Nullstellen

Aufgabe

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}t$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_t. Untersuche K_t auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.
Zeige: Für $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ und $t_1 \neq t_2$ haben die zugehörigen Schaubilder keinen Punkt gemeinsam.

Lösung

$f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}t$ mit $x \in \mathbb{R}$
$f_t'(x) = \frac{2}{t}x^3 + 2x$
$f_t''(x) = \frac{6}{t}x^2 + 2$
$f_t'''(x) = \frac{12}{t}x$

Symmetrie
$f_t(-x) = \frac{1}{2t}(-x)^4 + (-x)^2 - \frac{3}{2}t = f_t(x) \Rightarrow$ Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse.

Schnittpunkt mit der y-Achse
$x = 0$
$f_t(0) = -\frac{3}{2}t \Rightarrow S_y(0/-\frac{3}{2}t)$

Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen)
$f_t(x) = 0$ mit der Substitution $x^2 = z$ folgt:
$$\frac{1}{2t}z^2 + z - \frac{3}{2}t = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{\frac{1}{t}} \Rightarrow z_1 = t,\ (z_2 = -3t),\ \text{da } t > 0$$
$x_{1,2} = \pm\sqrt{t}$

Extremwerte
notwendige Bedingung:
$f_t'(x) = 0$
$x\underbrace{(\frac{2}{t}x^2 + 2)}_{>0} = 0$
$x_3 = 0 \Rightarrow f_t''(0) = 2 > 0 \Rightarrow f_t(0) = -\frac{3}{2}t \Rightarrow T(0/-\frac{3}{2}t)$

Wendepunkte
notwendige Bedingung:
$f_t''(x) = 0$
$\underbrace{\frac{6}{t}x^2 + 2}_{>0} = 0$
hat keine Lösung, das Schaubild somit keine Wendepunkte.

Nachweis für eventuelle Schnittpunkte mit $t_1 \neq t_2$ und $t_1, t_2 \in \Re^+$
$f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$
$(\frac{1}{2t_1} - \frac{1}{2t_2})x^4 - \frac{3}{2}(t_1 - t_2) = 0$
$-\frac{1}{2} \cdot \frac{t_1 - t_2}{t_1 t_2}x^4 = \frac{3}{2}(t_1 - t_2) \quad \Big| :(t_1 - t_2)$
$\underbrace{\frac{1}{t_1 t_2}x^4}_{>0} = -3$ keine Lösung

Aufgabe

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_t. Untersuche K_t auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.

Lösung

$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

$f'_t(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2$

$f''_t(x) = 3x - 2t$

$f'''_t(x) = 3 \neq 0$ hinreichende Bedingung für Wendepunkt erfüllt

Berechnung der Nullstellen $f_t(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x = 0$

$x(\frac{1}{2}x^2 - tx + \frac{1}{2}t^2) = 0$

$x_1 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - t^2}}{1} = t$

Berechnung der Koordinaten der Extremwerte $f'_t(x) = 0$

$3x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2 = 0$

$x_{3,4} = \dfrac{2t \pm \sqrt{4t^2 - 3t^2}}{3}$

$x_3 = \frac{t}{3} \Rightarrow f''_t(\frac{1}{3}t) = -t < 0 \Rightarrow f_t(\frac{1}{3}t) = \frac{2}{27}t^3 \Rightarrow H(\frac{1}{3}t/\frac{2}{27}t^3)$

$x_4 = t \Rightarrow f''_t(t) = t > 0 \Rightarrow f_t(t) = 0 \Rightarrow T(t/0)$

Berechnung der Koordinaten des Wendepunkts $f''_t(x) = 0$

$3x - 2t = 0$

$x_5 = \frac{2}{3}t \Rightarrow f_t(\frac{2}{3}t) = \frac{1}{27}t^3 \Rightarrow W(\frac{2}{3}t/\frac{1}{27}t^3)$

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x^4 - 4x^2}$ mit $x \in D_f$.

Bestimme den maximalen Definitionsbereich. Bestimme die Nullstellen des Schaubilds von f.

Lösung

Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs:

$x^4 - 4x^2 = 0$

$x^2(x^2 - 4) = 0$

$\left.\begin{array}{l} x_{1,2} = 0 \\ x_{3,4} = \pm 2 \end{array}\right\} \Rightarrow D_f = \mathbb{R}/\{0; \pm 2\}$

Bestimmung der Nullstellen:

$x^2 + 5x + 6 = 0$

$x_{5,6} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2}$

$x_5 = -3$

$x_6 = -2$

Aufgabe

Es seib$f_t(x) = \dfrac{16tx}{(x^2 + t^2)^2}$ mit $x \in \mathbb{R},\ t > 0$ gegeben. Zeige: $f''_t\ (x) = 192t\dfrac{x(x^2 - t^2)}{(x^2 + t^2)^4}$.

Untersuche f_t auf Symmetrie, Asymptoten, Nullstellen, Extrema, Wendepunkte. (Auf die hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt kann verzichtet werden.)

Lösung

$f_t(x) = 16t\frac{x}{(x^2+t^2)^2}$ mit $x \in \Re,\ t > 0$
$f_t'(x) = 16t\frac{-3x^2+t^2}{(x^2+t^2)^3}$
$f_t''(x) = 16t\frac{-6x(x^2+t^2)^3 - 3(x^2+t^2)^2 2x(-3x^2+t^2)}{(x^2+t^2)^6} = 192t\frac{x(x^2-t^2)}{(x^2+t^2)^4}$
Symmetrie
$f_t(-x) = -f_t(x)$
Das Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
Asymptoten
Zählergrad ist kleiner als Nennergrad
$\Rightarrow$ $y = 0$ ist waagrechte Asymptote.
Bestimmung der Nullstellen $f_t(x) = 0$
$x_1 = 0$
Bestimmung der Extrema
$f_t'(x) = 0$
$-3x^2 + t^2 = 0$
$x_{2,3} = \pm\frac{t}{3}\sqrt{3}$
$f_t''(\frac{t}{3}\sqrt{3}) = -\frac{9\sqrt{3}}{128t^5} < 0 \Rightarrow f_t(\frac{t}{3}\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{t^2} \Rightarrow H(\frac{t}{3}\sqrt{3}/\frac{3\sqrt{3}}{t^2})$
Wegen Punktsymmetrie zum Ursprung folgt
$T(-\frac{t}{3}\sqrt{3}/-\frac{3\sqrt{3}}{t^2})$
Bestimmung der Wendepunkte $f_t''(x) = 0$
$x(x^2 - t^2) = 0$
$x_4 = 0 \Rightarrow f_t(0) = 0 \Rightarrow W_1(0/0)$
$x_{5,6} = \pm t \Rightarrow f_t(t) = \frac{4}{t^2} \Rightarrow W_2(t/\frac{4}{t^2})$ wegen Punktsymmetrie $W_3(-t/-\frac{4}{t^2})$

Aufgabe
Es sei $f(x) = -2e^{2x} + 6e^x - 4$ gegeben. Bestimme die Nullstellen.

Lösung
Substitution $e^x = z$
$-2z^2 + 6z - 4 = 0$
$z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-4}$
$z_1 = 1 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$
$z_2 = 2 \Rightarrow e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$

Schnittpunkte, (orthogonale Schnittpunkte), gemeinsame Punkte, Berührpunkte

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = (t - e^x)^2$ mit $t \in \mathbb{R}$. Welche Bedingungen müssen t und t^* erfüllen, damit sich die zugehörigen Schaubilder schneiden? Welche Schaubilder schneiden sich auf der y-Achse? Gibt es Schaubilder, die sich auf der y-Achse orthogonal schneiden?

Lösung:

$f_t(x) = t^2 - 2te^x + e^{2x}$
$f_t'(x) = -2te^x + 2e^{2x}$
Wähle
$t \neq t^* \Rightarrow t - t^* \neq 0$
und schneide die beiden Schaubilder, nachdem die Funktionsgleichung ausmultipliziert ist
$f_t(x) = f_{t^*}(x)$
$(t^2 - t^{*2}) - 2(t - t^*)e^x = 0$
$(t - t^*)(t + t^*) - 2(t - t^*)e^x = 0 \quad \Big| \quad : (t - t^*)$
$e^x = \frac{1}{2}(t + t^*) \Rightarrow x = \ln \frac{1}{2}(t + t^*)$
Dieser x-Wert existiert nur, wenn gilt
$t + t^* > 0$
Damit sich die Schaubilder auf der y-Achse schneiden, muss gelten
$x = 0$
$\ln \frac{1}{2}(t + t^*) = 0$
$t + t^* = 2$
Damit sich die zugehörigen Schaubilder auf der y-Achse orthogonal schneiden muss zusätzlich gelten:
$f_t(0) \cdot f_{t^*}(0) = -1$
$(-2t + 2)(-2t^* + 2) = -1$
Mit der Voraussetzung
$t + t^* = 2 \Rightarrow t^* = 2 - t$ folgt
$(-2t + 2)(-2(2 - t) + 2) = -1$
$(-2t + 2)(2t - 2) = -1$
$-(2t - 2)^2 = -1$
$2t - 2 = \pm 1$
$t_1 = \frac{3}{2} \Rightarrow t_1^* = \frac{1}{2}$
$t_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow t_2^* = \frac{3}{2}$
Für diese Werte von t und t^* schneiden sich die Schaubilder auf der y-Achse orthogonal.

Aufgabe

Für jedes $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Welche Beziehung muss zwischen t_1 und t_2 $(t_1 \neq t_2)$ bestehen, damit sich die Kurven K_{t_1} und K_{t_2} im Ursprung berühren?

Lösung

$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

$f_t'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2$
Damit sich die beiden Schaubilder im Ursprung berühren muss gelten
$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \wedge f_{t_1}'(0) = f_{t_2}'(0)$
$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \Rightarrow 0 = 0$
dies ist immer erfüllt.
$f_{t_1}'(0) = f_{t_2}'(0) \Rightarrow \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2^2) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(t_1 - t_2)(t_1 + t_2) = 0$
$t_1 = t_2$ oder $t_1 = -t_2$

Aufgabe
Es seien $f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x$ und $p_a(x) = ax^2 + \frac{7}{2}x,$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Welche Parabel p_a berührt die Kurve von f?

Lösung
$f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x$
$f'(x) = -\frac{3}{32}x^2 + \frac{3}{2}$
$p_a(x) = ax^2 + \frac{7}{2}x,$ mit $a \in \mathbb{R}^+$
$p_a'(x) = 2ax + \frac{7}{2}$
Damit sich die beiden Schaubilder berühren muss gelten
$f(x) = p_a(x) \wedge f'(x) = p_a'(x)$
$f(x) = p_a(x)$
$-\frac{1}{32}x^3 - ax^2 - 2x = 0$
$x(\underbrace{-\frac{1}{32}x^2 - ax - 2}{} = 0) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$
[1] $\quad x^2 = -32ax - 64 = -\frac{96}{3}ax - \frac{192}{3}$
$f'(x) = p_a'(x)$
$-\frac{3}{32}x^2 - 2ax - 2 = 0$
[2] $\quad x^2 = -\frac{64}{3}ax - \frac{64}{3}$
$x_1 = 0$ scheidet aus, weil dort die Steigungen nicht gleich sind.
Gleichsetzen der erhaltenen Gleichungen [1] und [2] liefert
$-\frac{96}{3}ax - \frac{192}{3} = -\frac{64}{3}ax - \frac{64}{3}$
$-\frac{32}{3}ax = \frac{128}{3}$
$x_2 = -\frac{4}{a}$
Dieses Ergebnis eingesetzt in Gleichung [1] liefert
$(-\frac{4}{a})^2 = -32a(-\frac{4}{a}) - 64$
$a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2}, (a_2 = -\frac{1}{2})$ wegen $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x_2 = -8$
$p_{\frac{1}{2}}(-8) = 4$
Für $a = \frac{1}{2}$ berühren sich die beiden Schaubilder f und $p_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $P(-8/4)$.

Aufgabe
Es sei $f_t(x) = t\frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ gegeben. Welche Beziehung besteht zwischen t_1 und t_2 mit $t_1 \neq t_2$, wenn sich die zugehörigen Schaubilder im Ursprung rechtwinklig schneiden?

Lösung
$f_t(x) = t\frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$ mit $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

$f_t'(x) = -2t\frac{2x+1}{(x-1)^3}$

Die Bedingungen für orthogonales Schneiden im Ursprung $O(0/0)$ lauten

$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \wedge f_{t_1}'(0) \cdot f_{t_2}'(0) = -1$

$f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) \Rightarrow 0 = 0$

dies ist immer erfüllt.

$f_{t_1}'(0) \cdot f_{t_2}'(0) = -1$

$2t_1 \cdot 2t_2 = -1$

$t_1 \cdot t_2 = -\frac{1}{4}$

Aufgabe

Zeige: $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 5$ schneiden sich orthogonal.

Lösung

$f(x) = x^2 + 1$

$f'(x) = 2x$

$g(x) = -\frac{1}{15}x^2 + 5$

$g'(x) = -\frac{2}{15}x$

Die Bedingungen für orthogonales Schneiden lauten

$f(x) = g(x) \wedge f(x) \cdot g'(x) = -1$

$f(x) = g(x)$

$\frac{16}{15}x^2 - 4 = 0$

$x^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{15}$

Beide Schaubilder sind achsensymmetrisch, deshalb genügt es einen der beiden Punkte auf Orthogonalität zu untersuchen.

$f'(\frac{1}{2}\sqrt{15}) \cdot g'(\frac{1}{2}\sqrt{15}) = -1$

$\sqrt{15} \cdot (-\frac{1}{15}\sqrt{15}) = -1$

Dies ist eine wahre Aussage, also schneiden sich die Schaubilder orthogonal.

Aufgabe

Zeige, dass alle Kurven mit $f_a(x) = x^3 + \frac{a}{2}x^2 + (a+1)x,$ mit $a \in \mathbb{R}$ zwei Punkte gemeinsam haben.

Lösung

Wähle $a_1 \neq a_2 \Rightarrow a_1 - a_2 \neq 0$

und schneide die beiden Schaubilder

$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$

$\frac{1}{2}(a_1 - a_2)x^2 + (a_1 - a_2)x = 0 \quad | \quad : (a_1 - a_2) \neq 0$

$\frac{1}{2}x^2 + x = 0$

$x(\frac{1}{2}x + 1) = 0$

$x_1 = 0 \Rightarrow f_a(0) = 0 \Rightarrow P_1(0/0)$

$x_2 = -2 \Rightarrow f_a(-2) = -10 \Rightarrow P_2(-2/-10)$

Bestimmung von Funktionsgleichungen

Aufgabe

Für jedes $t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist eine Funktion gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild sei K_t. Eine Parabel zweiter Ordnung P_t geht durch die gemeinsamen Punkte von K_t mit der x-Achse und berührt K_t im Ursprung. Weise durch Rechnung nach, dass K_t und P_t keine weiteren gemeinsamen Punkte haben. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung

$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

$f_t'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2$

Gemeinsame Punkte von des Schaubilds mit der x-Achse

$f_t(x) = 0$

$\frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x = 0$

$x(\frac{1}{2}x^2 - tx + \frac{1}{2}t^2) = 0$

$x_1 = 0$

$x_{2,3} = \dfrac{t \pm \sqrt{t^2 - t^2}}{1} = t$

Die Parabel zweiter Ordnung lautet

$p_t(x) = ax(x - t) = ax^2 - atx$

$p_t'(x) = 2ax - at$

Die Parabel berührt im Ursprung

$p_t'(0) = f_t'(0)$

$-at = \frac{1}{2}t^2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}t$

Die Gleichung der Parabel lautet

$p_t(x) = -\frac{1}{2}tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

Gemeinsame Punkte: $p_t(x) = f_t(x)$

$\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}tx^2 = 0$

$x^2(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}t) = 0$

$x_{1,2} = 0$

$x_3 = t$

Die beiden Schaubilder haben sonst keine weiteren Punkte gemeinsam.

Aufgabe

Eine Parabel 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung $O(0/0)$ und geht durch den Punkt $P(3/0)$. Das von der Parabel 3. Ordnung und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück im 1. Feld hat den Flächeninhalt $\frac{9}{4}$ FE. Bestimme die Gleichung der Parabel.

Lösung

Die Parabel 3. Ordnung lautet

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Berühren der x-Achse im Ursprung liefert

$f(0) = 0 \Leftrightarrow d = 0$

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow c = 0$

Der Punkt $P(3/0)$ liefert:

$f(3) = 0 \Leftrightarrow 27a + 9b = 0 \Rightarrow b = -3a$

Die Funktionsgleichung lautet jetzt
$f(x) = ax^3 - 3ax^2$
$F(x) = \frac{1}{4}ax^4 - ax^3$
Die eingeschlossene Fläche liegt im 1. Feld und wird durch die Nullstellen von f begrenzt
$F(3) - F(0) = \frac{9}{4}$
$\frac{81}{4}a - 27a = \frac{9}{4}$
$-\frac{27}{4}a = \frac{9}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$
Die gesuchte Gleichung lautet
$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

Aufgabe
Gib eine gebrochenrationale Funktion an, die $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$ als Nullstellen sowie $x_3 = 5$ als Pol mit Vorzeichenwechsel und $x_4 = -3$ als Pol ohne Vorzeichenwechsel hat.

Lösung
Eine mögliche Funktion, die diese Bedingungen erfüllt ist
$$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-5)(x+3)^2}$$

Asymptoten (waagrechte, schiefe) und Pole

Aufgabe

Es sei $f_t(x) = \frac{3}{x^2 + 3x + t}$ mit $x \in D_{f_t},\ t \in \mathbb{R}_0^+$ gegeben. Bestimme maximalen Definitionsbereich und alle möglichen Asymptoten (senkrechte und waagrechte). Für welche Werte von t existieren keine, eine oder zwei senkrechte Asymptoten?

Lösung

Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs

Nennernullstellen müssen aus $\mathbb{R}$ entfernt werden.
$x^2 + 3x + t = 0$
$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4t} \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R}/\left\{-\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{9 - 4t}\right\}$
Untersuchung auf Asymptoten
Da der Zählergrad kleiner ist als der Nennergrad ist die x-Achse waagrechte Asymptote.
Untersuchung auf möglich Pole
Ist $9 - 4t < 0$, also $t > \frac{9}{4}$, so existieren keine Pole
Ist $9 - 4t = 0$, also $t = \frac{9}{4}$, so existiert ein Pol ohne Vorzeichenwechsel
Ist $9 - 4t > 0$, also $t < \frac{9}{4}$, so existieren zwei Pole mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe

Zu jedem $t \in \mathbb{R}$ sei eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = 10\frac{x - 1}{x^2 - tx + t}$ mit $x \in D_{f_t}$.
Ihr Schaubild sei K_t. Gib die größtmögliche Definitionsmenge D_{f_t} und damit die Anzahl der Pole in Abhängigkeit von t an.

Lösung
Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs
Nennernullstellen müssen aus $\mathbb{R}$ entfernt werden.
$x^2 - tx + t = 0$
$x_{1,2} = \frac{t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - 4t} \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R}/\left\{\frac{t}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{t^2 - 4t}\right\}$
Untersuchung auf möglich Pole
Ist $t^2 - 4t < 0$, also $0 < t < 4$, so existieren keine Pole
Ist $t^2 - 4t = 0$, also $t = 0 \vee t = 4$, so existiert ein Pol ohne Vorzeichenwechsel
Ist $t^2 - 4t > 0$, also $t < 0 \vee t > 4$, so existieren zwei Pole mit Vorzeichenwechsel

Aufgabe
Für jedes $t \in \Re^+$ ist durch $f_t(x) = \frac{x^2 - 4t^2}{x^2 - t^2}$ mit $x \in D_{f_t}$ eine Funktion f_t gegeben. Ihr Schaubild sei K_t.
Bestimme den umfassendsten Definitionsbereich D_{f_t} von der Funktion f_t. Untersuche K_t auf Asymptoten.

Lösung
Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs
Nennernullstellen müssen aus $\mathbb{R}$ entfernt werden.
$x^2 - t^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm t \Rightarrow D_{f_t} = \mathbb{R}/\{\pm t\}$
Diese Nennernullstellen sind nicht gleichzeitig auch Zählernullstellen und sie treten

jeweils einfach auf, darum sind an diesen Stellen Pole mit Vorzeichenwechsel.
Asymptoten:
Der Zählergrad ist gleich dem Nennergrad: $y = 1$ ist waagrechte Asymptote.

Aufgabe

Für jedes $a \in \mathbb{R}^+$ ist durch eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = \frac{ae^x}{a+e^x}$. Ihr Schaubild sei K_a. Bestimme die Asymptoten.

Lösung

Für die Bestimmung der Asymptoten gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{ae^x}{a+e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{a}{\underbrace{\frac{a}{e^x}}_{\to 0}+1} = a$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_a(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{a\overbrace{e^x}^{\to 0}}{a+\underbrace{e^x}_{\to\infty}} = 0$$

Aufgabe

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{e^x}{e^x-t}$ mit $x \in \mathbb{R}/\{\ln t\}$.
Untersuche das Schaubild K_t von f_t auf Asymptoten.

Lösung

Für die Bestimmung der Asymptoten gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f_t(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x}\cdot\frac{1}{1-\underbrace{\frac{t}{e^x}}_{\to 0}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\overbrace{e^x}^{\to 0}}{\underbrace{e^x}_{\to 0}-t} = 0$$

Aufgabe

Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = t^2(x+\frac{1}{t})e^{-tx}$. Untersuche das Schaubild K_t von f_t auf Asymptoten.

Lösung

Für die Bestimmung der Asymptoten gilt

$$\lim_{x\to+\infty} f_t(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{t^2}_{>0}\ \underbrace{(x+\tfrac{1}{t})}_{\to+\infty}\ \underbrace{e^{-tx}}_{\to 0} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_t(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{t^2}_{>0}\ \underbrace{(x+\tfrac{1}{t})}_{\to-\infty}\ \underbrace{e^{-tx}}_{\to+\infty} \to -\infty$$

Tangenten und Normalen

Aufgabe

Für jedes $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$ mit $x \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendetangente bzw. Wendenormalen.

Lösung

$f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x$

$f_t'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2tx + \frac{1}{2}t^2$

$f_t''(x) = 3x - 2t$

$f_t'''(x) = 3 \neq 0$ hinreichende Bedingung für Wendepunkt erfüllt

Berechnung der Koordinaten des Wendepunkts

$f_t''(x) = 0$

$3x - 2t = 0$

$x = \frac{2}{3}t \Rightarrow f_t(\frac{2}{3}t) = \frac{1}{27}t^3 \Rightarrow W(\frac{2}{3}t/\frac{1}{27}t^3)$

Berechnung der Tangentensteigung im Wendepunkt:

$m_T = f_t'(\frac{2}{3}t) = -\frac{1}{6}t^2$

Über die Orthogonalitätsbedingung erhält man die Steigung der Normalen:

$m_N = -\dfrac{1}{m_T} = \frac{6}{t^2}$

Aufstellen der Punkt-Steigungs-Form für die Tangente:

$$\frac{y - \frac{1}{27}t^3}{x - \frac{2}{3}t} = -\frac{1}{6}t^2 \Rightarrow t : y = -\frac{1}{6}t^2x + \frac{5}{54}t^3$$

Aufstellen der Punkt-Steigungs-Form für die Normale:

$$\frac{y - \frac{1}{27}t^3}{x - \frac{2}{3}t} = \frac{6}{t^2} \Rightarrow n : y = \frac{6}{t^2}x + \frac{1}{27}t^3 - \frac{4}{t}$$

Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ mit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;\ 2\}$. Vom Punkt $P(-8/0)$ soll die Tangente an das Schaubild von f gelegt werden. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte $B(u/f(u))$.

Lösung

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ mit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2;\ 2\}$

$f'(x) = \dfrac{x^2(x^2 - 12)}{(x^2 - 4)^2}$

Die Punkt-Steigungs-Form auf dieses Problem angewandt lautet:

$$\frac{0 - \frac{u^3}{u^2-4}}{-8 - u} = \frac{u^2(u^2 - 12)}{(u^2 - 4)^2}$$

$-u^3(u^2 - 4) = u^2(-8 - u)(u^2 - 12)$

$-u^3 + 4u = -u^3 - 8u^2 + 12u + 96$

$-8(u^2 - u - 12) = 0$

$u_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2}$

$u_1 = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{16}{3} \Rightarrow B_1(4/\frac{16}{3})$

$u_2 = -3 \Rightarrow f(-3) = -\frac{27}{5} \Rightarrow B_2(-3/-\frac{27}{5})$

Aufgabe
Gegeben ist die Funktion $f_t(x) = 2xe^{-tx}$ mit $t > 0$. Vom Punkt $P(-1/0)$ kann man zwei Tangenten an das Schaubild von $f_{\frac{1}{2}}$ legen. Berechnen Sie die Koordinaten der Berührpunkte.

Lösung
$f_{\frac{1}{2}}(x) = 2xe^{-\frac{1}{2}x}$
$f'_{\frac{1}{2}}(x) = (2-x)e^{-\frac{1}{2}x}$
Die Punkt-Steigungs-Form auf dieses Problem angewandt lautet:
$\frac{0 - 2ue^{-\frac{1}{2}u}}{-1-u} = (2-u)e^{-\frac{1}{2}u}$
$-2u = (2-u)(-1-u)$
$-2u = u^2 - u - 2$
$u^2 + u - 2 = 0$
$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$
$u_1 = -2 \Rightarrow f(-2) = -4e \Rightarrow B_1(-2/-4e)$
$u_2 = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{2}{\sqrt{e}} \Rightarrow B_2(1/\frac{2}{\sqrt{e}})$

Newtonsches Näherungsverfahren und Keplersche Faßregel

Die Newton-Formel

$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

mit

$f'(x_n) \neq 0$

Die Keplersche Faßregel

$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$

Aufgabe

Gegeben ist die Gleichung $x^5 + x = -1$. Berechne x_0 auf 4 Dezimalen genau.

Lösung

Definiere: $f(x) = x^5 + x + 1 = 0$

In die Newton-Formel eingesetzt:

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + x_n + 1}{5x_n^4 + 1}$

Wähle als Startwert:

$x_0 = -1$

$x_1 = -0,833333333$

$x_2 = -0,764382115$

$x_3 = -0,755024867$

$x_4 = -0,754877701$

$x_5 = -0,754877666$

Aufgabe

Gegeben ist folgende Gleichung $x^3 - 3x - 3 = 0$. Berechne ihre Lösung auf 4 Dezimalen genau.

Lösung

In die Newton-Formel eingesetzt:

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 3}{3x_n^2 - 3}$

Wähle als Startwert:

$x_0 = 2$

$x_1 = 2,111111111$

$x_2 = 2,103835979$

$x_3 = 2,103803403$

Aufgabe

Bestimme mit Hilfe der Keplerschen Faßregel folgende Integrale:

a) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx$

b) $\int_{2}^{4} \frac{x}{x^2-2}dx$

c) $\int_{1}^{2} \frac{e^x}{e^x-1}dx$

Lösung

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$a = 0 \Rightarrow f(0) = 1$

$b = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{1}{2}$

$\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = \sqrt{\frac{2}{5}} \approx 0,63246$

$b - a = 3$

$\int_{0}^{3} \frac{1}{\sqrt{1+x}}dx \approx \frac{3}{6}(1 + 4\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{1}{2}) \approx 2,0149$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-2}$

$a = 2 \Rightarrow f(2) = 1$

$b = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{3}$

$\frac{a+b}{2} = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{3}{7} \approx 0,4286$

$b - a = 2$

$\int_{2}^{4} \frac{x}{x^2-2}dx \approx \frac{2}{6}(1 + 4 \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3}) \approx 1,0159$

c) $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$

$a = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{e}{e-1} \approx 1,582$

$b = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{e^2}{e^2-1} \approx 1,156$

$\frac{a+b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow f(\frac{3}{2}) = \frac{e^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{3}{2}}-1} \approx 1,287$

$b - a = 1$

$\int_{1}^{2} \frac{e^x}{e^x-1}dx \approx \frac{1}{6}(1,582 + 4 \cdot 1,287 + 1,156) \approx 1,314$