Aufgabe 1:
Es sei $f_t(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8t}{9}x^3 + 2t^2x^2$ mit $t > 0$ gegeben. Bestimme die Gleichung der Ortskurve aller Sattelpunkte.

Lösung:

$$f_t(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8t}{9}x^3 + 2t^2x^2 \text{ mit } t > 0$$
$$f_t'(x) = \frac{4}{9}x^3 - \frac{8t}{3}x^2 + 4t^2x$$
$$f_t''(x) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{16t}{3}x + 4t^2$$
$$f_t'''(x) = \frac{8}{3}x - \frac{16t}{3}$$

Für Sattelpunkte (Wendepunkt mit waagrechter Tangente) gilt: $f_t'(x) = 0 \wedge f_t''(x) = 0 \wedge f_t'''(x) \neq 0$

$$f_t''(x) = 0$$
$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{16t}{3}x + 4t^2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{\frac{16t}{3} \pm \sqrt{\frac{256}{9}t^2 - \frac{192}{9}t^2}}{\frac{8}{3}}$$
$$x_1 = 3t,\quad f_t'''(3t) = \frac{8}{3}t \neq 0,\quad f_t'(3t) = 0,\quad f_t(3t) = 3t^4 \quad \Rightarrow \quad S(3t/3t^4)$$
$$x_2 = t,\quad f_t'''(t) = -\frac{8}{3}t \neq 0,\quad f_t'(t) = \frac{16}{9}t^3,\quad f_t(t) = \frac{11}{9}t^4 \quad \Rightarrow \quad W(t/\tfrac{11}{9}t^4)$$

Somit ist der Sattelpunkt bei: $S(3t/3t^4)$
Bestimmung der Ortskurve des Sattelpunkts:

$$S(\underbrace{3t}_{x}/\underbrace{3t^4}_{y}) \text{ mit } t > 0$$
$$x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3} \text{ mit } x > 0$$
$$y = 3t^4 = \frac{1}{27}x^4 \text{ mit } x > 0$$

Aufgabe 2:

Es sei $f_t(x) = \frac{16tx}{(x^2+t^2)^2}$ mit $x \in \Re, t > 0$ gegeben. Zeige: $f_t''(x) = 192t\frac{x(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^4}$. Bestimme die Ortskurve aller Wendepunkte. (Auf die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt kann verzichtet werden.)

Lösung:

$$f_t(x) = 16t\frac{x}{(x^2+t^2)^2} \text{ mit } x \in \Re, t > 0$$

$$f_t'(x) = 16t\frac{-3x^2+t^2}{(x^2+t^2)^3}$$

$$f_t''(x) = 16t\frac{-6x(x^2+t^2)^3 - 3(x^2+t^2)^2 2x(-3x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^6} = 192t\frac{x(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^4}$$

Symmetrie: $f_t(-x) = -f_t(x)$ Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Bestimmung der Wendepunkte: $f_t''(x) = 0$

$$x(x^2-t^2) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow f_t(0) = 0 \Rightarrow W_1(0/0)$$

$$x_2 = t \Rightarrow f_t(t) = \tfrac{4}{t^2} \Rightarrow W_2(t/\tfrac{4}{t^2}) \text{ wegen Punktsymmetrie } W_3(-t/-\tfrac{4}{t^2})$$

Ortskurven der Wendepunkte:

$W_1(0/0)$ ist der Ursprung

$$W_2(\underbrace{t}_{x}/\underbrace{\tfrac{4}{t^2}}_{y}) \text{ mit } t > 0$$

$$x = t \text{ mit } x > 0$$

$$y = \tfrac{4}{t^2} = \tfrac{4}{x^2} \text{ mit } x > 0$$

$$W_3(\underbrace{-t}_{x}/\underbrace{-\tfrac{4}{t^2}}_{y}) \text{ mit } t > 0$$

$$x = -t \text{ mit } x < 0$$

$$y = -\tfrac{4}{t^2} = -\tfrac{4}{x^2} \text{ mit } x < 0$$

Zusammengefaßt liegen alle Wendepunkte auf der folgenden Ortskurve:

$$y = \begin{cases} -\frac{4}{x^2} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{4}{x^2} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 3:

Die Funktionen f_k sind gegeben durch $f_k(x) = kxe^{-k^2x^2}$ mit $x \in \Re$ und $k \in \Re^+$. Bestimme den Ort der Wendepunkte der Schaubilder aller f_k. (Auf die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt kann verzichtet werden.)

Lösung:

$$f_k(x) = kxe^{-k^2x^2} \text{ mit } x \in \Re \text{ und } k \in \Re^+$$

$$f_k'(x) = k(1-2k^2x^2)e^{-k^2x^2}$$

$$f_k''(x) = 2k^3x(2k^2x^2-3)e^{-k^2x^2}$$

Symmetrie: $f_k(-x) = -f_k(x)$ Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

Bestimmung der Wendepunkte: $f_k''(x) = 0$

$$x(2k^2x^2-3) = 0$$

$$x_1 = 0 \Rightarrow f_k(0) = 0 \Rightarrow W_1(0/0)$$

$$x_{2,3} = \pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k} \Rightarrow f_k\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k}\right) = \sqrt{\frac{3}{2e^3}} \Rightarrow W_2\left(\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k}/\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$$

wegen Punktsymmetrie $W_3\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k}/-\sqrt{\frac{3}{2e^3}}\right)$

Ortskurven der Wendepunkte:

$W_1(0/0)$ ist der Ursprung

$$W_2\left(\underbrace{\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k}}_{x}/\underbrace{\sqrt{\frac{3}{2e^3}}}_{y}\right) \text{ mit } k > 0 \qquad W_3\left(\underbrace{-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k}}_{x}/\underbrace{-\sqrt{\frac{3}{2e^3}}}_{y}\right) \text{ mit } k > 0$$

$$x = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k} \Rightarrow k = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{x} \quad \text{mit } x > 0 \qquad x = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{k} \Rightarrow k = -\sqrt{\tfrac{3}{2}}\cdot\tfrac{1}{x} \quad \text{mit } x < 0$$

$$y = \sqrt{\frac{3}{2e^3}} \text{ unabhängig von } k \text{ mit } x > 0 \qquad y = -\sqrt{\frac{3}{2e^3}} \text{ unabhängig von } k \text{ mit } x < 0$$

Zusammengefaßt liegen alle Wendepunkte auf der folgenden Ortskurve:

$$y = \begin{cases} -\sqrt{\frac{3}{2e^3}} & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \sqrt{\frac{3}{2e^3}} & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

Aufgabe 4:

Gegeben ist eine Funktion $f_t(x) = tx^2 + x, \text{mit } t \in \Re^+$. Ihr Schaubild sei K_t. Auf welcher Kurve liegen alle Tiefpunkte?

Lösung:

$$f_t(x) = tx^2 + x, \text{mit } t \in \Re^+$$

$$f_t'(x) = 2tx + 1$$

$$f_t''(x) = 2t > 0$$

Bestimmung des Tiefpunktes: $f_t'(x) = 0$

$$2tx + 1 = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{2t} \quad \Rightarrow \quad f_t(-\frac{1}{2t}) = -\frac{1}{4t} \quad \Rightarrow \quad T(-\frac{1}{2t} / -\frac{1}{4t})$$

Bestimmung der Ortskurve der Tiefpunkte:

$$T(\underbrace{-\frac{1}{2t}}_{x} / \underbrace{-\frac{1}{4t}}_{y}) \quad \text{mit} \quad t > 0$$

$$x = -\frac{1}{2t} \quad \Rightarrow \quad t = -\frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad x < 0$$

$$y = -\frac{1}{4t} = \frac{1}{4}x \quad \text{mit} \quad x < 0$$