Aufgabe:

Zu jedem $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{2x^2 - 4a}{x^2 - a}$ mit $x \in \Re / \{\pm\sqrt{a}\}$, ihr Schaubild sei K_a. Untersuche K_a auf Symmetrie, Asymptoten, Schnittpunkte mit den Achsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Lösung:

Berechnung der Ableitungen und Zerlegung in Linearfaktoren.

$$f_a(x) = \frac{2x^2 - 4a}{x^2 - a} = 2\frac{(x+\sqrt{2a})(x-\sqrt{2a})}{(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})}$$

$$f_a'(x) = \frac{4x(x^2-a) - 2x(2x^2-4a)}{(x^2-a)^2} = 4a\frac{x}{(x^2-a)^2}$$

$$f_a''(x) = 4a\frac{(x^2-a)^2 - 2(x^2-a)2x \cdot x}{(x^2-a)^4} = -4a\frac{3x^2+a}{(x^2-a)^3},$$

keine Wendepunkte $\Rightarrow$ keine dritte Ableitung

Symmetrie:

Der Zähler ist eine gerade Funktion und der Nenner ist eine gerade Funktion daraus folgt, daß die gesamte Funktion gerade ist. Somit ist leicht zu zeigen: $f_a(-x) = f_a(x)$

Schaubild ist achsensymmetrisch bezüglich y-Achse.

Asymptoten:

Verhalten gegen $|x| \to \infty$:

$$\lim_{|x|\to\infty} f_a(x) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{2x^2 - 4a}{x^2 - a} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{x^2(2 - \overbrace{\tfrac{4a}{x^2}}^{\to 0})}{x^2(1 - \underbrace{\tfrac{a}{x^2}}_{\to 0})} = 2,$$

somit ist $y = 2$ waagrechte Asymptote.

Verhalten an den Nennernullstellen $x_1 = \sqrt{a}$ und $x_2 = -\sqrt{a}$. Die Funktion ist vollständig gekürzt und man sieht leicht, daß es keine hebbaren Stetigkeitslücken gibt. Die Nennernullstellen sind beide erster (also ungerader) Ordnung, was jeweils einen Pol mit VZW liefert.

$$\lim_{x\to\sqrt{a}^-} \overbrace{2}^{>0} \frac{\overbrace{(x+\sqrt{2a})}^{>0}\overbrace{(x-\sqrt{2a})}^{<0}}{\underbrace{(x+\sqrt{a})}_{>0}\underbrace{(x-\sqrt{a})}_{<0}} \to +\infty,$$

also an der Stelle $x_1 = \sqrt{a}$ ist ein Pol mit VZW von $+ \to -$

Wegen Achsensymmetrie ist an der Stelle $x_2 = -\sqrt{a}$ ein Pol mit VZW von $- \to +$.

Schnittpunkte mit den Achsen:

Schnittpunkt mit der y-Achse:

Bedingung: $x = 0$

$$f_a(0) = 4 \Rightarrow S_y(0/4)$$

Nullstellen:
Bedingung: $f_a(x) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 4a = 0 \Rightarrow x_{3/4} = \pm\sqrt{2a}$, beide Nullstellen sind erster (also ungerader) Ordnung

$\Rightarrow$ reelle Schnittpunkte mit der x - Achse : $N_{3/4}(\pm\sqrt{2a}\,/\,0)$

Hoch- und Tiefpunkte:
notwendige Bedingung: $f_a'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x = 0 \;\Rightarrow x_5 = 0$$

1. Möglichkeit der hinreichenden Bedingung über zweite Ableitung:

$$f_a''(x_5) = f_a''(0) = \frac{4}{a} > 0 \qquad \text{TP}(0/4)$$

2. Möglichkeit der hinreichenden Bedingung über VZW der ersten Ableitung:

$$f_a'(x) = 4a\frac{x}{(x^2-a)^2}$$

Die Zählernullstelle ist erster (also ungerader) Ordnung, somit macht die erste Ableitung an der Stelle $x_5 = 0$ einen VZW.

$$\lim_{x\to 0^-} = \overbrace{4a}^{>0}\frac{\overbrace{x}^{<0}}{\underbrace{(x^2-a)^2}_{>0}} < 0,$$

also ein VZW von $- \to +$ der ersten Ableitung an der Stelle $x_5 = 0$, also ist dort ein Tiefpunkt.

Zusatzaufgabe:
Zeige, daß der Tiefpunkt einziger Punkt ist, den alle Schaubilder K_a gemeinsam haben.

Lösung:
Wähle $a_1 \neq a_2$, so daß $a_1 - a_2 \neq 0$
Bedingung für gemeinsame Punkte: $f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^2-4a_1}{x^2-a_1} = \frac{2x^2-4a_2}{x^2-a_2}$$

$$\Leftrightarrow (2x^2-4a_1)(x^2-a_2) = (2x^2-4a_2)(x^2-a_1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^4 - 2a_2x^2 - 4a_1x^2 + 4a_1a_2 = 2x^4 - 2a_1x^2 - 4a_2x^2 + 4a_1a_2$$

$$\Leftrightarrow x^2(-2a_2 + 2a_1 - 4a_1 + 4a_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2(a_2 - a_1) = 0$$

$$\Rightarrow \; x_{1/2} = 0$$

Somit ist der Tiefpunkt einziger gemeinsamer Punkt aller Schaubilder.