Aufgabe:

Untersuche die Funktion $f(x)=\ln\frac{x+1}{x^2}$, mit $x\in D_f$ auf Definitionsbereich, Symmetrie, Asymptoten, Nullstellen, Extrema und Wendepunkte. Skizziere sie.

Lösung:
Berechnung der Ableitungen:

$$f(x)=\ln\frac{x+1}{x^2}=\ln(x+1)-\ln(x^2)=\ln(x+1)-2\ln x$$

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}=-\frac{x+2}{x^2+x}=-\frac{x+2}{x(x+1)}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2+4x+2}{x^2(x+1)^2}=\frac{(x+2-\sqrt{2})(x+2+\sqrt{2})}{x^2(x+1)^2}$$

Definitionsbereich:

$$\frac{x+1}{x^2}>0 \;\Leftrightarrow\; x>-1\wedge x\neq 0 \;\Rightarrow\; D_f=\{x\in\Re \mid x>-1\wedge x\neq 0\}$$

Die Ränder sind also: -1, $+\infty$

Symmetrie:

$f(-x)=\ln\frac{-x+1}{(-x)^2}=\ln\frac{-x+1}{x^2}\neq\pm f(x)$, also keine der bekannten Symmetrie.

Asymptoten:
Verhalten an den Definitionsrändern:
Verhalten für $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\ln\underbrace{\frac{x+1}{x^2}}_{\to 0^+}\to-\infty$$

Verhalten für $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\lim_{x\to-1^+}\ln\underbrace{\frac{x+1}{x^2}}_{\to 0^+}\to-\infty$$

Verhalten an der Definitionslücke und Nennernullstelle $x_1=0$. Dies ist eine Nennernullstelle zweiter (also gerader) Ordnung, was einen Pol **ohne** VZW liefert.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\ln\underbrace{\frac{x+1}{x^2}}_{\to+\infty}\to+\infty,$$

also ist an der Stelle $x_1=0$ ein Pol **ohne** VZW von $+\to+$.

Nullstellen:
Bedingung: $f(x)=0$

$$\Leftrightarrow \ln\frac{x+1}{x^2}=0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{x^2}=1 \Leftrightarrow \;\Leftrightarrow x^2-x-1=0$$

$$x_2=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2},\ x_3=\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2} \;\Rightarrow N_1(\tfrac{1}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}/0),\ N_2(\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}/0)$$

Hoch- und Tiefpunkte:
notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$$\Leftrightarrow x+2=0 \;\Rightarrow x_4=-2\notin D_f\text{, also kein Extremwert}$$

Wendepunkte:
notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

$$\Leftrightarrow x^2+4x+2=0 \;\Rightarrow x_5=-2-\sqrt{2}\notin D_f\text{, also kein Wendepunkt}$$

$$\Rightarrow x_6=-2+\sqrt{2}$$

hinreichende Bedingung über VZW der zweiten Ableitung:
Die Stelle $x_6=-2+\sqrt{2}$ ist eine Nullstelle erster (also ungerader) Ordnung der zweiten Ableitung, demnach liegt ein VZW vor.

$$\lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} f''(x)=\lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-}\frac{\overbrace{(x+2-\sqrt{2})}^{<0}\overbrace{(x+2+\sqrt{2})}^{>0}}{\underbrace{x^2(x+1)^2}_{>0}}<0$$

Die zweite Ableitung macht an der Stelle $x_6=-2+\sqrt{2}$ einen VZW von $-\to+$, also einen Übergang von einer Rechts- in eine Linkskurve, demnach liegt dort ein Wendepunkt.

$$f(x_6)=f(-2+\sqrt{2})=\ln\frac{-1+\sqrt{2}}{(-2+\sqrt{2})^2}=\ldots=\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}188 \;\Rightarrow\; WP(-2+\sqrt{2}/\ln\tfrac{1+\sqrt{2}}{2})$$