Aufgabe:

Untersuche die Funktion $f(x)=\sqrt{x^2+x}$, mit $x\in D_f$ auf Definitionsbereich, Asymptoten, Schnittpunkte mit den Achsen, Extrema und Differenzierbarkeit an den Rändern.

Lösung:
Berechnung der Ableitungen:

$$f(x)=\sqrt{x^2+x}$$

$$f'(x)=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$f''(x)=\frac{4\sqrt{x^2+x}-\frac{(2x+1)^2}{\sqrt{x^2+x}}}{4(x^2+x)}=\frac{4(x^2+x)-(4x^2+4x+1)}{4\sqrt{(x^2+x)^3}}=-\frac{1}{4\sqrt{(x^2+x)^3}}$$

Definitionsbereich:
Der Radikand muß größer oder gleich Null sein.

$$x^2+x\geq 0\Leftrightarrow x(x+1)\geq 0\ \Rightarrow D_f=\{x\in\mathfrak{R}\,|\,x\leq -1\vee x\geq 0\}$$

Die Ränder sind also: $-\infty$, -1, 0, $+\infty$

Asymptoten:
Verhalten für $x\to+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})^2-\underbrace{\tfrac{1}{4}}_{\text{unerheblich}}}\approx\left|x+\tfrac{1}{2}\right|=x+\tfrac{1}{2}\text{, weil } x\to+\infty.$$

Vermutung: $g(x)=x+\frac{1}{2}$ ist schiefe Asymptote. Es bleibt zu zeigen: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$

Nachweis:

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-(x+\tfrac{1}{2}))=\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{x^2+x}-(x+\tfrac{1}{2}))\frac{\sqrt{x^2+x}+(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{x^2+x}+(x+\frac{1}{2})}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x-(x^2+x+\frac{1}{4})}{\sqrt{x^2+x}+x+\frac{1}{2}}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{4}}{|x|\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+x+\frac{1}{2}}=0,\ \text{q.e.d.}$$

Somit ist $g(x)=x+\frac{1}{2}$ schiefe Asymptote für $x\to\infty$.

Verhalten für $x\to-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+x}\approx\left|x+\tfrac{1}{2}\right|=-x-\tfrac{1}{2}\text{, weil } x\to-\infty.$$

Vermutung: $g^*(x)=-x-\frac{1}{2}$ ist schiefe Asymptote. Es bleibt zu zeigen: $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g^*(x))=0$

Der Nachweis erfolgt analog und wird bestätigt.

Schnittpunkte mit den Achsen:
Schnittpunkt mit der y-Achse:
Bedingung: $x = 0$

$$f(0) = 0 \Rightarrow S_y(0/0)$$

Nullstellen:
Bedingung: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x} = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1 \Rightarrow N_1(0/0), N_2(-1/0)$$

Hoch- und Tiefpunkte:
notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -\tfrac{1}{2} \notin D_f, \text{also keine Extremwerte}$$

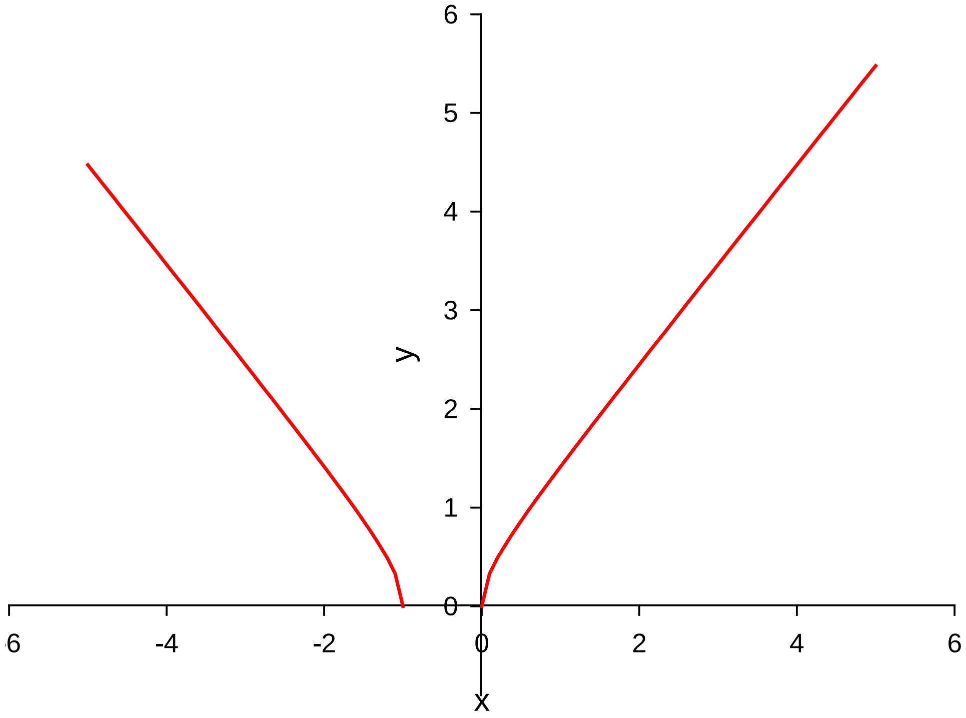
Differenzierbarkeit an den Rändern:

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{2\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{=-x-\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to-\infty} = \frac{2x+1}{-2x-1} = -1$$

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{\overbrace{2x+1}^{<0}}{\underbrace{2}_{>0}\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\to 0^+}} \to -\infty, \text{senkrechte Tangente}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\overbrace{2x+1}^{>0}}{\underbrace{2}_{>0}\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{\to 0^+}} \to +\infty, \text{senkrechte Tangente}$$

$$\lim_{x\to\infty} f'(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{2\underbrace{\sqrt{x^2+x}}_{=x+\frac{1}{2}}} = \lim_{x\to\infty} = \frac{2x+1}{2x+1} = 1$$


6
5
4
3
2
1
0
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x