Aufgabe 1:

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 + x^2 + \frac{3}{2}t$ mit $x \in \Re$.

Zeige: Für $t_1, t_2 \in \Re^+$ und $t_1 \neq t_2$ haben die zugehörigen Schaubilder keinen Punkt gemeinsam.

Lösung:

siehe Aufgabe 1 vom Thema „Nullstellen“

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (t - e^x)^2$ mit $t \in \Re$. Welche Bedingungen müssen t und t^* erfüllen, damit sich die zugehörigen Schaubilder schneiden? Welche Schaubilder schneiden sich auf der y-Achse? Gibt es Schaubilder, die sich auf der y-Achse orthogonal schneiden?

Lösung:

$$f_t(x) = t^2 - 2te^x + e^{2x}$$

$$f_t'(x) = -2te^x + 2e^{2x}$$

Wähle $t \neq t^* \Rightarrow t - t^* \neq 0$ und schneide die beiden Schaubilder, nachdem die Funktionsgleichung ausmultipliziert ist:

$$f_t(x) = f_{t^*}(x)$$

$$(t^2 - t^{*2}) - 2(t - t^*)e^x = 0$$

$$(t - t^*)(t + t^*) - 2(t - t^*)e^x = 0 \quad \Big| : (t - t^*)$$

$$e^x = \tfrac{1}{2}(t + t^*) \Rightarrow x = \ln\tfrac{1}{2}(t + t^*)$$

Dieser x-Wert existiert nur, wenn gilt: $t + t^* > 0$

Damit sich die Schaubilder auf der y-Achse schneiden, muß gelten: $x = 0$:

$$\ln\tfrac{1}{2}(t + t^*) = 0$$

$$t + t^* = 2$$

Damit sich die zugehörigen Schaubilder auf der y-Achse orthogonal schneiden muß zusätzlich gelten:

$$f_t(0) \cdot f_{t^*}(0) = -1$$

$$(-2t + 2)(-2t^* + 2) = -1$$

Mit der Voraussetzung $t + t^* = 2 \Rightarrow t^* = 2 - t$ folgt:

$$(-2t + 2)(-2(2 - t) + 2) = -1$$

$$(-2t + 2)(2t - 2) = -1$$

$$-(2t - 2)^2 = -1$$

$$2t - 2 = \pm 1$$

$$t_1 = \tfrac{3}{2} \Rightarrow t_1^* = \tfrac{1}{2}$$

$$t_2 = \tfrac{1}{2} \Rightarrow t_2^* = \tfrac{3}{2}$$

Für diese Werte von t und t^* schneiden sich die Schaubilder auf der y-Achse orthogonal.

Aufgabe 3:

Für jedes $t \in \Re \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x;\quad x \in \Re$

Welche Beziehung muß zwischen t_1 und t_2 $(t_1 \neq t_2)$ bestehen, damit sich die Kurven K_{t_1} und K_{t_2} im Ursprung berühren?

Lösung:

$$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x;\quad x \in \Re$$

$$f_t'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2$$

Damit sich die beiden Schaubilder im Ursprung berühren muß gelten:

$$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \wedge f_{t_1}'(0) = f_{t_2}'(0)$$

$$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \;\Rightarrow\; 0 = 0 \text{ dies ist immer erfüllt.}$$

$$f_{t_1}'(0) = f_{t_2}'(0) \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0$$

$$t_1 = t_2 \text{ oder } t_1 = -t_2$$

Aufgabe 4:

Es seien $f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x$ und $p_a(x) = ax^2 + \frac{7}{2}x$, mit $a \in \Re^+$ gegeben. Welche Parabel p_a berührt die Kurve von f ?

Lösung:

$$f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x$$

$$f'(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$p_a(x) = ax^2 + \frac{7}{2}x, \text{ mit } a \in \Re^+$$

$$p_a'(x) = 2ax + \frac{7}{2}$$

Damit sich die beiden Schaubilder berühren muß gelten: $f(x) = p_a(x) \wedge f'(x) = p_a'(x)$

$$f(x) = p_a(x)$$

$$-\frac{1}{32}x^3 - ax^2 - 2x = 0$$

$$x\underbrace{\left(-\frac{1}{32}x^2 - ax - 2\right)}_{=0} = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0$$

$$[1]\quad x^2 = -32ax - 64 = -\frac{96}{3}ax - \frac{192}{3}$$

$$f'(x) = p_a'(x)$$

$$-\frac{3}{32}x^2 - 2ax - 2 = 0$$

$$[2]\quad x^2 = -\frac{64}{3}ax - \frac{64}{3}$$

$x_1 = 0$ scheidet aus, weil dort die Steigungen nicht gleich sind.

Gleichsetzen der erhaltenen Gleichungen [1] und [2] liefert:

$$-\frac{96}{3}ax - \frac{192}{3} = -\frac{64}{3}ax - \frac{64}{3}$$

$$-\frac{32}{3}ax = \frac{128}{3}$$

$$x_2 = -\frac{4}{a}$$

Dieses Ergebnis eingesetzt in Gleichung [1] liefert:

$$(-\tfrac{4}{a})^2 = -32a(-\tfrac{4}{a}) - 64$$

$$a^2 = \tfrac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \tfrac{1}{2}, (a_2 = -\tfrac{1}{2}) \text{ wegen } a \in \Re^+ \Rightarrow x_2 = -8$$

$$p_{\frac{1}{2}}(-8) = 4$$

Für $a = \frac{1}{2}$ berühren sich die beiden Schaubilder f und $p_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $P(-8/4)$.

Aufgabe 5:

Es sei $f_t(x) = t\dfrac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ mit $x \in \Re \setminus \{1\}, t \in \Re^+$ gegeben. Welche Beziehung besteht zwischen t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$, wenn sich die zugehörigen Schaubilder im Ursprung rechtwinklig schneiden?

Lösung:

$$f_t(x) = t\frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2} \text{ mit } x \in \Re \setminus \{1\}, t \in \Re^+$$

$$f_t'(x) = -2t\frac{2x+1}{(x-1)^3}$$

Die Bedingungen für orthogonales Schneiden im Ursprung lauten:

$$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \wedge f_{t_1}'(0) \cdot f_{t_2}'(0) = -1$$

$$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 \text{ dies ist immer erfüllt.}$$

$$f_{t_1}'(0) \cdot f_{t_2}'(0) = -1$$

$$2t_1 \cdot 2t_2 = -1$$

$$t_1 \cdot t_2 = -\tfrac{1}{4}$$

Aufgabe 6:

Zeige: $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 5$ schneiden sich orthogonal.

Lösung:

$$f(x) = x^2 + 1 \qquad g(x) = -\tfrac{1}{15}x^2 + 5$$

$$f'(x) = 2x \qquad g'(x) = -\tfrac{2}{15}x$$

Die Bedingungen für orthogonales Schneiden lauten: $f(x) = g(x) \wedge f'(x) \cdot g'(x) = -1$

$$f(x) = g(x)$$

$$\tfrac{16}{15}x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 = \tfrac{15}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{15}$$

Beide Schaubilder sind achsensymmetrisch, deshalb genügt es in einem Punkt auf Orthogonalität zu untersuchen.

$$f'(\tfrac{1}{2}\sqrt{15}) \cdot g'(\tfrac{1}{2}\sqrt{15}) = -1$$

$$\sqrt{15} \cdot (-\tfrac{1}{15}\sqrt{15}) = -1$$

Dies ist eine wahre Aussage, also schneiden sich die Schaubilder orthogonal.

Aufgabe 7:

Zeige, daß alle Kurven mit $f_a(x) = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+1)x$, mit $a \in \Re$ zwei Punkte gemeinsam haben.

Lösung:

Wähle $a_1 \neq a_2 \quad \Rightarrow \quad a_1 - a_2 \neq 0$ und schneide die beiden Schaubilder:

$$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$$

$$\tfrac{1}{2}(a_1 - a_2)x^2 + (a_1 - a_2)x = 0 \quad \Big| : (a_1 - a_2) \neq 0$$

$$\tfrac{1}{2}x^2 + x = 0$$

$$x(\tfrac{1}{2}x + 1) = 0$$

$$x_1 = 0 \;\Rightarrow\; f_a(0) = 0 \;\Rightarrow\; P_1(0/0)$$

$$x_2 = -2 \;\Rightarrow\; f_a(-2) = -10 \;\Rightarrow\; P_2(-2/-10)$$