Aufgabe

Für jedes $a \in \mathfrak{R}^+$ ist durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{a + e^x}; \quad x \in \mathfrak{R}$$

eine Funktion f_a gegeben. Ihr Schaubild sei K_a.

(a) Zeige, dass f_a streng monoton zunimmt. Bestimme die Asymptoten und den Wendepunkt W_a des Schaubilds K_a von f_a samt Steigung der Wendetangente. Zeichne K_4 für $-3 \le x \le 6$.

(b) Zeige, dass K_a punktsymmetrisch zum Wendepunkt W_a ist.

(c) Gegeben sei die Funktion F_a durch $F_a(x) = \int_0^x f_a(t)dt$ für $x \in \mathfrak{R}$ und $a \in \mathfrak{R}^+$.

Berechne $F_a(2\ln a)$ und $\lim_{x \to -\infty} F_a(x)$.

(d) Es gibt Kurven K_a, die die Gerade $y = 2$ schneiden. Bestimme die zugehörigen Abszissen (x-Werte) in Abhängigkeit von a. In welchem Bereich liegen die Abszissen der Schnittpunkte? Ermittle denjenigen Wert von a, für die diese Abszissen größer als $\ln 6$ sind.

(e) Gegeben sei die Funktion g_a durch $g_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{a + e^x}$ mit $a \in \mathfrak{R}^-$.

Bestimme die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge von g_a. Zeige, dass f_a und g_a Umkehrfunktionen $\bar{f}_a$ und $\bar{g}_a$ besitzen. Gib jeweils den Funktionsterm und die Definitionsmenge von $\bar{f}_a$ und $\bar{g}_a$ an.

Lösung

(a) Die Ableitungen der Funktion lauten:

$$f_a(x) = a\frac{e^x}{a + e^x} \quad \text{mit } x \in \mathfrak{R}, a > 0$$

$$f_a'(x) = a\frac{e^x(a + e^x) - e^x e^x}{(a + e^x)^2} = a^2 \frac{e^x}{(a + e^x)^2}$$

$$f_a''(x) = a^2 \frac{e^x(a + e^x)^2 - 2(a + e^x)e^x e^x}{(a + e^x)^4} = a^2 \frac{a - e^x}{(a + e^x)^3}$$

$$f_a'''(x) = a^2 \frac{-e^x(a + e^x)^3 - 3(a + e^x)^2 e^x (a - e^x)}{(a + e^x)^6} = 2a^2 \frac{e^x(e^x - 2a)}{(a + e^x)^4}$$

Untersuchung auf streng monoton wachsend: $f_a'(x) > 0$

$$\overbrace{a^2}^{>0} \frac{\overbrace{e^x}^{>0}}{\underbrace{(a + e^x)^2}_{>0}} > 0 \text{ für alle } x \in \mathfrak{R}$$

Bestimmung der Asymptoten:

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} a\frac{e^x}{a+e^x} = \lim_{x\to+\infty} a\frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1}{(\frac{a}{e^x}+1)} = \lim_{x\to+\infty} a\frac{1}{(\underbrace{\frac{a}{e^x}}_{\to 0}+1)} = a^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty} a\frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{a+\underbrace{e^x}_{\to 0}} = 0^+$$

Bestimmung des Wendepunktes:
notwendige Bedingung: $f''_a(x) = 0$

$$\Leftrightarrow a - e^x = 0$$

$$x_1 = \ln a$$

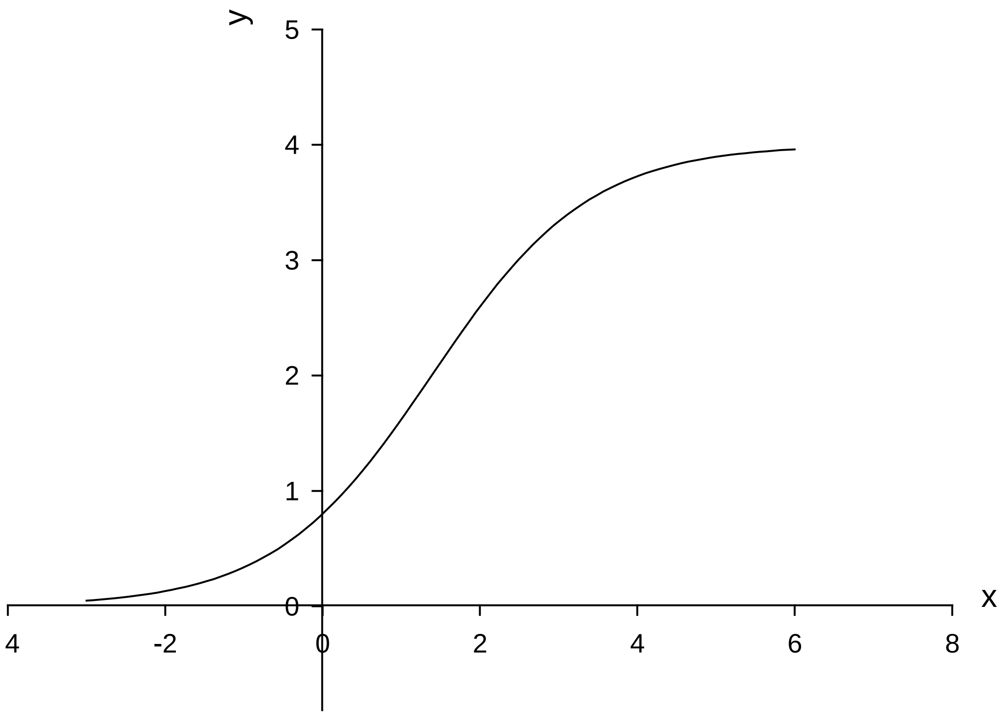
hinreichende Bedingung:

$$f'''_a(x_1) = f'''_a(\ln a) = 2a^2\,\frac{a(a-2a)}{(a+a)^4} = -\tfrac{1}{8} \neq 0$$

$$f_a(x_1) = f_a(\ln a) = a\frac{a}{a+a} = \tfrac{a}{2}$$

$$f'_a(x_1) = f'_a(\ln a) = a^2\,\frac{a}{(a+a)^2} = \tfrac{a}{4}$$

Wir erhalten einen Wendepunkt $W(\ln a / \tfrac{a}{2}; \tfrac{a}{4})$.



(b) Punktsymmetrie zum Wendepunkt $W(\ln a / \frac{a}{2}; \frac{a}{4})$:

$$\tfrac{1}{2}(f_a(\ln a - h) + f_a(\ln a + h)) = \tfrac{a}{2} \Leftrightarrow f_a(\ln a - h) + f_a(\ln a + h) = a$$

eingesetzt erhält man:

$$a\frac{e^{\ln a - h}}{a + e^{\ln a - h}} + a\frac{e^{\ln a + h}}{a + e^{\ln a + h}} = a \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{e^{\ln a}}{e^h}}{a + \frac{e^{\ln a}}{e^h}} + \frac{e^{\ln a}e^h}{a + e^{\ln a}e^h} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{a}{e^h}}{a + \frac{a}{e^h}} + \frac{ae^h}{a + ae^h} = 1$$

$$\frac{1}{e^h + 1} + \frac{e^h}{1 + e^h} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 + e^h}{1 + e^h} = 1 \text{ q.e.d.}$$

Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Wendepunkt.

(c) Berechnung des Integrals:

$$F_a(x) = \int_0^x f_a(t)dt = a\Big[\ln\left|a + e^t\right|\Big]_0^x = a(\ln\left|a + e^x\right| - \ln\left|a + 1\right|) = a\ln\left|\frac{a + e^x}{a + 1}\right|$$

$$F_a(2\ln a) = F_a(\ln a^2) = a\ln\left|\frac{a + a^2}{a + 1}\right| = a\ln\left|\frac{a(1 + a)}{a + 1}\right| = a\ln a$$

$$\lim_{x \to -\infty} a\ln\left|\frac{a + \overbrace{e^x}^{\to 0}}{a + 1}\right| = a\ln\left|\tfrac{a}{a+1}\right|$$

(d) Bestimmung der Schnittpunkte:

$$a\frac{e^x}{a + e^x} = 2 \;\Leftrightarrow\; ae^x = 2a + 2e^x \;\Leftrightarrow\; e^x(a - 2) = 2a$$

$$x = \ln\tfrac{2a}{a-2}$$

Dies hat nur Lösungen, wenn das Argument des Logarithmus positiv ist, also wenn gilt:

$$\tfrac{2a}{a-2} > 0$$

Ein Bruch ist positiv, wenn:
i) Zähler positiv ist und Nenner positiv ist:

$$2a > 0 \;\wedge a - 2 > 0$$
$$a > 0 \;\wedge a > 2$$
$$L = \left\{a \in \Re^+ \middle| a > 2\right\}$$

oder wenn
ii) Zähler negativ ist und Nenner negativ ist:

$$2a < 0 \;\wedge a - 2 < 0$$
$$a < 0 \;\wedge a < 2$$

$L = \left\{a \in \Re^+ \middle| a < 0\right\}$ dies ist ein Widerspruch zur Definitionsmenge von a

$$L = \{\;\}$$

Also für alle $a > 2$ existieren solche Schnittpunkte.
Für $a > 2$ soll gelten:

$$\ln\tfrac{2a}{a-2} > \ln 6 \;\Leftrightarrow\; \tfrac{2a}{a-2} > 6 \;\Leftrightarrow\; 2a > 6a - 12 \;\Leftrightarrow\; a < 3$$

Also sind die Abszissen größer als $\ln 6$ für $2 < a < 3$

(e) Bestimmung der Definitionsmenge und Wertemenge von g_a:

$$g_a(x) = a\frac{e^x}{a+e^x} \text{ mit } a<0 \text{ und } x \in \Re \setminus \{\ln(-a)\}$$

$$g'_a(x) = a^2\frac{e^x}{(a+e^x)^2} > 0, \text{ streng monoton wachsend, siehe Teil a)}$$

Für den Definitonsbereich darf der Nenner nicht null werden:

$$a+e^x = 0 \Leftrightarrow x = \ln(-a) \Rightarrow D_{g_a} = \Re \setminus \{\ln(-a)\}$$

Für den Wertebereich untersuchen wir die Ordinaten (y-Werte) der streng monoton wachsenden Funktion g_a an ihren Grenzen und Definitionslücken:

$$\lim_{x\to-\infty} a\frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{a+\underbrace{e^x}_{\to 0}} = 0^+ \qquad \lim_{x\to+\infty} a\frac{e^x}{e^x}\frac{1}{\underbrace{\frac{a}{e^x}}_{\to 0}+1} = a^-$$

$$\lim_{x\to\ln(-a)^-} \overbrace{a}^{<0}\frac{\overbrace{e^x}^{<0}}{\underbrace{a+e^x}_{<0}} \to -\infty \qquad \lim_{x\to\ln(-a)^+} \overbrace{a}^{<0}\frac{\overbrace{e^x}^{<0}}{\underbrace{a+e^x}_{<0}} \to +\infty$$

Die streng monoton wachsende Funktion g_a hat also folgende Wertemenge:

$$W_{g_a} = \{y \in \Re | y>0 \vee y<a\} \text{ mit } a<0$$

Laut Teil (a) ist somit die Wertemenge für die Funktion f_a:

$$W_{f_a} = \{y \in \Re | 0<y<a\} \text{ mit } a>0$$

Die Umkehrfunktionen existieren jeweils, weil die Funktionen streng monoton sind.
Die Wertemenge einer Funktion ist gleich der Definitionsmenge seiner Umkehrfunktion.

$$D_{\bar{g}_a} = \{x \in \Re | x>0 \vee x<a\} \text{ mit } a<0$$

$$D_{\bar{f}_a} = \{x \in \Re | 0<x<a\} \text{ mit } a>0$$

Umkehrfunktion zu f_a:

$$x = \frac{ae^y}{a+e^y} \text{ mit } a>0 \Leftrightarrow ax+xe^y = ae^y \Leftrightarrow ax = e^y(a-x)$$

$$y = \bar{f}_a(x) = \ln\frac{ax}{a-x}$$

Umkehrfunktion zu g_a:

$$x = \frac{ae^y}{a+e^y} \text{ mit } a<0 \Leftrightarrow ax+xe^y = ae^y \Leftrightarrow ax = e^y(a-x)$$

$$y = \bar{g}_a(x) = \ln\frac{ax}{a-x}$$