

Aufgabe 1:

Es sei $f_t(x) = \frac{3}{x^2 + 3x + t}$ mit $x \in D_{f_t}$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Bestimme maximalen Definitionsbereich und alle möglichen Asymptoten (senkrechte und waagrechte). Für welche Werte von t existieren keine, eine oder zwei senkrechte Asymptoten?

Lösung:

Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs: Nennernullstellen müssen aus \mathbb{R} entfernt werden.

$$x^2 + 3x + t = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-4t} \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R} / \left\{ -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9-4t} \right\}$$

Untersuchung auf Asymptoten:

Da der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad ist die x -Achse waagrechte Asymptote.

Untersuchung auf möglich Pole:

Ist $9 - 4t < 0$, also $t > \frac{9}{4}$, so existieren keine Pole

Ist $9 - 4t = 0$, also $t = \frac{9}{4}$, so existiert ein Pol ohne Vorzeichenwechsel

Ist $9 - 4t > 0$, also $t < \frac{9}{4}$, so existieren zwei Pole mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe 2:

Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ sei eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = 10 \frac{x-1}{x^2 - tx + t}$ mit $x \in D_{f_t}$.

Ihr Schaubild sei K_t . Gib die größtmögliche Definitionsmenge D_{f_t} und damit die Anzahl der Pole in Abhängigkeit von t an.

Lösung:

Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs: Nennernullstellen müssen aus \mathbb{R} entfernt werden.

$$x^2 - tx + t = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - 4t} \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R} / \left\{ \frac{t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - 4t} \right\}$$

Untersuchung auf möglich Pole:

Ist $t^2 - 4t < 0$, also $0 < t < 4$, so existieren keine Pole

Ist $t^2 - 4t = 0$, also $t = 0 \vee t = 4$, so existiert ein Pol ohne Vorzeichenwechsel

Ist $t^2 - 4t > 0$, also $t < 0 \vee t > 4$, so existieren zwei Pole mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe 3:

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist durch $f_t(x) = \frac{x^2 - 4t^2}{x^2 - t^2}$ mit $x \in D_{f_t}$ eine Funktion f_t gegeben. Ihr Schaubild sei K_t .

Bestimme den umfassendsten Definitionsbereich D_{f_t} von der Funktion f_t . Untersuche K_t auf Asymptoten.

Lösung:

Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs: Nennernullstellen müssen aus \mathbb{R} entfernt werden.

$$x^2 - t^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm t \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R} / \{\pm t\}$$

Diese Nennernullstellen sind nicht gleichzeitig auch Zählernullstellen und sie treten jeweils einfach auf, darum sind an diesen Stellen Pole mit Vorzeichenwechsel.

Asymptoten:

Der Zählergrad ist gleich dem Nennergrad: $y = 1$ ist waagrechte Asymptote.

Aufgabe 4:

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ ist durch $f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{a + e^x}$; $x \in \mathbb{R}$ eine Funktion f_a gegeben. Ihr Schaubild sei K_a . Bestimme die Asymptoten.

Lösung:

Für die Bestimmung der Asymptoten gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a \cdot e^x}{a + e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{a}{\underbrace{a}_{\rightarrow 0} + 1} = a \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_a(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{a \cdot e^x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{a + e^x}_{\rightarrow 0}} = 0$$

Aufgabe 5:

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{e^x}{e^x - t}$; $x \in \mathbb{R} / \{\ln t\}$.

Untersuche das Schaubild K_t von f_t auf Asymptoten.

Lösung:

Für die Bestimmung der Asymptoten gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{1}{1 - \underbrace{\frac{t}{e^x}}_{\rightarrow 0}} = 1 \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{e^x - t}_{\rightarrow 0}} = 0$$

Aufgabe 6

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = t^2(x + \frac{1}{t})e^{-tx}; x \in \mathbb{R}$.

Untersuche das Schaubild K_t von f_t auf Asymptoten.

Lösung:

Für die Bestimmung der Asymptoten gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{t^2}_{>0} \underbrace{(x + \frac{1}{t})}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{e^{-tx}}_{\rightarrow 0} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_t(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{t^2}_{>0} \underbrace{(x + \frac{1}{t})}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{e^{-tx}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$$