Aufgabe 1:
In einen Behälter fließt von oben Wasser hinein. Durch ein kleines Loch im Boden fließt gleichzeitig Wasser aus. Zum Zeitpunkt t in Sekunden befinden sich $g(t)$ Liter Wasser im Behälter. Dies wird mit der Gleichung $g(t) = 100 - 100e^{-\frac{1}{200}t}$ mit $t \geq 0$ beschrieben.

(a) Berechne den Anfangsbestand, d. h. der Bestand zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie den Bestand zu den Zeitpunkten $t_1 = 40\ \text{s}$ und $t_2 = 5\ \text{min}$. Zeige allgemein, daß die Wassermenge im Behälter streng monoton zunimmt. Um was für eine Wachstum handelt es sich hier? Begründe!
Welches Volumen muß der Behälter mindestens haben, damit kein Wasser überläuft? Begründe!
Wie lange dauert es, bis 95 % des Endbestandes erreicht werden?

(b) Nach welcher Zeit beträgt der Zuwachs der Wassermenge weniger als $0{,}001\frac{l}{s}$?
Zwischen g und g' besteht eine für alle $t \geq 0$ gültige Gleichung der Form: $g'(t) = a + b \cdot g(t)$
Berechne mithilfe der gegebenen Füllfunktion $g(t) = 100 - 100e^{-\frac{1}{200}t}$ mit $t \geq 0$ die Konstanten a und b.
Welche Bedeutung haben diese Konstanten für den Füllvorgang des Behälters? Begründe!

Lösung:

$$g(t) = 100 - 100e^{-\frac{1}{200}t} \quad \text{mit } t \geq 0$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{200}t} > 0 \;\Rightarrow\; \text{streng monoton wachsend}$$

$$g(t) = G - Ge^{-ct} \quad \text{mit } c > 0, t \geq 0$$

$$g'(t) = \underbrace{Gc}_{>0}\underbrace{e^{-ct}}_{>0} > 0 \;\Rightarrow\; \text{streng monoton wachsend}$$

In unserem Beispiel gilt: $G = 100, c = \frac{1}{200}$

Die erste Ableitung gibt den Zuwachs an, der bei der gewählten Funktion maximal $\frac{1}{2}$ beträgt.

(a) Der **Anfangsbestand**

$$g(0) = 0$$

Der Bestand nach 40s

$$g(40) = 18{,}13\text{l}$$

Der Bestand nach 5min bzw. 300s

$$g(300) = 77{,}69\text{l}$$

Es gilt:

$$g'(t) = k(G - g(t)) \text{ mit } G = 100, k = \frac{1}{2}$$

und somit handelt es sich um beschränktes Wachstum.
Der **Maximalwert** (Endbestand) beträgt

$\lim\limits_{t\to\infty} g(t) = G = 100\,\text{l}$ Das Fassungsvermögen sollte mindestens 100l sein.

95% des Endbestands sind 95l

$$g(t) = 95$$

$$100 - 100e^{-\frac{1}{200}t} = 95$$

$$e^{-\frac{1}{200}t} = 0{,}05$$

$$t = -200 \cdot \ln 0{,}05 \approx 599\text{s}$$

(b) Der Zuwachs soll geringer sein als $0{,}001\frac{l}{s}$

$$g'(t) < 0{,}001$$

$$\tfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{200}t} < 0{,}001$$

$$t > -200 \cdot \ln 0{,}002 \approx 1443\,s$$

Es soll gelten: $g'(t) = a + b \cdot g(t)$

$$Gce^{-ct} = a + b(G - Ge^{-ct}) = \underbrace{a + Gb}_{=0} \underbrace{- Gb}_{=Gc} e^{-ct} \quad \Rightarrow a = Gc,\ b = -c$$

Für unser Beispiel sind die Konstanten: $a = \frac{1}{2}$ und $b = -\frac{1}{200}$

Aufgabe 2:

Die von einer Schimmelpilzkultur in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) bedeckte Fläche (in cm^2) läßt sich durch eine Funktion A beschreiben mit $A(t)=\dfrac{ag}{a+(g-a)e^{-ct}}$ mit $t\in\Re, c>0$.

Zur Zeit $t=0$ sind $0{,}90$ cm^2 Fläche bedeckt, zur Zeit $t=3$ genau $8{,}50$ cm^2. Für sehr große t nähert sich der Inhalt der Fläche seinem Grenzwert 19 cm^2.

(a) Bestimme aus diesen Angaben die Parameter a, c und g auf zwei Dezimalen genau.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t^* betrug die Fläche 0,01 cm^2?

(c) Um welche Art von Wachstum handelt es sich hier? Gib **eine Art** von Differentialgleichung an, die dieses Wachstum beschreibt und erkläre die verwendeten Variablen.

Lösung:

$$A(t)=\frac{ag}{a+(g-a)e^{-ct}} \quad \text{mit } t\in\Re, c>0$$

$$A'(t)=agc\,\frac{(g-a)e^{-ct}}{(a+(g-a)e^{-ct})^2}$$

(a) Bestimmung der Parameter a, g, c:

$$A(0)=0{,}9 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{ag}{a+(g-a)}=0{,}9 \quad\Leftrightarrow\quad a=0{,}9 \text{ ist der } \textbf{Anfangswert}$$

$$\lim_{t\to\infty}A(t)=19 \quad\Leftrightarrow\quad g=19 \text{ ist der } \textbf{Grenzwert}$$

Mit diesen beiden Werten lautet die Funktionsgleichung: $A(t)=\dfrac{17{,}1}{0{,}9+18{,}1\cdot e^{-ct}}$

$$A(3)=8{,}5$$

$$\Leftrightarrow \frac{17{,}1}{0{,}9+18{,}1\cdot e^{-3c}}=8{,}5$$

$c=-\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{18{,}1}\left(\frac{17{,}1}{8{,}5}-0{,}9\right)\right)\approx 0{,}93$ ist die **Wachstumskonstante**

Die vollständige Funktionsgleichung lautet: $A(t)=\dfrac{17{,}1}{0{,}9+18{,}1\cdot e^{-0{,}93t}}$

(b) $A(t)=0{,}01$

$$\frac{17{,}1}{0{,}9+18{,}1\cdot e^{-0{,}93t^*}}=0{,}01$$

$$t^*=-\frac{1}{0{,}93}\ln\left(\frac{1}{18{,}1}\left(\frac{17{,}1}{0{,}01}-0{,}9\right)\right)\approx -4{,}9h$$

(c) Bei dieser Art von Wachstum gilt: $A'(t)=kA(t)\big(g-A(t)\big)$

Die allgemeine Gleichung eingesetzt ergibt:

$$agc\,\frac{(g-a)e^{-ct}}{(a+(g-a)e^{-ct})^2}=k\,\frac{ag}{a+(g-a)e^{-ct}}\left(g-\frac{ag}{a+(g-a)e^{-ct}}\right)$$

$$agc\,\frac{(g-a)e^{-ct}}{(a+(g-a)e^{-ct})^2}=k\,\frac{ag}{a+(g-a)e^{-ct}}\left(\frac{g(a+(g-a)e^{-ct})-ag}{a+(g-a)e^{-ct}}\right)$$

$$agc\,\frac{(g-a)e^{-ct}}{(a+(g-a)e^{-ct})^2}=kag^2\,\frac{(g-a)e^{-ct}}{(a+(g-a)e^{-ct})^2} \quad\Rightarrow\quad k=\tfrac{c}{g} \text{ für unser Beispiel } k\approx 0{,}049$$

Aufgabe 3:

Der Algenteppich eines Sees mit 10000 m^2 Wasseroberfläche beträgt zu Beobachtungsbeginn 95 m^2. Die Algenfläche nimmt täglich um 17 % zu.

(a) Bestimme die Gleichung für das Algenwachstum.
(b) Wie groß ist die Algenfläche nach 20 Tagen?
(c) Nach wievielen Tagen ist der See völlig mit Algen zugewuchert?
(d) Nach wievielen Tagen ist der Algenteppich 10-mal so groß wie zu Beobachtungsbeginn?
(e) Ab welchem Zeitpunkt ist der Algenzuwachs größer als 500 m^2?

Lösung:

(a) $f(t) = 95 \cdot (1{,}17)^t = 95 \cdot (e^{\ln 1{,}17})^t = 95 \cdot e^{0{,}157t}$ mit $t \geq 0$

$f'(t) = 14{,}915 \cdot e^{0{,}157t}$

(b) $f(20) = 95 \cdot (1{,}17)^{20} \approx 2195 \ m^2$

(c) $f(t) = 10000$

$95 \cdot e^{0{,}157t} = 10000$

$t = \frac{1}{0{,}157} \ln \frac{10000}{95} \approx 29{,}66$ Tage

(d) $f(t) = 950$

$95 \cdot e^{0{,}157t} = 950$

$t = \frac{1}{0{,}157} \ln 10 \approx 14{,}67$ Tage

(e) $f'(t) > 500$

$14{,}915 \cdot e^{0{,}157t} > 500$

$t > \frac{1}{0{,}157} \ln \frac{500}{14{,}915} \approx 22{,}37$ Tage

Aufgabe 4:
Bei der Abkühlung von warmem Wasser in einer Umgebung mit der Temperatur y_U wird die Wassertemperatur y_W (in Grad Celsius) zum Zeitpunkt t (in Minuten seit Beobachtungsbeginn) beschrieben durch $y_W(t) = y_U + a \cdot e^{-0{,}035t}$ mit $t \geq 0, a \in \Re$.
Warmes Wasser von 60 °C kühlt sich zunächst 15 Minuten lang bei der Zimmertemperatur 20 °C ab. Anschließend wir dieses Wasser in einen Kühlschrank mit 5 °C gestellt.
Wie lange dauert es, bis sich das Wasser von 60 °C auf 30 °C abgekühlt hat?
Nach welcher Zeit hätte man das Wasser in den Kühlschrank stellen müssen, damit es bereits nach 25 Minuten die Temperatur 30 °C hat?

Lösung:
Bei Zimmertemperatur $y_U = 20$ °C wird die Abkühlung beschrieben durch:

$$y_W(t) = 20 + a \cdot e^{-0{,}035t} \qquad y_W(0) = 60 \Rightarrow a = 40$$

$$y_W(t) = 20 + 40e^{-0{,}035t}$$

$$y_W(15) = 20 + 40e^{-0{,}035 \cdot 15} = 43{,}7\,°C$$

Bei der anschließenden Abkühlung im Kühlschrank $y_U = 5$ °C gilt:

$$y_W^*(t^*) = 5 + a^* \cdot e^{-0{,}035t^*} \qquad y_W^*(0) = 43{,}7 \Rightarrow a^* = 38{,}7$$

$$y_W^*(t^*) = 5 + 38{,}7 \cdot e^{-0{,}035t^*}$$

Die Zeit bis sich das Wasser im Kühlschrank von 43,7 °C auf 30 °C abgekühlt hat:

$$y_W^*(t^*) = 30$$

$$5 + 38{,}7 \cdot e^{-0{,}035t^*} = 30$$

$$t^* = \frac{\ln\frac{25}{38{,}7}}{-0{,}035} \approx 12{,}48$$

Die Gesamtzeit für das Abkühlen des Wassers von 60 °C auf 30 °C beträgt:

$$t = 15 + 12{,}48 = 27{,}48 \text{ Minuten}$$

Bei Zimmertemperatur $y_U = 20$ °C wird die Abkühlung beschrieben durch:

$$y_W(t) = 20 + 40e^{-0{,}035t}$$

Bei der anschließenden Abkühlung im Kühlschrank $y_U = 5$ °C gilt:

$$y_W^*(t^*) = 5 + a^* \cdot e^{-0{,}035t^*}$$

Das Wasser wird nach der Zeit $t = t_1$ in den Kühlschrank gestellt, somit muß gelten:

$$y_W^*(0) = y_W(t_1) \quad \Rightarrow \quad a^* = 15 + 40 \cdot e^{-0{,}035t_1}$$

hieraus ergibt sich die für die Abkühlung im Kühlschrank:
Bei der anschließenden Abkühlung im Kühlschrank $y_U = 5$ °C gilt:

$$y_W^*(t^*) = 5 + (15 + 40 \cdot e^{-0{,}035t_1}) \cdot e^{-0{,}035t^*} = 5 + 15e^{-0{,}035t^*} + 40e^{-0{,}035(t_1+t^*)}$$

Es sei nun t_1^* die Zeit, die das Wasser im Kühlschrank bleibt. Die Gesamtzeit der Abkühlung auf 30 °C soll 25 Minuten betragen, also $t_1 + t_1^* = 25$
Bei der anschließenden Abkühlung im Kühlschrank $y_U = 5$ °C gilt:

$$y_W^*(t_1^*) = 30 \Rightarrow 5 + 15e^{-0{,}035t_1^*} + 40e^{-0{,}035 \cdot 25} = 30 \Rightarrow t_1^* \approx 16{,}8$$

$$t_1 = 25 - 16{,}8 = 8{,}2$$

Man hätte das Wasser nach 8,2 Minuten in den Kühlschrank stellen müssen, damit es nach 25 Minuten auf 30 °C abgekühlt wird.

Aufgabe 5:

Das radioaktive Isotop des Kohlenstoffs ^{14}C zerfällt mit einer Halbwertszeit von $t_{\frac{1}{2}} = 5730$ Jahren. Für lebendige Organismen nehmen Kohlenstoff ^{12}C aus der Atmosphäre auf. (Das Verhältnis des stabilen ^{12}C und des radioaktiven Isotops ^{14}C in der Atmosphäre ist nahezu konstant.) Stirbt ein Organismus ab, so wird kein ^{14}C mehr aufgenommen, während das vorhandene weiterhin zerfällt. Die Gleichung $f(t) = a \cdot e^{-kt}$ mit $k > 0, t \in \Re$ beschreibt die Masse (in mg) der nach der Zeit t (in Jahren) noch vorhandenen ^{14}C-Atome.

(a) Bei Beobachtungsbeginn sind 2,3 mg des Isotops ^{14}C in einem zu untersuchenden Präparat enthalten. Wieviel mg ^{14}C sind nach 310 Jahren noch vorhanden? Wie viel mg ^{14}C sind nach 1300 Jahren zerfallen?

(b) Nach wie vielen Jahren sind noch 1,5 mg ^{14}C in dem Präparat enthalten?

(c) Wie alt ist das Präparat, wenn die 2,3 mg ^{14}C zu Beobachtungsbeginn gerade mal 37 % des ursprünglichen Gesamtgehalts an ^{14}C wären?

Lösung:

(a) Halbwertszeit $t_{\frac{1}{2}}$

$$f(t_{\frac{1}{2}}) = \tfrac{1}{2} f(0)$$

$$ae^{-kt_{\frac{1}{2}}} = \tfrac{1}{2} a$$

$$k = -\frac{\ln \frac{1}{2}}{t_{\frac{1}{2}}} \approx 0{,}00012$$

Der Anfangsbestand ist:

$$f(0) = 2{,}3$$

$$a = 2{,}3$$

Die Masse der zerfallenen ^{14}C-Atome wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$f(t) = 2{,}3 \cdot e^{-0{,}00012t}$$

Die Masse m_{310} der nach 310 Jahren noch **vorhandenen**:

$$m_{310} = f(310)$$

$$m_{310} = 2{,}3e^{-0{,}00012 \cdot 310} \approx 2{,}22 \text{ mg}$$

Die Masse m_{1300} der nach 1300 Jahren **bereits zerfallenen**:

$$m_{1300} = f(0) - f(1300) = 2{,}3(1 - e^{-0{,}00012 \cdot 1300}) \approx 0{,}33 \text{ mg}$$

(b) $f(t) = 1{,}5$

$$2{,}3e^{-0{,}00012 \cdot t} = 1{,}5$$

$$t = -\frac{1}{0{,}00012} \ln(\tfrac{1{,}5}{2{,}3}) \approx 3562 \text{ Jahre}$$

(c) 2,3 mg sind 37 % des Gesamtgehalts.

Es waren also zu Beginn $\frac{2{,}3}{37\%} = \frac{x}{100\%} \Rightarrow x = 2{,}3 \frac{100\%}{37\%} \approx 6{,}22$ mg

Die Gleichung hierfür lautet: $g(t) = 6{,}22e^{-0{,}00012 \cdot t}$

$g(t) = 2{,}3$

$6{,}22e^{-0{,}00012 \cdot t} = 2{,}3$

$t = -\frac{1}{0{,}00012} \ln \frac{2{,}3}{6{,}22} \approx 8290{,}5$ Jahre