Aufgabe 1:

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x;\quad x \in \Re$

Eine Parabel zweiter Ordnung P_t mit $p_t(x) = -\frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$ geht durch die gemeinsamen Punkte von K_t mit der x-Achse und berührt K_t im Ursprung. Die beiden Schaubilder haben sonst keine weiteren Punkte gemeinsam. K_t teilt die von P_t und der x-Achse eingeschlossene Fläche. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Teilflächen?

Lösung:

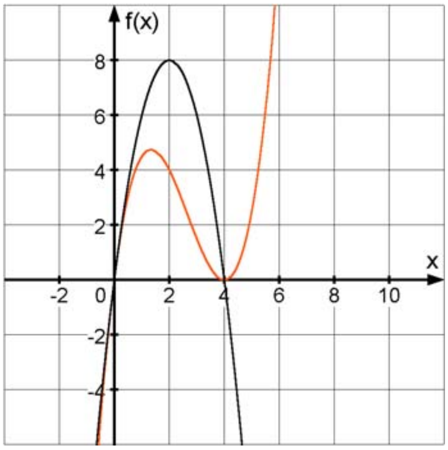
$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

$F_t(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{3}tx^3 + \frac{1}{4}t^2x^2$

$p_t(x) = -\frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

$P_t(x) = -\frac{1}{6}tx^3 + \frac{1}{4}t^2x^2$

Skizze für $t = 4$:



Berechnung der Teilflächen:

$$A_1 = \int_0^t p_t(x)dx = P_t(t) - P_t(0) = \frac{1}{12}t^4$$

$$A_2 = \int_0^t f_t(x)dx = F_t(t) - F_t(0) = \frac{1}{24}t^4$$

Verhältnis der Teilflächen:

$A_2 : A_1 = 1 : 2$

Aufgabe 2:

Das Schaubild C der Funktion $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$, die Koordinatenachsen und die Gerade $x = u$ mit $u > 0$ schließen eine Fläche ein. Berechne ihren Inhalt $A(u)$ und $\overline{A} = \lim\limits_{u\to\infty} A(u)$. Die ins Unendlich reichende Fläche des Inhalts $\overline{A}$ wird durch zwei zur y-Achse parallele Geraden $x = a$ und $x = b$ mit $a < b$ in drei gleich große Flächen zerlegt. Bestimme die Gleichung dieser beiden Geraden.

Lösung:

$f(x) = e^{-\frac{1}{2}x} > 0$

$F(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$

Berechnung des Flächeninhalts:

$$A(u) = \int_0^u e^{-\frac{1}{2}x}dx = F(u) - F(0) = -2e^{-\frac{1}{2}u} + 2$$

$$\overline{A} = \lim_{u\to\infty} A(u) = 2$$

Bestimmung der zur y-Achse parallelen Geraden:

$$A(a) = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad -2e^{-\frac{1}{2}a} + 2 = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad a = -\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \approx 0{,}21$$

$$A(b) = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad -2e^{-\frac{1}{2}a} + 2 = \frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad a = -\frac{1}{2}\ln\frac{1}{3} \approx 0{,}55$$

Aufgabe 3:
Bestimme den Flächeninhalt der Funktion $f_t(x) = tx^2 - 2t^2x, \text{mit } t \in \Re^+$ mit der x-Achse.

Lösung:
$f_t(x) = tx^2 - 2t^2x, \text{mit } t \in \Re^+$

$F_t(x) = \frac{1}{3}tx^3 - t^2x^2$

Bestimmung der Nullstellen (Integrationsgrenzen): $f_t(x) = 0$

$tx(x-2t) = 0$

$x_1 = 0$

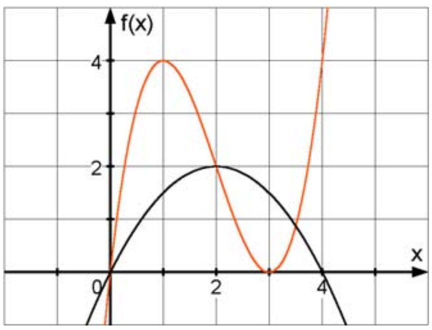
$x_2 = 2t$

Es handelt sich um eine nach oben geöffnete Parabel mit zwei Nullstellen, d.h. der Flächeninhalt liegt unterhalb der x-Achse und berechnet sich wie folgt:

$$A(t) = -\int_0^{2t} f_t(x) = -(F_t(2t) - F_t(0)) = \ldots = \frac{4}{3}t^4$$

Aufgabe 4:
Bestimme mit möglichst wenig Aufwand den Flächeninhalt zwischen den beiden Schaubildern der Funktionen $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ und $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$. Skizziere die beiden Funktionen.

Lösung:
Skizze:



<u>Bestimmung der Schnittpunkte:</u> $f(x) = g(x)$

$x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 7x = 0$

$x(x^2 - \frac{11}{2}x + 7) = 0$

$x_1 = 0$

$$x_{2,3} = \frac{\frac{11}{2} \pm \sqrt{\frac{121}{4} - \frac{112}{4}}}{2}$$

$d(x) = f(x) - g(x) = x^3 - \frac{11}{2}x^2 + 7x$

$D(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{11}{6}x^3 + \frac{7}{2}x^2$

Der Flächeninhalt berechnet sich:

$D(2) - D(0) - (D(\frac{7}{2}) - D(2)) = 2D(2) - D(\frac{7}{2}) - D(0) = \frac{937}{192}$