-1/y_s)$

      $x_s = -1 = -\dfrac{b}{2} \Rightarrow b = 2$

      $y_s = 2$

   c. $S(\frac{4}{3}/y_s)$

      $x_s = \frac{4}{3} = -\dfrac{b}{2} \Rightarrow b = -\frac{8}{3}$

      $y_s = \frac{23}{9}$

8. Lösung

   Die Scheitelform einer Parabel lautet

   $p(x) = a(x - x_s)^2 + y_s$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $S(x_s/y_s)$

   a. $S(2/-2), P(6/6)$

      $p(x) = a(x - 2)^2 - 2$

      Punktprobe mit P

      $p(6) = 6 \Leftrightarrow a(6 - 2)^2 - 2 = 6$

      $a = \frac{1}{2}$

      Die Gleichung der Parabel lautet

      $p(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2 - 2$

   b. $S(3/2), P(4/\frac{5}{2})$

      $p(x) = a(x - 3)^2 + 2$

      Punktprobe mit P

      $p(4) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a(4 - 3)^2 + 2 = \frac{5}{2}$

      $a = \frac{1}{2}$

      Die Gleichung der Parabel lautet

      $p(x) = \frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2$

   c. $S(-1/2), P(1/1)$

      $p(x) = a(x + 1)^2 + 2$

      Punktprobe mit P

      $p(1) = 1 \Leftrightarrow a(1 + 1)^2 + 2 = 1$

      $a = -\frac{1}{4}$

      Die Gleichung der Parabel lautet

      $p(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 + 2$

9. Lösung

Die x-Koordinate des Scheitels einer Parabel $p(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$, sonst keine Parabel) liegt bei
$x_s = -\frac{b}{2a}$ und bildet den Mittelpunkt der beiden Nullstellen x_1 und x_2 (wenn sie existieren).

a. $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

   Die x-Koordinate des Scheitels ist

   $x_s = -\frac{1}{2(-\frac{1}{2})} = 1$

   Die y-Koordinate des Scheitels ist

   $y_s = p(x_s) = 2$

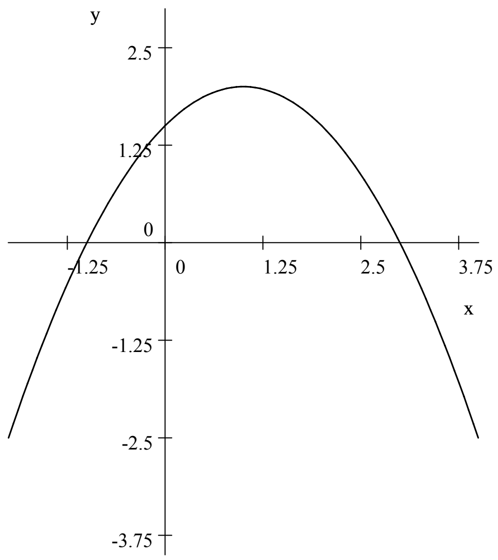
   $S(1/2)$

   Die Nullstellen erhält man mit $p(x) = 0$

   $-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$

   $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$

   $x_1 = -1, x_2 = 3$



b. $p(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

   Die x-Koordinate des Scheitels ist

   $x_s = -\frac{-\frac{1}{2}}{2(\frac{1}{4})} = 1$

   Die y-Koordinate des Scheitels ist

   $y_s = p(x_s) = \frac{7}{4}$

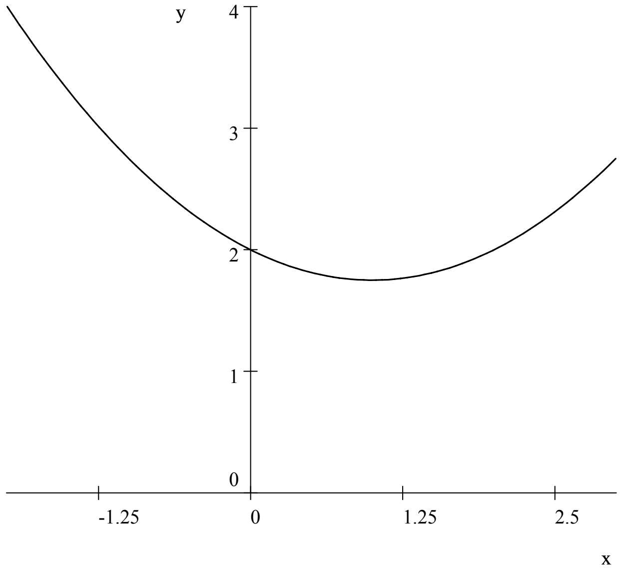
   $S(1/\frac{7}{4})$

   Die Nullstellen erhält man mit $p(x) = 0$

   $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 8 = 0$

   $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 32}}{2}$

   keine Lösung



10. Lösung

Die quadratische Ergänzung eines Terms der Form $ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0$) lautet

$$ax^2 + bx + c = a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}] = a(x + \frac{b}{2a})^2 + c - \frac{b^2}{4a}$$

Die gemischt-quadratische Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ kann nun mit der Substitution $z = x + \frac{b}{2a}$ in eine gerade quadratische Gleichung umgewandelt werden, die sehr einfach zu lösen ist

$$az^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$z_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Rücksubstitution

$$x_{1,2} + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2|a|}\sqrt{b^2 - 4ac}$$

Für den Fall $a > 0$ liefert dies die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Für den Fall $a < 0$ liefert dies die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2(-a)}\sqrt{b^2 - 4ac} = -\frac{b}{2a} \mp \frac{1}{2a}\sqrt{b^2 - 4ac} = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Dies ist im Prinzip nur x_1 mit x_2 vertauscht, also folgt für die beiden Lösungen für $a \neq 0$ die Mitternachtsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. $-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - 1 = 0$

$-\frac{1}{4}(x^2 + 2x + 4) = 0$

$-\frac{1}{4}[(x + 1)^2 - 1 + 4] = 0$

$(x + 1)^2 = -3$

Keine Lösung

b. $\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = 0$

$\frac{1}{2}(x^2 - 2x - 8) = 0$

$\frac{1}{2}[(x-1)^2 - 1 - 8] = 0$

$(x-1)^2 = 9$

$x - 1 = \pm 3$

$x_1 = -2,\ x_2 = 4$

c. $\frac{1}{3}x^2 - 2x + 3 = 0$

$\frac{1}{3}(x^2 - 6x + 9) = 0$

$\frac{1}{3}[(x-3)^2 - 9 + 9] = 0$

$(x-3)^2 = 0$

$x_{1,2} = 3$

11. Lösung

Die **gemischt-quadratische Gleichung** $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$, sonst nicht quadratisch) hat die Lösungen $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Die **gerade quadratische Gleichung** $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$, sonst nicht quadratisch) hat die Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ für $ac < 0$ (a und c haben unterschiedliches Vorzeichen) und ist unlösbar für $ac > 0$ (a und c haben gleiches Vorzeichen)

Die **quadratische Gleichung ohne Absolutglied** $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$, sonst nicht quadratisch) hat die Lösungen $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}$

a. $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

Gemischt-quadratische Gleichung

Multiplikation mit dem Hauptnenner HN = 4 lässt die Brüche verschwinden und liefert

$x^2 - 2x - 3 = 0$ Mitternachtsformel liefert

$x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \dfrac{2 \pm 4}{2} \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1$

b. $-\frac{2}{7}x^2 + 3 = 0$

Gerade quadratische Gleichung

Auflösen nach x^2 liefert

$x^2 = \dfrac{21}{2} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{21}{2}}$

c. $4x^2 - 2x = 0$

Quadratische Gleichung ohne Absolutglied

Ausklammern von x liefert mit dem Satz vom Nullprodukt

$x(4x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{1}{2}$

12. Lösung

Eine quadratische Gleichungen besitzt

keine Lösung, wenn der Radikand (Diskriminante) $D = b^2 - 4ac < 0$

eine Lösung, wenn der Radikand (Diskriminante) $D = b^2 - 4ac = 0$

zwei Lösungen, wenn der Radikand (Diskriminante) $D = b^2 - 4ac > 0$

$ax^2 - 4x + 2 = 0$

Bestimmung der Diskriminante

$D = 16 - 8a$

keine Lösung, wenn $16 - 8a < 0,$ also $a > 2$

eine Lösung, wenn $16 - 8a = 0,$ also $a = 2$

zwei Lösungen, wenn $16 - 8a > 0,$ also $a < 2$

13. Lösung

Eine quadratische Funktion $p(x) = ax^2 + bx + c$ (mit $a \neq 0,$ sonst keine quadratische Funktion) besitzt Linearfaktoren genau dann, wenn ihr Schaubild eine oder zwei Nullstellen besitzt. Sind die Nullstellen x_1 und $x_2,$ so lautet die Linearfaktorzerlegung der Funktion

$p(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

a. $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

Die Nullstellen erhält man mit $p(x) = 0$ und anschließender Mitternachtsformel

$\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$

$x_1 = -1,\ x_2 = 3$

Die Linearfaktorzerlegung ist damit

$p(x) = \frac{1}{2}(x + 1)(x - 3)$

b. $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

Die Nullstellen erhält man mit $p(x) = 0$ und anschließender Mitternachtsformel

$-\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 = 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = 2$

Die Linearfaktorzerlegung ist damit

$p(x) = -\frac{1}{4}(x + 4)(x - 2)$

c. $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

Die Nullstellen erhält man mit $p(x) = 0$ und anschließender Mitternachtsformel

$\frac{1}{4}x^2 + 2x + 4 = 0$

$x_{1,2} = -4$

Die Linearfaktorzerlegung ist damit

$p(x) = \frac{1}{4}(x + 4)(x + 4) = \frac{1}{4}(x + 4)^2$

14. Lösung

Hat eine quadratische Gleichung die Lösungen x_1 und $x_2,$ so lautet eine zugehörige Gleichung

$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die einfachste Gleichung lautet für $a = 1$

$(x - x_1)(x - x_2) = 0$

a. $L = \{5; 7\}$

Die einfachste Gleichung mit diesen Lösungen lautet

$(x - 5)(x - 7) = 0$

$x^2 - 12x + 35 = 0$

b. $L = \left\{-3; \frac{2}{3}\right\}$

Die einfachste Gleichung mit diesen Lösungen lautet

$(x + 3)(x - \frac{2}{3}) = 0$

$x^2 + \frac{7}{3}x - 2 = 0$

c. $L = \left\{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\right\}$

Die einfachste Gleichung mit diesen Lösungen lautet

$(x - (2 + \sqrt{2}))(x - (2 - \sqrt{2})) = 0$

$x^2 + (-2 - \sqrt{2} - 2 + \sqrt{2})x + (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = 0$

$x^2 - 4x + 2 = 0$

15. Lösung

Die x-Koordinaten von Schnittpunkten zweier Schaubilder p und g erhält man, indem man die Funktionsgleichungen gleich setzt und die entstehende Gleichung nach x auflöst. Die zugehörigen y-Werte erhält man, indem man die bereits berechneten x-Koordinaten in eine der Funktionsgleichungen (am besten in die einfachere der beiden) einsetzt.

a. $p(x) = x^2 + 2x$

$g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

Gleichsetzen liefert

$x^2 + 2x = -\frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow x^2 + \frac{5}{2}x + 1 = 0$

Mitternachtsformel liefert dann

$x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$

Berechnung des jeweiligen y-Werts

$g(x_1) = 0 \Rightarrow S_1(-2/0)$

$g(x_2) = -\frac{3}{4} \Rightarrow S_2(-\frac{1}{2}/-\frac{3}{4})$

b. $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$

$g(x) = -x + \frac{7}{2}$

Gleichsetzen liefert

$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2} = -x + \frac{7}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$

Mitternachtsformel liefert dann

$x_{1,2} = 2$

Berechnung des y-Werts des Berührpunktes

$g(x_{1,2}) = \frac{3}{2} \Rightarrow B(2/\frac{3}{2})$

c. $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$

$g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Gleichsetzen liefert

$-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = \frac{1}{2}x + 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 2 = 0$

Mitternachtsformel liefert dann

$x_1 = -2,\ x_2 = 4$

Berechnung des jeweiligen y-Werts

$g(x_1) = 0 \Rightarrow S_1(-2/0)$
$g(x_2) = 3 \Rightarrow S_2(4/3)$

16. Lösung

Eine Parabel berührt eine Gerade, wenn sie genau einen gemeinsamen Punkt besitzen - den Berührpunkt. Solch eine Gerade nennt man Tangente. Die Diskriminante D der entstehenden quadratischen Gleichung zur Bestimmung des Berührpunkts muss Null sein, denn nur dann gibt es geanu eine Lösung.

a. $p(x) = x^2 + 3x$
$g_b(x) = -x + b$
Gleichsetzen liefert
$x^2 + 3x = -x + b \Leftrightarrow x^2 + 4x - b = 0$
Berühren, wenn $D = 0,$ also
$16 + 4b = 0$
$b = -\frac{1}{4}$

b. $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$
$g_m(x) = mx$
Gleichsetzen liefert
$-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} = mx \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + (2 - m)x - \frac{3}{2} = 0$
Berühren, wenn $D = 0,$ also
$(2 - m)^2 - 3 = 0$
$(2 - m)^2 = 3$
$2 - m = \pm\sqrt{3}$
$m_1 = 2 - \sqrt{3},\ m_2 = \sqrt{3} + 2$

17. Lösung

Die x-Koordinaten von Schnittpunkten zweier Schaubilder p_1 und p_2 erhält man, indem man die Funktionsgleichungen gleich setzt und die entstehende Gleichung nach x auflöst. Die zugehörigen y-Werte erhält man, indem man die bereits berechneten x-Koordinaten in eine der Funktionsgleichungen (am besten in die einfachere der beiden) einsetzt.

a. $p_1(x) = x^2 + 2x - 3$
$p_2(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$
Gleichsetzen liefert
$x^2 + 2x - 3 = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{3}{2} = 0$
Mitternachtsformel liefert dann
$x_1 = -\sqrt{2} - 1,\ x_2 = \sqrt{2} - 1$
Berechnung des jeweiligen y-Werts
$p_1(x_1) = (-\sqrt{2} - 1)^2 + 2(-\sqrt{2} - 1) - 3 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 - 2\sqrt{2} - 2 - 3 = -2$
$\Rightarrow S_1(-\sqrt{2} - 1/-2)$
$p_1(x_2) = (\sqrt{2} - 1)^2 + 2(\sqrt{2} - 1) - 3 = 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2\sqrt{2} - 2 - 3 = 0$
$\Rightarrow S_2(\sqrt{2} - 1/-2)$

b. $p_1(x) = x^2 + 2x - 2$

$p_2(x) = x^2 - x + 4$

Gleichsetzen liefert

$x^2 + 2x - 2 = x^2 - x + 4 \Leftrightarrow 3x - 6 = 0$

Diese lineare Gleichung liefert

$x_1 = 2$

Berechnung des y-Werts

$p_1(x_1) = 6 \Rightarrow S_1(2/6)$

18. Lösung

Die Lösung einer quadratischen Ungleichung erhält man am einfachsten mit Hilfe der sogenannten grafischen Methode. Dazu erzeugt man auf der rechten Seite des Ungleichheitszeichens eine Null (durch Addition/Subtraktion der Terme der rechten Seite). Die neue linke Seite definiert man als eine quadratische Funktion $f(x)$ (also eine Parabel). Diese ist sehr leicht zu skizzieren, indem man die möglichen Nullstellen und den Scheitel berechnet. Danach entscheidet man welcher x-Achsenbereich die Ungleichung erfüllt.

a. $x^2 - 3x - 4 > 0$

Man definiert die Funktion $f(x) = x^2 - 3x - 4$ (nach oben geöffnet) und sucht denjenigen Bereich, bei dem die Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse liegt. Hierzu bestimmt man die Nullstellen $f(x) = 0$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x_1 = -1,\ x_2 = 4$

Die Lösung obiger Ungleichung ist damit:

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid (-\infty, -1) \cup (4, \infty)\}$

b. $\frac{1}{2}x^2 + x \leq 4$

Umschreiben liefert

$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 \leq 0$

Man definiert die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$ (nach oben geöffnet) und sucht denjenigen Bereich, bei dem die Funktion $f(x)$ unterhalb oder auf der x-Achse liegt. Hierzu bestimmt man die Nullstellen $f(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$

$x_1 = -4,\ x_2 = 2$

Die Lösung obiger Ungleichung ist damit:

$L = \{x \in \mathbb{R} \mid [-4, 2]\}$

19. Lösung

Die Definition des Betrags lautet:

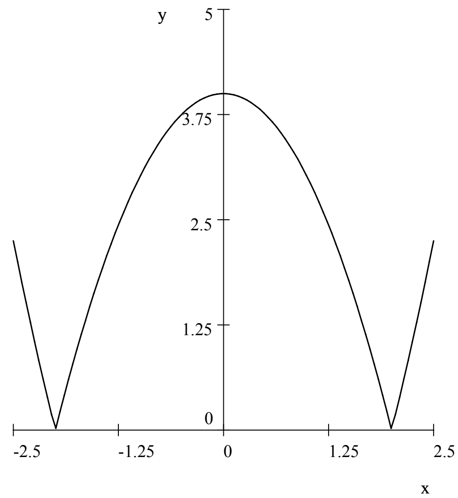
$$|a| = \begin{cases} a & \text{für} \quad a \geq 0 \\ -a & \text{für} \quad a < 0 \end{cases}$$

a. $p(x) = |x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{für} \quad x^2 - 4 \geq 0 \\ -x^2 + 4 & \text{für} \quad x^2 - 4 < 0 \end{cases}$

Die Nullstellen des Arguments sind

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$

$$p(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{für} \quad [2, \infty) \cup (-\infty, -2] \\ -x^2 + 4 & \text{für} \quad (-2, 2) \end{cases}$$

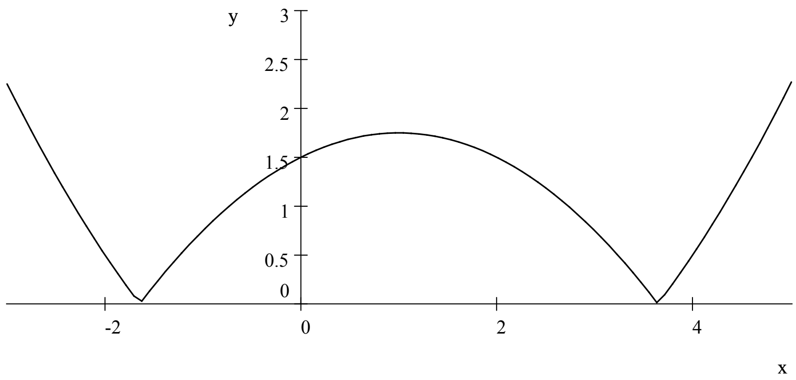


b. $p(x) = \left|-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\right| = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{für} \quad -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \geq 0 \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & \text{für} \quad -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} < 0 \end{cases}$

Die Nullstellen des Arguments sind

$-\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{7},\ x_2 = \sqrt{7} + 1$

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{für} \quad \left[-\sqrt{7} + 1, \sqrt{7} + 1\right] \\ \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} & \text{für} \quad \left(\sqrt{7} + 1, \infty\right) \cup \left(-\infty, -\sqrt{7} + 1\right) \end{cases}$$



c. $p(x) = |2x^2 - 8x| + |2 - 2x| + 2$

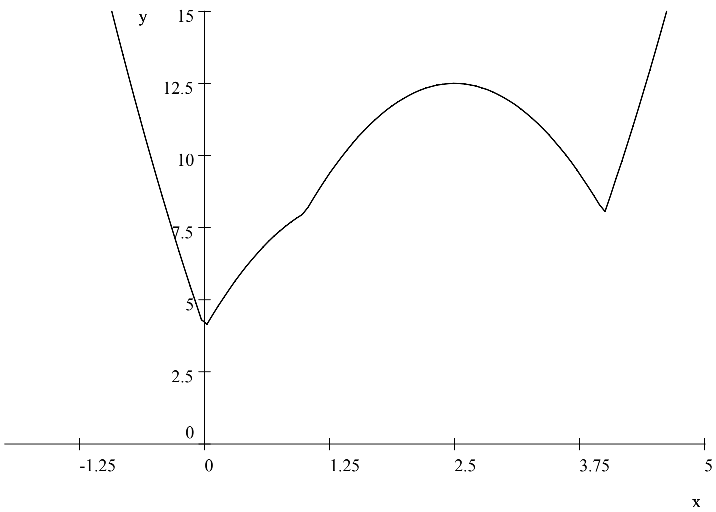
Die Nullstellen der Argumente sind

$2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 4$

$2 - 2x = 0 \Rightarrow x_3 = 1$

$p(x) = |2x^2 - 8x| + |2 - 2x| + 2$

$$p(x) = \begin{cases} +(2x^2 - 8x) + (2 - 2x) + 2 = 2x^2 - 10x + 4 & \text{für } x \le 0 \\ -(2x^2 - 8x) + (2 - 2x) + 2 = -2x^2 + 6x + 4 & \text{für } 0 < x \le 1 \\ -(2x^2 - 8x) - (2 - 2x) + 2 = -2x^2 + 10x & \text{für } 1 < x < 4 \\ +(2x^2 - 8x) - (2 - 2x) + 2 = 2x^2 - 6x & \text{für } x \ge 4 \end{cases}$$



20. Lösung

Wählen Sie eine geeignete Substitution und lösen Sie die entstehende quadratische Gleichung mit der Mitternachtsformel. Danach substituieren Sie wieder zurück.

a. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

$x^2 = z$

$z^2 - 13z + 36 = 0$

$z_1 = 4,\ z_2 = 9$

Rücksubstitution

$x^2 = z_1 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2$

$x^2 = z_2 = 9 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 3$

b. $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$

$x^2 = z$

$9z^2 - 85z + 36 = 0$

$z_1 = \frac{4}{9},\ z_2 = 9$

Rücksubstitution

$x^2 = z_1 = \frac{4}{9} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

$x^2 = z_2 = 9 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 3$

c. $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$

$x^4 = z$

$16z^2 - 257z + 16 = 0$

$z_1 = \frac{1}{16},\ z_2 = 16$

Rücksubstitution

$x^4 = z_1 = \frac{1}{16} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$x^4 = z_2 = 16 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 2$

d. $(x^3 + 2)^2 + 3(x^3 + 2) - 18 = 0$

$x^3 + 2 = z$

$z^2 + 3z - 18 = 0$

$z_1 = -6,\ z_2 = 3$

Rücksubstitution

$x^3 + 2 = z_1 = -6 \Rightarrow x_1 = -2$

$x^3 + 2 = z_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 1$

21. Lösung

Man unterscheidet grundsätzlich 3 Sorten von Nullstellen

Einfachnullstelle

Schnittpunkt mit der *x*-Achse und keine waagrechte Tangente

Doppelnullstelle (auch Vierfach-, Sechsfachnullstelle, ...)

Berührpunkt mit der *x*-Achse (Hoch- oder Tiefpunkt auf der *x*-Achse)

Dreifachnullstelle (auch Fünffach-, Siebenfachnullstelle, ...)

Schnittpunkt mit der *x*-Achse und waagrechter Tangente (Sattelpunkt - Wendepunkt mit waagrechter Tangente)

Des Weiteren unterscheidet man zwischen algebraischen und geometrischen Nullstellen:

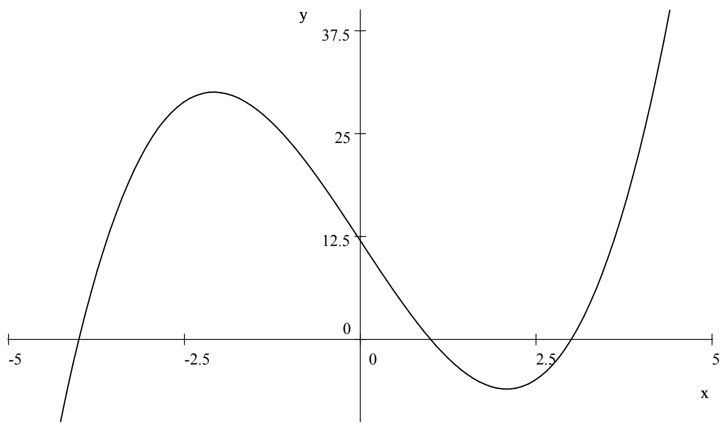
Algebraische Nullstellen sind Lösungen der Nullstellengleichung - diese können auch mehrfach sein.

Geometrische Nullstellen sind die tatsächlichen Orte, wo das Schaubild die *x*-Achse schneidet oder berührt.

Beispiel: Eine Doppellösung der Nullstellengleichung liefert zwei algebraische Nullstellen aber nur eine geometrische Nullstelle.

Eine Doppel- und eine Dreifachnullstelle liefern zusammen fünf algebraische Nullstellen aber nur zwei geometrische Nullstellen.
Eine Funktion $f(x)$ vom Grad n kann höchstens n algebraische Nullstellen besitzen.
Diese Funktion ist in Linearfaktoren zerlegbar genau dann, wenn die Anzahl der algebraischen Nullstellen genau gleich dem Grad n ist.
$f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$, $n \in \mathbb{N}$ (ganzrationale Funktion)
Die Linearfaktorzerlegung lautet dann
$f(x) = a_n \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ algebraische Nullstellen sind.

a. $f(x) = x^3 - 13x + 12$
   $x^3 - 13x + 12 = 0$
   Diese Gleichung hat die Lösungen
   $x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = 3$
   Die Linearfaktorzerlegung lautet
   $f(x) = (x + 4)(x - 1)(x - 3)$



b. $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

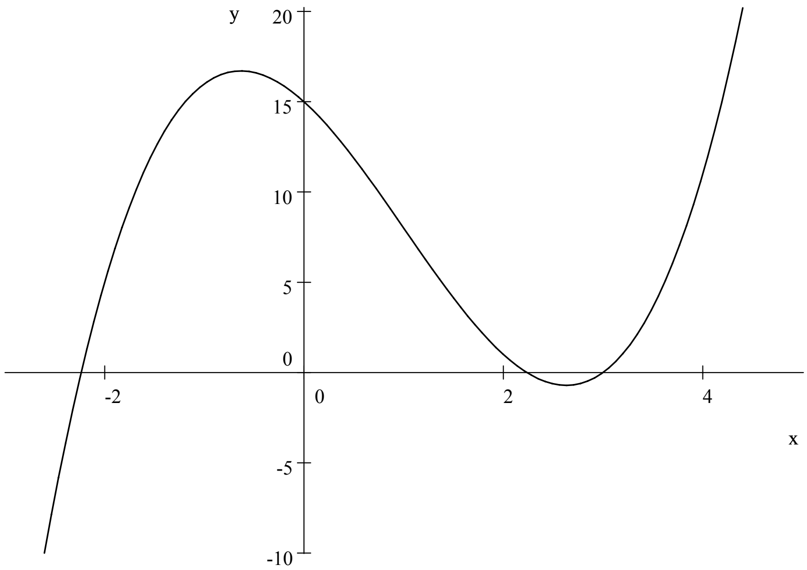
$x^3 - 3x^2 - 5x + 15 = 0$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = 3,\ x_2 = \sqrt{5},\ x_3 = -\sqrt{5}$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$f(x) = (x-3)\left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right)$



c. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

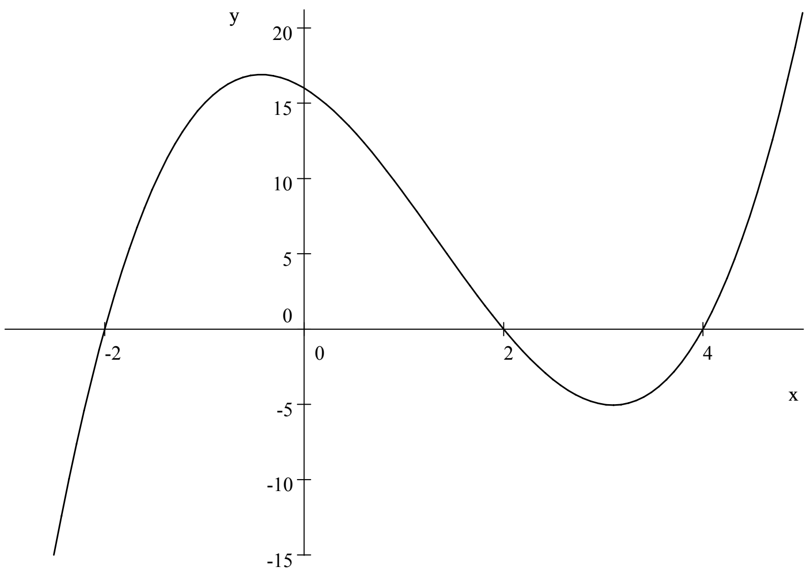
$x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = -2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$f(x) = (x+2)(x-2)(x-4)$



d. $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$

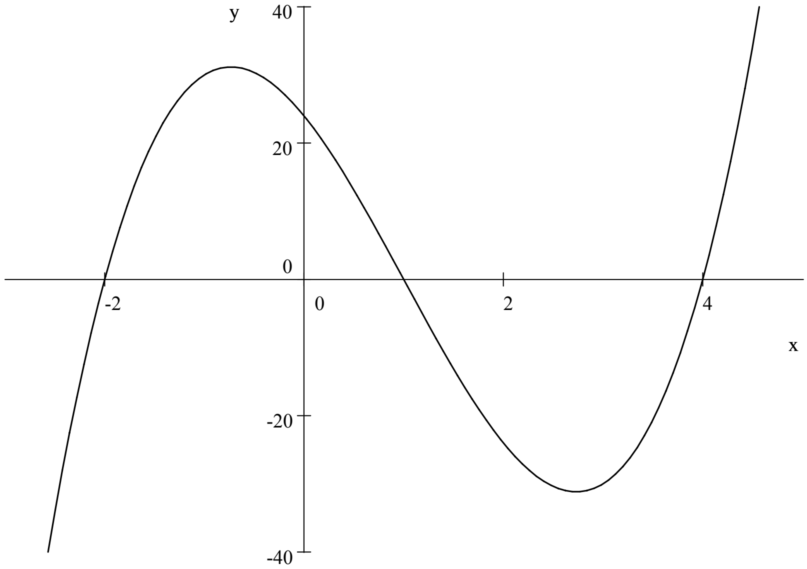
$3x^3 - 9x^2 - 18x + 24 = 0$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = -2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$f(x) = 3(x+2)(x-1)(x-4)$



e. $f(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

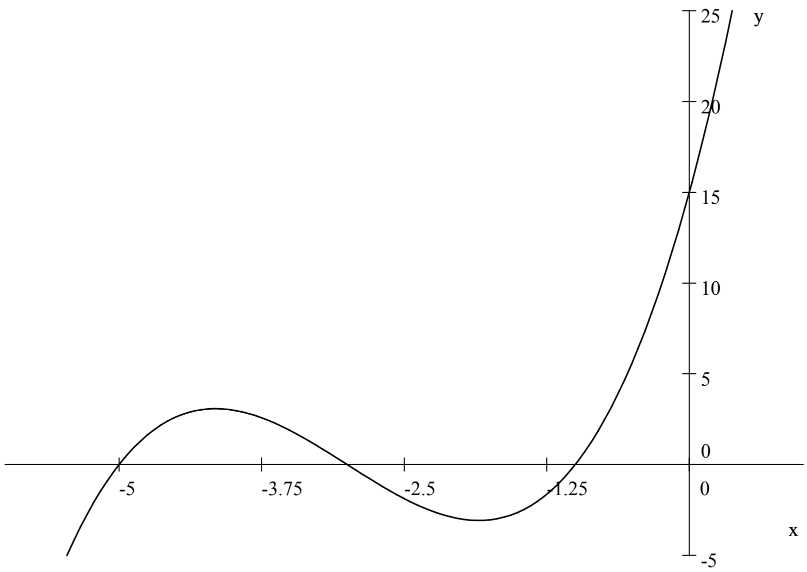
$x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = -5,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$f(x) = (x+5)(x+3)(x+1)$



f. $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4$

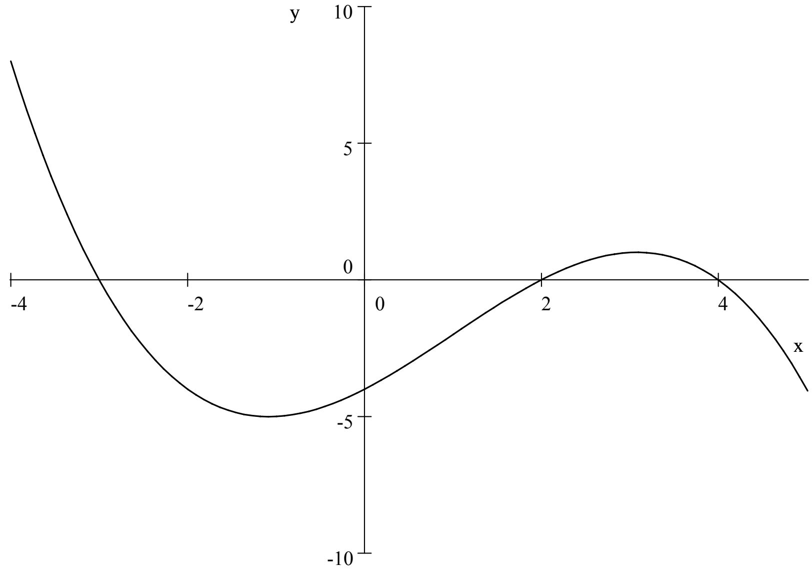
$-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4 = 0$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = -3,\ x_2 = 2,\ x_3 = 4$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$f(x) = -\frac{1}{6}(x+3)(x-2)(x-4)$



g. $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x$

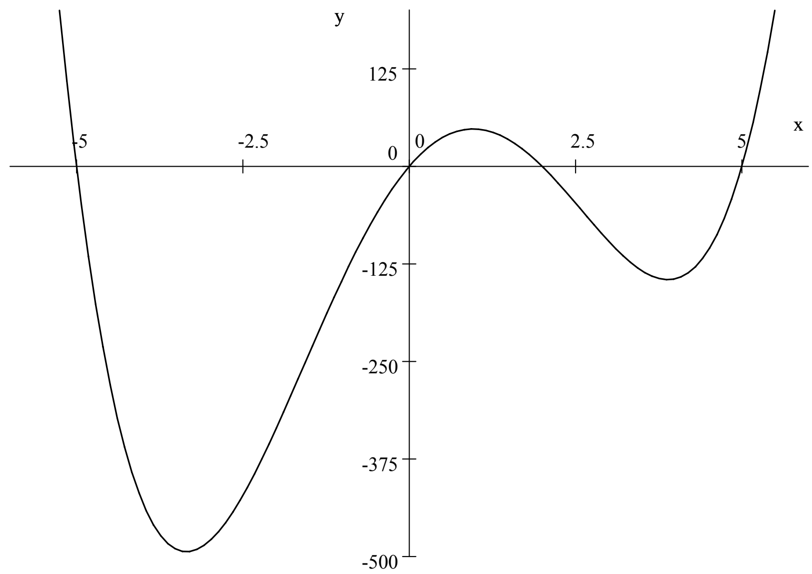
$2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x = 0$

Diese Gleichung hat die Lösungen

$x_1 = -5,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 5$

Die Linearfaktorzerlegung lautet

$f(x) = 2x(x+5)(x-2)(x-4)$



22. Lösung

a. $f(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(8-x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 8x$ Grad 3

Nullstellen

$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 8$

b. $f(x) = -2(x^2+1)(2+x)(x-2) = -2x^4 + 6x^2 + 8$ Grad 4

Nullstellen

$x_1 = -2,\ x_2 = 2$

c. $f(x) = 3x^2(x^2+4)(x-1) = 3x^5 - 3x^4 + 12x^3 - 12x^2$ Grad 5

Nullstellen

$x_{1,2} = 0,\ x_3 = 1$

23. Lösung

Der Definitionsbereich enthält alle $x \in \mathbb{R}$ bei denen der Nenner nicht Null wird.

Für die Untersuchung auf Symmetrie bestimmt man $f(-x)$ und vergleicht diesen Ausdruck mit $f(x)$.

Wenn $f(-x) = f(x)$, dann ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.

Wenn $f(-x) = -f(x)$, dann ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

a. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Definitionsbereich: $x^2 + 1 \neq 0$, erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = -\frac{x}{x^2+1} = -f(x)$$

punktsymmetrisch zum Ursprung

b. $f(x) = \dfrac{x+\frac{1}{x}}{x^3+x}$

Definitionsbereich: $x(x^2+1) \neq 0$, erfüllt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{(-x)+\frac{1}{(-x)}}{(-x)^3+(-x)} = \frac{-(x+\frac{1}{x})}{-(x^3+x)} = \frac{x+\frac{1}{x}}{x^3+x} = f(x)$$

achsensymmetrisch zur y-Achse

c. $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^2+x}$

Definitionsbereich: $x(x+1) \neq 0$, erfüllt für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

Symmetrie:

$$f(-x) = \frac{2(-x)^2+1}{(-x)^2+(-x)} = \frac{2x^2+1}{x^2-x} \neq \pm f(x)$$

keine der obigen Symmetrien