**Aufgabe 1**

Es sei $f_t(x)=\frac{t-2}{t^2}(2x^3-3tx^2)+1$ mit $x\in\Re, t\in\Re\setminus\{0;2\}$ gegeben. Bestimme die Extremwerte und den Wendepunkt. Für welche Werte von t ist der allen $f_t$ gemeinsame Extremwert ein Tiefpunkt? Bestimme die Ortskurve des von t abhängigen Extremwerts.

**Lösung:**

$$f_t(x)=\tfrac{t-2}{t^2}(2x^3-3tx^2)+1 \text{ mit } x\in\Re \text{ und } t\in\Re\setminus\{0;2\}$$

$$f_t'(x)=\tfrac{t-2}{t^2}(6x^2-6tx)=6\tfrac{t-2}{t^2}x(x-t)$$

$$f_t''(x)=\tfrac{t-2}{t^2}(12x-6t)=12\tfrac{t-2}{t^2}(x-\tfrac{1}{2}t)$$

$$f_t'''(x)=12\tfrac{t-2}{t^2}\neq 0$$

Bestimmung der Extremwerte:
notwendige Bedingung: $f_t'(x)=0$

$$\Leftrightarrow 6\tfrac{t-2}{t^2}x(x-t)=0$$

$$x_1=0, x_2=t$$

hinreichende Bedingung:

$$f_t''(x_1)=f_t''(0)=-6\tfrac{t-2}{t}\neq 0$$

$$f_t''(x_2)=f_t''(t)=6\tfrac{t-2}{t}\neq 0$$

Die hinreichende Bedingung ist für beide Waagepunkte von null verschieden, d. h. dort sind Extremwerte. Der allen Schaubildern gemeinsame Extremwert ist $x_1=0$, weil er nicht vom Parameter t abhängt. Dieser soll nach Aufgabenstellung ein Tiefpunkt sein:
Die zweite Ableitung an dieser Stelle muß positiv sein: $-6\frac{t-2}{t}>0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t-2}{t}<0$

Merke:
Ein Bruch $\frac{t-2}{t}<0$ ist negativ, wenn

i) der Zähler positiv und der Nenner negativ oder

$$t-2>0\wedge t<0$$

$$t>2\wedge t<0$$

$$L=\{\ \}$$

ii) der Zähler negativ und der Nenner positiv ist.

$$t-2<0\wedge t>0$$

$$t<2\wedge t>0$$

$$L=\{t\in\Re\setminus\{0;2\}\mid 0<t<2\}$$

Bestimmung der Ortskurve:
Zur Ortskurve des von t abhängigen Extremwertes benötigt man seinen Funktionswert:

$$f_t(x_2)=f_t(t)=-t(t-2)+1=-t^2+2t+1$$

$$E(\underbrace{t}_{x}/\underbrace{-t^2+2t+1}_{y})$$

$$x=t \text{ mit } t\neq 0, t\neq 2 \Rightarrow x\neq 0, x\neq 2$$

$$y=-t^2+2t+1$$

x-Koordinate mit bereits bestimmtem Definitionsbereich für x in die y-Koordinate des Extremwertes einsetzen.
Ortskurve:

$$y = -x^2 + 2x + 1 \text{ mit } x \neq 0, x \neq 2$$

Bestimmung des Wendepunktes:
notwendige Bedingung: $f_t''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \; 12\tfrac{t-2}{t^2}(x - \tfrac{1}{2}t) = 0$$

$$x_3 = \tfrac{t}{2}$$

hinreichende Bedingung ist erfüllt (s. dritte Ableitung)

$$f_t(x_3) = f_t(\tfrac{t}{2}) = -\tfrac{1}{2}t(t-2) + 1 = -\tfrac{1}{2}t^2 + t + 1$$

$$W(\tfrac{t}{2} / -\tfrac{1}{2}t^2 + t + 1)$$

**Aufgabe 2:**

Es sei $f_t(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8t}{9}x^3 + 2t^2x^2$ mit $t \in \Re \setminus \{0\}$ gegeben. Untersuche die Funktion auf Extrem- und Wendepunkte. Zeichne $f_1$. Welche Funktionen $f_t$ haben genau einen Sattelpunkt? Bestimme die Gleichung der Ortskurve aller Sattelpunkte.

**Lösung:**

$$f_t(x) = \tfrac{1}{9}x^4 - \tfrac{8t}{9}x^3 + 2t^2x^2 \quad \text{mit } x \in \Re \text{ und } t \in \Re \setminus \{0\}$$

$$f_t'(x) = \tfrac{4}{9}x^3 - \tfrac{8t}{3}x^2 + 4t^2x = \tfrac{4}{9}x(x-3t)^2$$

$$f_t''(x) = \tfrac{4}{3}x^2 - \tfrac{16t}{3}x + 4t^2 = \tfrac{4}{3}(x-t)(x-3t)$$

$$f_t'''(x) = \tfrac{8}{3}x - \tfrac{16t}{3}$$

Bestimmung der Extremwerte:
notwendige Bedingung: $f_t'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \; \tfrac{4}{9}x(x-3t) = 0$$

$$x_1 = 0, \; x_2 = 3t$$

$$f_t(x_1) = f_t(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad TP(0/0)$$

$$f_t(x_2) = f_t(3t) = 3t^4$$

hinreichende Bedingung:

$$f_t''(x_1) = f_t''(0) = 4t^2 > 0, \text{ Tiefpunkt}$$

$$f_t''(x_2) = f_t''(3t) = 0, \text{ kein Extremwert}$$

Bestimmung der Wendepunkte:
notwendige Bedingung: $f''{}_t(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \; \tfrac{4}{3}(x-t)(x-3t) = 0$$

$$x_3 = t, \; x_4 = x_2 = 3t$$

hinreichende Bedingung:

$$f_t'''(x_3) = f_t'''(t) = -\tfrac{8t}{3} \neq 0, \text{ Wendepunkt}$$

$$f_t'''(x_4) = f_t'''(3t) = \tfrac{8t}{3} \neq 0, \text{ Wendepunkt}$$

$f_t(x_3) = f_t(t) = \frac{11}{9}t^4 \quad \Rightarrow \quad WP(t\,/\,\frac{11}{9}t^4)$

$f_t(x_2) = f_t(3t) = 3t^4 \quad \Rightarrow \quad WP(3t\,/\,3t^4)$

$f_t'(x_3) = f_t'(t) = \frac{16}{9}t^3 \neq 0 \quad \Rightarrow$ kein Sattelpunkt

$f_t'(x_2) = f_t'(3t) = 0 \quad \Rightarrow$ Sattelpunkt $WP(3t\,/\,3t^4;0)$

Jede der Funktionen $f_t$ hat genau einen Sattelpunkt.

Bestimmung der Ortskurve aller Sattelpunkte $WP(3t\,/\,3t^4)$:

$x = 3t,\;$ mit $t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{3},\;$ mit $x \neq 0$

$y = 3t^4$

$\Rightarrow \quad y = 3(\frac{x}{3})^4 = \frac{1}{27}x^4,\;$ mit $x \neq 0$