Aufgabe:
Untersuche die Funktion $f(x) = 3\sin(2x - \frac{\pi}{2})$ auf Schnittpunkte mit den Achsen, Extrema und Wendepunkte im Bereich $[0;\pi]$.

Lösung:

$$f(x) = 3\sin(2x - \tfrac{\pi}{2}) = 3\sin(2(x - \tfrac{\pi}{4}))$$

Amplitude: $a = 3$

Periode: $p = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Verschiebung in x-Richtung: $c = -\frac{\pi}{4}$ also um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts.

keine Verschiebung in y-Richtung.

Berechnung der Ableitungen:

$$f'(x) = 6\cos(2x - \tfrac{\pi}{2})$$

$$f''(x) = -12\sin(2x - \tfrac{\pi}{2}) = -4 \cdot f(x) \Rightarrow \text{ Alle Nullstellen sind mögliche Wendepunkte!}$$

$$f'''(x) = -24\cos(2x - \tfrac{\pi}{2}) = -4 \cdot f'(x)$$

Schnittpunkte mit den Achsen:
Schnittpunkt mit der y-Achse:
Bedingung: $x = 0$

$$f(0) = -3 \Rightarrow S_y(0/-3)$$

Nullstellen:
Bedingung: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \tfrac{\pi}{2} = k\pi, \text{ mit } k \in Z$$

$$\Rightarrow x_k = (2k+1)\tfrac{\pi}{4}$$

In unserem Intervall wären dies die Werte: $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}$

Hoch- und Tiefpunkte:
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \cos(2x - \tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - \tfrac{\pi}{2} = (2k+1)\tfrac{\pi}{2},\ \text{mit } k \in Z$$

$$\Rightarrow x_k = (k+1)\tfrac{\pi}{2}$$

In unserem Intervall wären dies die Werte: $x_3 = 0, x_4 = \frac{\pi}{2}, x_5 = \pi$

$f(0) = f(\pi) = -3$, wegen π-Periodizität.

$f(\frac{\pi}{2}) = 3$

hinreichende Bedingung über zweite Ableitung:

$f''(0) = f''(\pi) = 12 > 0 \qquad \Rightarrow TP_1(0/-3),\ TP_2(\pi/-3)$

$f''(\frac{\pi}{2}) = -12 < 0 \qquad \Rightarrow HP(\frac{\pi}{2}/3)$

Wendepunkte:
notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(2x - \tfrac{\pi}{2}) = 0$$

$\Rightarrow$ siehe Nullstellen!

hinreichende Bedingung über dritte Ableitung:

$f'''(\frac{\pi}{4}) = -24 \neq 0 \qquad \Rightarrow WP_1(\frac{\pi}{4}/0)$

$f'''(\frac{3\pi}{4}) = 24 \neq 0 \qquad \Rightarrow WP_2(\frac{3\pi}{4}/0)$