



# Analysis

Zusammenfassung

- ⌞ **Differentialrechnung**
- ⌞ **Integralrechnung**
- ⌞ **Wachstum**
- ⌞ **Tipps und Tricks**

**Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.**

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Zahlenfolgen</b>	<b>5</b>
1.1. Definition . . . . .	5
1.2. Arithmetische Folge . . . . .	5
1.3. Geometrische Folge . . . . .	5
1.4. Grenzwert einer Folge . . . . .	5
1.5. Beschränkte Folgen . . . . .	5
1.6. Monotonie von Folgen . . . . .	5
<b>2. Lösung von einfachen Gleichungen und Ungleichungen</b>	<b>6</b>
2.1. Lineare Gleichungen . . . . .	6
2.2. Quadratische Gleichungen . . . . .	6
2.3. Lineare Ungleichungen . . . . .	7
2.4. Quadratische Ungleichungen . . . . .	7
<b>3. Das Horner-Schema</b>	<b>8</b>
<b>4. Lösung von ganzrationalen Gleichungen und Ungleichungen <math>n</math>-ten Grades</b>	<b>8</b>
4.1. Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen . . . . .	8
4.2. Lösung von ganzrationalen Gleichungen 3. Grades . . . . .	9
4.3. Lösung von ganzrationalen Gleichungen 4. Grades . . . . .	9
4.4. Lösung von ganzrationalen Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	10
4.5. Lösung von ganzrationalen Ungleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	10
<b>5. Lösung von ganzrationalen Bruchgleichungen und Bruchungleichungen</b>	<b>11</b>
5.1. Lösung von ganzrationalen Bruchgleichungen . . . . .	11
5.2. Lösung von ganzrationalen Bruchungleichungen . . . . .	11
<b>6. Differentialrechnung</b>	<b>12</b>
6.1. Stetigkeit . . . . .	12
6.2. Differenzierbarkeit . . . . .	12
6.3. Definition der Ableitung . . . . .	12
6.4. Höhere Ableitungen . . . . .	13
6.5. Extremwerte von Funktionen . . . . .	13
6.6. Wendepunkte von Funktionen . . . . .	14
6.7. Einige Ableitungsfunktionen . . . . .	14
6.8. Differentiationsregeln . . . . .	14
<b>7. Integralrechnung</b>	<b>15</b>
7.1. Flächeninhalt einer Funktion $f(x)$ mit der $x$ -Achse . . . . .	15

7.2. Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ . . . . .	15
7.3. Rotationskörper . . . . .	16
7.4. Einige Stammfunktionen . . . . .	16
7.5. Integrationsregeln . . . . .	17
<b>8. Ganzrationale Funktionen</b>	<b>18</b>
8.1. Diskussion von ganzrationalen Funktionen . . . . .	18
8.2. Überblick über die wichtigsten ganzrationalen Funktionen . . . . .	19
8.3. Bestimmung von ganzrationalen Funktionsgleichungen . . . . .	21
<b>9. Gebrochenrationale Funktionen</b>	<b>22</b>
9.1. Diskussion von gebrochenrationalen Funktionen . . . . .	22
<b>10. Wurzelfunktionen</b>	<b>24</b>
<b>11. Trigonometrische Funktionen</b>	<b>24</b>
11.1. Symmetrie . . . . .	24
11.2. Nullstellen der einfachen trigonometrischen Funktionen . . . . .	24
11.3. Der Zusammenhang zwischen Sinus- und Cosinus-Funktion . . . . .	25
11.4. Einige Werte der einfachen trigonometrischen Funktionen . . . . .	25
<b>12. Exponentialfunktionen</b>	<b>25</b>
12.1. Potenzgesetze . . . . .	26
12.2. Diskussion der einfachsten Exponentialfunktion, der $e$ -Funktion . . . . .	26
<b>13. Wachstums- und Zerfallsprozesse</b>	<b>27</b>
13.1. Natürliches Wachstum . . . . .	27
13.2. Beschränktes Wachstum . . . . .	28
13.3. Beschränkter Zerfall . . . . .	29
13.4. Logistisches Wachstum . . . . .	30
<b>14. Verschiebungen und Dehnungen von Funktionen</b>	<b>31</b>
14.1. Verschiebung in $y$ -Richtung . . . . .	31
14.2. Verschiebung in $x$ -Richtung . . . . .	31
14.3. Dehnung parallel zur $y$ -Achse ( $x$ -Achse fest) . . . . .	31
14.4. Dehnung parallel zur $x$ -Achse ( $y$ -Achse fest) . . . . .	32
<b>15. Allgemeine Symmetrie und Spiegelung von Schaubildern</b>	<b>32</b>
15.1. Allgemeine Symmetrie . . . . .	32
15.2. Spiegelung von Schaubildern . . . . .	32

<b>16.Nullstellen einer Funktion</b>	<b>32</b>
<b>17.Schnitt zweier Funktionen</b>	<b>33</b>
<b>18.Scharkurven</b>	<b>33</b>
18.1. Gemeinsame Punkte einer Scharkurve . . . . .	33
18.2. Verbotene oder erlaubte Punkte einer Scharkurve . . . . .	33
18.3. Ortskurven . . . . .	34
<b>19.Extremwertaufgaben</b>	<b>34</b>
<b>20.Tangenten- und Normalenproblem</b>	<b>35</b>
20.1. Tangenten- bzw. Normalengleichung durch einen Punkt auf dem Schaubild .	35
20.2. Tangentengleichungen durch einen Punkt nicht auf dem Schaubild . . . . .	35
<b>21.Das Newton-Verfahren</b>	<b>35</b>
<b>22.Vollständige Induktion</b>	<b>36</b>

## 1. Zahlenfolgen

### 1.1. Definition

Ordnet man jeder natürlichen Zahl  $1, 2, 3, \dots, n \in \mathbb{N}$  in dieser Reihenfolge jeweils genau eine reelle Zahl  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  zu, so nennt man die Gesamtheit dieser Zahlen eine Zahlenfolge.

Jede der Zahlen  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  heißt Glied der Folge.

$a_1$  ist das erste (Anfangsglied),  $a_2$  das zweite, ...,  $a_n$  das  $n$ -te Glied der Folge.

### 1.2. Arithmetische Folge

Hat eine Zahlenfolge insbesondere die Eigenschaft, daß die Differenz zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, dann spricht man von einer arithmetischen Folge:

Ist das Anfangsglied  $a_1 = a$  und die konstante Differenz  $d$ , so folgt:

$$a_1 = a, a_2 = a + d, a_3 = a + 2d, \dots, a_n = a + (n - 1)d$$

### 1.3. Geometrische Folge

Hat eine Zahlenfolge insbesondere die Eigenschaft, daß der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder konstant ist, dann spricht man von einer geometrischen Folge:

Ist das Anfangsglied  $a_1 = a$  und der konstante Quotient  $q$ , so folgt:

$$a_1 = a, a_2 = aq, a_3 = aq^2, \dots, a_n = aq^{n-1}$$

### 1.4. Grenzwert einer Folge

Eine Zahlenfolge  $a_n$  heißt konvergent mit dem Grenzwert  $g$ , wenn es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine Zahl  $n_0 \in \mathbb{N}$  gibt, so daß  $|a_n - g| < \epsilon$  gilt für alle  $n > n_0$ .

Man schreibt:  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = g$

Ist insbesondere  $g = 0$ , so handelt es sich um eine Nullfolge. Alle Zahlenfolgen, die nicht konvergieren, heißen divergent und besitzen keinen Grenzwert.

### 1.5. Beschränkte Folgen

Eine Zahlenfolge  $a_n$  heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl  $S$  gibt, so daß alle  $a_n < S$ . Diese Zahl  $S$  heißt obere Schranke. Die kleinste obere Schranke bezeichnet man als obere Grenze.

Eine Zahlenfolge  $a_n$  heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl  $s$  gibt, so daß alle  $a_n > s$ . Diese Zahl  $s$  heißt untere Schranke. Die größte untere Schranke bezeichnet man als untere Grenze.

### 1.6. Monotonie von Folgen

Eine Zahlenfolge  $a_n$  heißt monoton zunehmend, wenn gilt:  $a_{n+1} \geq a_n$

Eine Zahlenfolge  $a_n$  heißt monoton abnehmend, wenn gilt:  $a_{n+1} \leq a_n$

## 2. Lösung von einfachen Gleichungen und Ungleichungen

### 2.1. Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen erkennt man daran, daß die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, eins ist. Man kann eine lineare Gleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$ax + b = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

$$x_1 = -\frac{b}{a}$$

### 2.2. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen erkennt man daran, daß die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, zwei ist. Man kann eine quadratische Gleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0$$

Man unterscheidet qualitativ folgende drei Fälle:

i)  $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$

Die quadratische Gleichung lautet dann:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Man erhält nur Lösungen, wenn  $a$  und  $c$  unterschiedliche Vorzeichen haben.

ii)  $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$

Die quadratische Gleichung lautet dann:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{a}$$

iii)  $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Die quadratische Gleichung lautet dann:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Diese löst man mit der sogenannten *Mitternachtsformel*.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Diskriminante lautet:  $D = b^2 - 4ac$

- Ist  $D > 0$ , so erhält man zwei Lösungen.
- Ist  $D = 0$ , so erhält man eine Lösung (Doppellösung).
- Ist  $D < 0$ , so gibt es keine Lösung.

### 2.3. Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, eins ist. Statt dem Gleichheitszeichen bei linearen Gleichungen hat man jetzt die vier Ungleichheitszeichen ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ). Für unsere Rechnung wählen wir  $>$ , jedoch ist dies willkürlich und könnte auch für jedes andere Ungleichheitszeichen gelten. Demnach kann man eine lineare Ungleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$ax + b > 0, \text{ mit } a \neq 0$$

**1. Fall:**  $a > 0$

$$x > -\frac{b}{a}$$

**2. Fall:**  $a < 0$

$$x < -\frac{b}{a}$$

Im zweiten Fall dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl geteilt wurde.

Analoge Überlegungen ergeben den Fall  $ax + b < 0$ , mit  $a \neq 0$

### 2.4. Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, zwei ist. Statt dem Gleichheitszeichen bei quadratischen Gleichungen hat man jetzt Ungleichheitszeichen ( $>$ ,  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$ ). Demnach kann man eine quadratische Ungleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$ax^2 + bx + c > 0$  hat die Lösungsmenge  $\mathbb{L}$  und  $ax^2 + bx + c \geq 0$  hat die Lösungsmenge  $\mathbb{L}^*$

**1. Fall:**  $a > 0$

Die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  hat

i) zwei verschiedene Lösungen  $x_1, x_2$ , mit  $x_1 < x_2$

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x < x_1 \vee x > x_2\} \text{ und } \mathbb{L}^* = \{x \in \mathbb{R} | x \leq x_1 \vee x \geq x_2\}$$

ii) eine Doppellösung  $x_1$

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x \neq x_1\} \text{ und } \mathbb{L}^* = \{x \in \mathbb{R}\}$$

iii) keine Lösung

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}\} \text{ und } \mathbb{L}^* = \{x \in \mathbb{R}\}$$

**2. Fall:**  $a < 0$

Die Gleichung  $ax^2 + bx + c = 0$  hat

i) zwei verschiedene Lösungen  $x_1, x_2$ , mit  $x_1 < x_2$

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} | x_1 < x < x_2\} \text{ und } \mathbb{L}^* = \{x \in \mathbb{R} | x_1 \leq x \leq x_2\}$$

- ii) eine Doppellösung  $x_1$   
 $\mathbb{L} = \{ \}$  und  $\mathbb{L}^* = \{x \in \mathbb{R} | x = x_1\}$
- iii) keine Lösung  
 $\mathbb{L} = \{ \}$  und  $\mathbb{L}^* = \{ \}$

Analoge Überlegungen ergeben den Fall  $ax^2 + bx + c < 0$  bzw.  $ax^2 + bx + c \leq 0$ .

### 3. Das Horner-Schema

Um das Schaubild zu einer gegebenen Funktion zu bestimmen braucht man die Funktionswerte für eine ausreichende Zahl von Abszissen  $x$ . Bei den ganzrationalen Funktionen erweist sich das Horner-Schema als sehr geeignet, da es die ganze Rechnung auf eine Kette von einfachen Multiplikationen und Additionen zurückführt. Betrachten wir z. B. eine Funktion 4. Grades und klammern dann stufenweise  $x$  aus, so erhält man folgendes:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = x\{x[x(ax + b) + c] + d\} + e$$

Soll z. B. für die gegebene Funktion 4. Grades der Funktionswert zur Abszisse  $x_0$  berechnet werden, dann berechnet man zunächst  $ax_0 + b = A_1$ ; setzt man oben ein, so erhält man

$$f(x_0) = x_0\{x_0[x_0A_1 + c] + d\} + e$$

Nun berechnet man  $x_0A_1 + c = A_2$ , setzt dies ein und erhält

$$f(x_0) = x_0x_0A_2 + d + e$$

Setzt man noch  $x_0A_2 + d = A_3$  ein, so erhält man schließlich

$$f(x_0) = x_0A_3 + e$$

Die ganze Rechnung wird übersichtlicher, wenn man in die erste Zeile eines rechteckigen Schemas die Koeffizienten des Polynoms schreibt, wobei fehlende Koeffizienten durch Nullen ersetzt werden müssen.

Koeffizienten	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
$x_0$	$a$	$\underbrace{x_0 \cdot a + b}_{A_1}$	$\underbrace{x_0 \cdot A_1 + c}_{A_2}$	$\underbrace{x_0 \cdot A_2 + d}_{A_3}$	$\underbrace{x_0 \cdot A_3 + e}_{f(x_0)}$

Möchte man das gegebene Polynom durch den Linearfaktor  $(x - x_0)$  dividieren, so erhält man mit Hilfe des Horner-Schemas folgende Lösung:

$$f(x) = ax^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 + \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

Ist  $f(x_0) = 0$ , so hat man eine Nullstelle des Polynoms bestimmt und damit das gegebene Polynom um eine Potenz erniedrigt. Durch Wiederholen dieses Verfahrens erniedrigt sich der Grad des Polynoms erneut um eins, und eine weitere Nullstelle ist gefunden.

Dieses Verfahren erspart die Polynomdivision und berechnet leicht Funktionswerte.

## 4. Lösung von ganzrationalen Gleichungen und Ungleichungen $n$ -ten Grades

### 4.1. Lösung von linearen und quadratischen Gleichungen

Für lineare und quadratische Gleichungen kennen wir bereits ein Lösungsverfahren.

## 4.2. Lösung von ganzrationalen Gleichungen 3. Grades

Hat die Gleichung die Form

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so muß man eine Lösung  $x_1$  erraten und diese durch Polynomdivision (Horner-Schema) abspalten und reduziert diese auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung man mit der Mitternachtsformel bestimmen kann.

Hat die Gleichung die Form

$$ax^3 + bx^2 + cx = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so klammert man  $x$  aus und erhält dieselbe Gleichung in der Form

$$x(ax^2 + bx + c) = 0$$

mit der Lösung  $x_1 = 0$ .

Die möglichen weiteren Lösungen erhält man mit der Mitternachtsformel.

Hat die Gleichung die Form

$$ax^3 + bx^2 = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so klammert man  $x^2$  aus und erhält dieselbe Gleichung in der Form

$$x^2(ax + b) = 0$$

mit den Lösungen  $x_{1,2} = 0$  und  $x_3 = -\frac{b}{a}$ .

## 4.3. Lösung von ganzrationalen Gleichungen 4. Grades

Hat die Gleichung die Form

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so muss man zwei Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  erraten und diese durch Polynomdivision (Horner-Schema) abspalten und reduziert diese auf eine quadratische Gleichung, deren mögliche Lösungen man mit der Mitternachtsformel bestimmen kann.

Hat die Gleichung die Form

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so klammert man  $x$  aus und erhält dieselbe Gleichung in der Form

$$x(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$$

mit der Lösung  $x_1 = 0$ .

Man muss eine Lösung  $x_2$  erraten und durch Polynomdivision (Horner-Schema) abspalten und reduziert diese auf eine quadratische Gleichung. Die möglichen weiteren Lösungen erhält man mit der Mitternachtsformel.

Hat die Gleichung die Form

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so klammert man  $x^2$  aus und erhält dieselbe Gleichung in der Form

$$x^2(ax^2 + bx + c) = 0$$

mit den Lösungen  $x_{1,2} = 0$

und die möglichen weiteren Lösungen erhält man mit der Mitternachtsformel.

Hat die Gleichung die Form

$$ax^4 + bx^3 = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so klammert man  $x^3$  aus und erhält dieselbe Gleichung in der Form

$$x^3(ax + b) = 0$$

mit den Lösungen  $x_{1,2,3} = 0$  und  $x_4 = -\frac{b}{a}$ .

Hat die Gleichung die Form

$$ax^4 + cx^2 + e = 0, \text{ mit } a \neq 0$$

so substituiert man  $x^2 = z$  und erhält eine quadratische Gleichung der Form

$$az^2 + cz + e = 0$$

diese löst man mit der Mitternachtsformel, erhält evtl.  $z_1$  und  $z_2$  und substituiert dann zurück. Die möglichen Lösungen sind dann

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1} \text{ und } x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$$

#### 4.4. Lösung von ganzrationalen Gleichungen $n$ -ten Grades

Durch eventuell mögliches Ausklammern und Erraten von Lösungen und nachfolgenden Polynomdivisionen, führt man die Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurück, die man lösen kann.

#### 4.5. Lösung von ganzrationalen Ungleichungen $n$ -ten Grades

Durch Termumformungen kann man jede beliebige ganzrationale Ungleichung  $n$ -ten Grades auf die folgende Form bringen:

$$f(x) > 0$$

In Worten: In welchen Bereichen liegt das Schaubild der Funktion  $f(x)$  oberhalb der  $x$ -Achse? Anstelle von  $>$  ist ebenso  $<$ ,  $\geq$ ,  $\leq$  als Ungleichheitszeichen möglich.

Man bestimmt die Nullstellen der Funktion  $f(x) = 0$  und skizziert diese. Man löst diese Art von Ungleichungen graphisch durch Gebietseinteilung (Bereiche, in denen die Funktionswerte einen Vorzeichenwechsel machen).

## 5. Lösung von ganzrationalen Bruchgleichungen und Bruchungleichungen

### 5.1. Lösung von ganzrationalen Bruchgleichungen

Durch Termumformungen kann man jede ganzrationale Bruchgleichung auf die folgende Form bringen:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = 0 \text{ mit } q(x) \neq 0$$

Die Lösungen dieser Bruchgleichung ergeben sich durch:

$$p(x) = 0$$

Dies ist wiederum eine ganzrationale Gleichung, die wie im vorigen Kapitel gelöst wird.

### 5.2. Lösung von ganzrationalen Bruchungleichungen

Durch Termumformungen kann man jede ganzrationale Bruchungleichung auf die folgenden Formen bringen:

a)  $\frac{p(x)}{q(x)} > 0$  mit  $q(x) \neq 0$

Die Lösungen dieser Bruchungleichung ergeben sich durch:

$$[p(x) > 0 \wedge q(x) > 0] \vee [p(x) < 0 \wedge q(x) < 0]$$

Dies sind wiederum ganzrationale Gleichungen, die wie im vorigen Kapitel gelöst werden.

b)  $\frac{p(x)}{q(x)} < 0$  mit  $q(x) \neq 0$

Die Lösungen dieser Bruchungleichung ergeben sich durch:

$$[p(x) > 0 \wedge q(x) < 0] \vee [p(x) < 0 \wedge q(x) > 0]$$

Dies sind wiederum ganzrationale Gleichungen, die wie im vorigen Kapitel gelöst werden.

c)  $\frac{p(x)}{q(x)} \geq 0$  mit  $q(x) \neq 0$

Die Lösungen dieser Bruchungleichung ergeben sich durch:

$$[p(x) \geq 0 \wedge q(x) > 0] \vee [p(x) \leq 0 \wedge q(x) < 0]$$

Dies sind wiederum ganzrationale Gleichungen, die wie im vorigen Kapitel gelöst werden.

d)  $\frac{p(x)}{q(x)} \leq 0$  mit  $q(x) \neq 0$

Die Lösungen dieser Bruchungleichung ergeben sich durch:

$$[p(x) \geq 0 \wedge q(x) < 0] \vee [p(x) \leq 0 \wedge q(x) > 0]$$

Dies sind wiederum ganzrationale Gleichungen, die wie im vorigen Kapitel gelöst werden.

## 6. Differentialrechnung

Die Differentialrechnung befaßt sich mit Berechnungen von Steigungsverhalten, Krümmungsverhalten, Hoch-, Tief- und Wendepunkte eines Schaubilds der Funktion  $f(x)$ .

### 6.1. Stetigkeit

Eine Funktion  $f(x)$  heißt stetig an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{D}_f$ , wenn gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Damit  $f$  an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{D}_f$  stetig ist, müssen also folgende Bedingungen erfüllt sein:

- $f$  ist an der Stelle  $x_0$  definiert
- der linksseitige und rechtsseitige Grenzwert und der Funktionswert müssen in  $x_0$  übereinstimmen

D. h.: Die Funktion  $f$  macht an dieser Stelle keinen Sprung.

Eine Funktion  $f$  heißt stetig im Intervall  $I$ , wenn sie für jedes  $x \in I$  stetig ist.

### 6.2. Differenzierbarkeit

Eine Funktion  $f$  heißt differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in \mathbb{D}_f$ , wenn gilt:

- $f$  ist dort stetig
- $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x)$ , d. h. die linksseitige und rechtsseitige Ableitung stimmen überein

D. h.: Die Funktion  $f$  hat an dieser Stelle keinen Knick.

Eine Funktion  $f$  heißt differenzierbar im Intervall  $I$ , wenn sie für jedes  $x \in I$  differenzierbar ist.

### 6.3. Definition der Ableitung

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

gesprochen wird dies:

$f$ -Strich von  $x_0$ ,  $y$ -Strich von  $x_0$ ,  $df$  nach  $dx$  an der Stelle  $x_0$ .

Der Differenzenquotient  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ , bei Berechnung des Grenzwerts heißt dieser Differentialquotient  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$  und bedeutet geometrisch die Steigung der Sekante in den Punkten  $P(x_0/f(x_0))$  und  $Q(x_0 + h/f(x_0 + h))$  im Falle des Differenzenquotienten bzw. die Steigung der Tangente im Punkt  $P(x_0/f(x_0))$  im Grenzfall des Differentialquotienten.

Ist  $f(x)$  für alle  $x \in I$  differenzierbar, dann ordnet die Ableitungsfunktion  $f'(x)$  jedem Argument  $x \in I$  die Werte der Tangentensteigung der Kurve  $f(x)$  zu.

## 6.4. Höhere Ableitungen

i) Die Schreibweise

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2}$$

usw.

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf}{dx^n}$$

gesprochen wird dies:

$y$ - $n$ -Strich,  $f$ - $n$ -Strich von  $x$ ,  $d$ - $n$ - $y$  nach  $dx$ -hoch  $n$

ii) Bedeutung der ersten Ableitung

Die erste Ableitung  $f'(x)$  gibt das Steigungsverhalten der Funktion  $f$  an.

Ist  $f'(x) > 0$ , so steigt die Funktion streng monoton,

ist  $f'(x) < 0$ , so fällt die Funktion streng monoton.

iii) Bedeutung der zweiten Ableitung

Die zweite Ableitung  $f''(x)$  gibt das Krümmungsverhalten der Funktion  $f$  an.

Ist  $f''(x) > 0$ , so ist die Funktion linksgekrümmt,

ist  $f''(x) < 0$ , so ist die Funktion rechtsgekrümmt.

## 6.5. Extremwerte von Funktionen

Die notwendige Bedingung hierfür ist, dass die 1. Ableitung von  $f$  verschwindet:  $f'(x_0) = 0$

i) Hinreichend für einen Hochpunkt ist:

Ein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung an dieser Stelle  $x_0$  von  $+$   $\rightarrow$   $-$

Analog gilt:  $f''(x_0) < 0$

ii) Hinreichend für einen Tiefpunkt ist:

Ein Vorzeichenwechsel (VZW) der 1. Ableitung an dieser Stelle  $x_0$  von  $-$   $\rightarrow$   $+$

Analog gilt:  $f''(x_0) > 0$

Zusammenfassend kann man sagen:

Jede Nullstelle ungerader Ordnung der 1. Ableitung einer Funktion macht einen VZW  
 $\Rightarrow$  Dies sind Extrema

Jede Nullstelle gerader Ordnung der 1. Ableitung einer Funktion macht keinen VZW  
 $\Rightarrow$  Dies sind keine Extrema, aber dafür Wendepunkte

## 6.6. Wendepunkte von Funktionen

Die notwendige Bedingung hierfür ist, daß die 2. Ableitung von  $f$  verschwindet:  $f''(x_0) = 0$

i) Hinreichend für einen Wendepunkt ist:

Ein Vorzeichenwechsel (VZW) der 2. Ableitung an dieser Stelle  $x_0$  von

$+$   $\rightarrow$   $-$  (Wechsel Links- in Rechtskurve) oder von

$-$   $\rightarrow$   $+$  (Wechsel Rechts- in Linkskurve)

Analog gilt:  $f'''(x_0) \neq 0$

Zusammenfassend kann man sagen:

Jede Nullstelle ungerader Ordnung der 2. Ableitung einer Funktion macht einen VZW

$\Rightarrow$  Dies sind Wendepunkte

Jede Nullstelle gerader Ordnung der 2. Ableitung einer Funktion macht keinen VZW

$\Rightarrow$  Dies sind keine Wendepunkte

## 6.7. Einige Ableitungsfunktionen

$$f(x) = x^n, \text{ mit } n \neq 0 \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = \ln x, \text{ mit } x > 0 \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^{ax+b}, \text{ mit } a \neq 0 \quad f'(x) = ae^{ax+b}$$

$$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \quad f'(x) = -\sin x$$

## 6.8. Differentiationsregeln

i) Summenregel

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

In Worten: *Es darf gliedweise abgeleitet werden*

ii) Faktorregel

$$f(x) = cg(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = cg'(x)$$

In Worten: *Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten*

iii) Produktregel

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

In Worten: *Vorne abgeleitet mal hinten plus hinten abgeleitet mal vorne*

iv) Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{(h(x))^2}$$

In Worten: *Oben abgeleitet mal unten minus unten abgeleitet mal oben durch unten zum Quadrat*

v) Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

In Worten: *Äußere Ableitung mal innerer Ableitung*

## 7. Integralrechnung

Die Integralrechnung befaßt sich mit der Berechnung von Flächen, die mit nicht geraden Randkurven begrenzt sind.

### 7.1. Flächeninhalt einer Funktion $f(x)$ mit der $x$ -Achse

i) Im gesamten Integrationsintervall  $[a; b]$  liegt die Funktion  $f(x)$  oberhalb der  $x$ -Achse

Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion der in  $x \in [a; b]$  stetigen Randfunktion  $f$  mit  $f(x) \geq 0$ , so berechnet sich der Flächeninhalt von  $f$  mit der  $x$ -Achse wie folgt:

$$A = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

ii) Im gesamten Integrationsintervall  $[a; b]$  liegt die Funktion  $f(x)$  unterhalb der  $x$ -Achse

Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion der in  $x \in [a; b]$  stetigen Randfunktion  $f$  mit  $f(x) \leq 0$ , so berechnet sich der Flächeninhalt von  $f$  mit der  $x$ -Achse wie folgt:

$$A = - \int_a^b f(x) dx = -(F(b) - F(a))$$

iii) Im Integrationsintervall  $[a; b]$  liegt die Funktion  $f(x)$  teils oberhalb  $f(x) \geq 0$ , teils unterhalb  $f(x) \leq 0$  der  $x$ -Achse – es existieren also reelle Schnittpunkte mit der  $x$ -Achse (Nullstellen ungerader Ordnung). Hier teilt sich die Gesamtfläche im Intervall  $[a; b]$  in Teilflächen auf, die oberhalb bzw. unterhalb der  $x$ -Achse liegen. Begrenzt sind diese Teilflächen durch die obere und untere Grenze sowie durch die Nullstellen ungerader Ordnung. Man berechnet mit Hilfe von i) und ii) die Teilflächen, addiert diese und erhält damit die Gesamtfläche.

### 7.2. Flächeninhalt zwischen zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

Man bildet die Differenzfunktion  $h(x) = f(x) - g(x)$

i) Im gesamten Integrationsintervall  $[a; b]$  liegt die Funktion  $f(x)$  oberhalb  $g(x)$

Unter dieser Voraussetzung ist  $h(x) \geq 0$ . Die Fläche zwischen  $f$  und  $g$  berechnet sich wie folgt:

$$A = \int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a)$$

ii) Im gesamten Integrationsintervall  $[a; b]$  liegt die Funktion  $g(x)$  oberhalb  $f(x)$

Unter dieser Voraussetzung ist  $h(x) \leq 0$ . Die Fläche zwischen  $f$  und  $g$  berechnet sich wie folgt:

$$A = - \int_a^b h(x) dx = -(H(b) - H(a))$$

- iii) Im Integrationsintervall  $[a; b]$  liegt die Funktion  $f(x)$  teils oberhalb, teils unterhalb von  $g(x)$  – es existieren also reelle Schnittstellen der beiden Funktionen  $f$  und  $g$  (Nullstellen ungerader Ordnung von  $h$ ). Hier teilt sich die Gesamtfläche im Intervall  $[a; b]$  in Teilflächen auf, bei der  $f$  teils oberhalb, teils unterhalb von  $g$  liegt – also  $h$  teils positiv, teils negativ ist. Begrenzt sind diese Teilflächen durch die obere und untere Grenze sowie durch die reellen Schnittstellen von  $f$  mit  $g$  – also die Nullstellen ungerader Ordnung von  $h$ . Man berechnet mit Hilfe von i) und ii) die Teilflächen, addiert diese und erhält damit die Gesamtfläche.

### 7.3. Rotationskörper

- i) Rotation in  $x \in [a; b]$  der stetigen Funktion  $f$  um die  $x$ -Achse

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- ii) Rotation in  $x \in [a; b]$  der stetigen und streng monotonen Funktion  $f$  um die  $y$ -Achse

$f(x)$  ist streng monoton wachsend, also  $f'(x) > 0$

$$V = \pi \int_a^b x^2 f'(x) dx$$

$f(x)$  ist streng monoton fallend, also  $f'(x) < 0$

$$V = -\pi \int_a^b x^2 f'(x) dx$$

- iii) Rotation in  $x \in [a; b]$  einer Fläche um die  $x$ -Achse, die von  $f$  und  $g$  begrenzt ist unter folgenden Voraussetzungen:  $f(x) > 0$ ,  $g(x) > 0$ ,  $f(x) - g(x) \geq 0$

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

### 7.4. Einige Stammfunktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n, \text{ mit } n \neq -1 & F(x) &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ f(x) &= \frac{1}{x}, \text{ mit } x \neq 0 & F(x) &= \ln |x| \\ f(x) &= e^{ax+b}, \text{ mit } a \neq 0 & F(x) &= \frac{1}{a} e^{ax+b} \\ f(x) &= \sin x & F(x) &= -\cos x \\ f(x) &= \cos x & F(x) &= \sin x \end{aligned}$$

## 7.5. Integrationsregeln

i) Bereich

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$
$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

ii) Linearität

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$
$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

iii) Produktintegration (partielle Integration)

$$\int_a^b u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) dx$$

iv) Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du, \text{ wobei gilt: } u = g(x), u' = \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Sonderfall: Lineare Substitution

$$\int_a^b f(px + q) dx = \frac{1}{p} [F(px + q)]_a^b \text{ mit } p \neq 0 \text{ und } F \text{ ist eine Stammfunktion von } f$$

v) Spezialfälle, die man parat haben sollte

- $\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln |f(x)|]_a^b$
- $\int_a^b f'(x)f(x) dx = \frac{1}{2}[(f(x))^2]_a^b$

vi) Näherungsweise Integration mit Hilfe der Keplerschen Faßregel

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b))$$

## 8. Ganzrationale Funktionen

Eine ganzrationale Funktion  $f$  ist eine Funktion, deren Funktionsterm ein Polynom ist oder auf diese Form gebracht werden kann. Ihre Darstellungsform sieht wie folgt aus

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

mit  $a_n \neq 0$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$ , mit  $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$  und  $n \in \mathbb{N}^0$

Die höchst vorkommende Potenz in  $x$  nennt man Grad der Funktion  $f$ , also bezeichnet  $n$  den Grad der Funktion. Der Faktor  $a_n$  wird als Gradfaktor bezeichnet und dieser bestimmt das Verhalten der Funktion  $f$  für große Werte von  $x$ .

- Ist  $a_n > 0$ , so wachsen die Funktionswerte von  $f$  für genügend große  $x$  über jede beliebig große positive Zahl; diese Funktionen nennen wir Steiger.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

- Ist  $a_n < 0$ , so nehmen die Funktionswerte von  $f$  für genügend große  $x$  unter jede beliebig große negative Zahl ab; diese Funktionen nennen wir Falller.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty$$

### 8.1. Diskussion von ganzrationalen Funktionen

#### i) Definitionsbereich

Die Funktion  $f$  ist für alle Werte von  $x$  definiert:  $x \in \mathbb{R}$

#### ii) Symmetrie

Gilt  $f(-x) = f(x)$ , dann nennt man die ganzrationale Funktion  $f$  gerade, das kommt daher, weil sie nur geradzahlige Exponenten enthält, wobei hier der Exponent 0 als geradzahlig gilt. Diese geraden Funktionen sind achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse.

Gilt  $f(-x) = -f(x)$ , dann nennt man die ganzrationale Funktion  $f$  ungerade, das kommt daher, weil sie nur ungeradzahlige Exponenten enthält. Diese ungeraden Funktionen sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

#### iii) Nullstellen

Die Nullstellen erhält man aus der Lösung der Bedingungsgleichung:  $f(x) = 0$ . Das ist gleichbedeutend mit der Lösung einer Gleichung  $n$ -ten Grades. Eine Funktion  $n$ -ten Grades hat maximal  $n$  reelle Nullstellen (kann auch weniger haben). Man kann dann die Funktionsgleichung  $f$  in Nullstellenform umschreiben!

Die Funktion  $f$ , mit:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

vom Grad  $n$  habe  $m < n$  verschiedene reelle Nullstellen, die wir mit  $x_1, x_2, \dots, x_m$  bezeichnen. Die Funktion  $f$  läßt sich dann umschreiben in:

$$f(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)g(x)$$

wobei  $g$  eine normierte ganzrationale Funktion vom Grad  $(n-m)$  ist, die keine weiteren reellen Nullstellen besitzt. Dies nennen wir die Nullstellenschreibweise (bzw. teilweise Nullstellenschreibweise) der Funktion  $f$ .

Normiert heißt: Der Gradfaktor ist 1.

Bisher blieb noch undiskutiert, was passiert, wenn eine Nullstelle mehrfach vorkommt. Wir unterscheiden zwischen:

- einer Einfachnullstelle (Nullstelle 1. Ordnung)

Eine Einfachnullstelle ist eine reelle Schnittstelle mit der  $x$ -Achse, also das Vorzeichen von  $f(x)$  wechselt beim Durchgang durch die Einfachnullstelle.

Reeller Schnittpunkt mit der  $x$ -Achse



- einer Doppelnulstelle (Nullstelle 2. Ordnung)

Eine Doppelnulstelle ist ein Berührungspunkt mit der  $x$ -Achse, das Vorzeichen von  $f(x)$  wechselt nicht beim Durchgang durch die Doppelnulstelle.

Hoch- oder Tiefpunkt auf der  $x$ -Achse



- oder einer Dreifachnullstelle (Nullstelle 3. Ordnung)

Eine Dreifachnullstelle ist wiederum eine reelle Schnittstelle mit der  $x$ -Achse, also das Vorzeichen von  $f(x)$  wechselt beim Durchgang durch die Dreifachnullstelle und es liegt zusätzlich an dieser Stelle eine waagrechte Tangente vor.

Wendepunkt mit waagrechtlicher Tangente (Sattelpunkt) auf der  $x$ -Achse



## 8.2. Überblick über die wichtigsten ganzrationalen Funktionen

### i) Ganzrationale Funktionen 1. Grades (Geraden)

$$f(x) = mx + b, \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } m \neq 0$$

Der Koeffizient  $m$  gibt die Steigung an und  $b$  den  $y$ -Achsenabschnitt (Schnittpunkt der Geraden mit der  $y$ -Achse). Ist  $m$  positiv ( $m > 0$ ), so steigt die Gerade, ist  $m$  negativ

( $m < 0$ ), so fällt die Gerade. Geraden sind eindeutig, wenn man einen Punkt und die Steigung kennt oder wenn man zwei verschiedene Punkte kennt.

Spezialfälle sind Geraden der Form:

- $y = b$  ist eine Parallele zur  $x$ -Achse ( $m = 0$ )
- $x = d$  ist eine Parallele zur  $y$ -Achse (nicht durch obige Form darstellbar)

## ii) Ganzrationale Funktionen 2. Grades (Parabeln)

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

Der Koeffizient  $a$  ist für den Öffnungswinkel der Parabel verantwortlich.

Ist  $0 < |a| < 1$ , so ist die Parabel gestaucht (breit),

Ist  $|a| > 1$ , so ist die Parabel gestreckt (spitz).

Ist  $a$  positiv ( $a > 0$ ), so ist sie nach oben geöffnet, ist  $a$  negativ ( $a < 0$ ), so ist sie nach unten geöffnet.

Jede Parabel besitzt genau einen Scheitel mit den Koordinaten:  $S(-\frac{b}{2a} / \frac{4ac-b^2}{4a})$

Jede Parabel ist achsensymmetrisch zu der Parallelen zur  $y$ -Achse durch ihren Scheitel, also Achsensymmetrie zur Geraden mit der Gleichung:  $x = -\frac{b}{2a}$

Spezialfälle:

- $f(x) = ax^2$ , mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse und der Scheitel liegt bei  $S(0/0)$
- $f(x) = ax^2 + c$ , mit  $x \in \mathbb{R}$  und  $a \neq 0$  Achsensymmetrie zur  $y$ -Achse und der Scheitel liegt bei  $S(0/c)$

## iii) Ganzrationale Funktionen 3. Grades

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

Jede ganzrationale Funktion 3. Grades besitzt genau einen Wendepunkt mit den Koordinaten  $W(-\frac{b}{3a} / \frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^2})$  und ist zu diesem punktsymmetrisch.

Haben Gradfaktor  $a$  und die Steigung im Wendepunkt  $m_W$  unterschiedliches Vorzeichen ( $a \cdot m_W < 0$ ), so besitzt die Funktion genau einen Hoch- und einen Tiefpunkt.

Haben Gradfaktor  $a$  und die Steigung im Wendepunkt  $m_W$  gleiches Vorzeichen ( $a \cdot m_W > 0$ ), so besitzt die Funktion nur einen Wendepunkt und keinen Hoch- und Tiefpunkt.

Ist  $m_W = 0$ , so besitzt die Funktion nur einen Wendepunkt, der zum Sattelpunkt wird (Wendepunkt mit waagrechter Tangente) und keinen Hoch- und Tiefpunkt.

## iv) Ganzrationale Funktionen 4. Grades

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ mit } x \in \mathbb{R} \text{ und } a \neq 0$$

Jede ganzrationale Funktion 4. Grades besitzt entweder zwei Wendepunkte oder keinen Wendepunkt.

### 8.3. Bestimmung von ganzrationalen Funktionsgleichungen

Zur Bestimmung von ganzrationalen Funktionsgleichungen  $f(x)$  benötigt man Informationen. Diese können angegeben werden durch Punkte, Steigungen, Vergleiche mit gegebenen Funktionen.

Hier einige Beispiele:

$$f(x)$$

- ist eine Funktion 2. Grades  
 $\Rightarrow f(x) = ax^2 + bx + c, f'(x) = 2ax + b$
- ist eine Funktion 3. Grades  
 $\Rightarrow f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, f''(x) = 6ax + 2b$
- ist eine Funktion 4. Grades  
 $\Rightarrow f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d, f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$
- ist punktsymmetrisch zum Ursprung  
 $\Rightarrow$  alle Koeffizienten mit geraden Potenzen werden Null
- ist achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse  
 $\Rightarrow$  alle Koeffizienten mit ungeraden Potenzen werden Null
- geht durch den Punkt  $P(1/2)$   
 $\Rightarrow f(1) = 2$
- berührt die  $x$ -Achse in  $x_0 = 2$   
 $\Rightarrow f(2) = 0 \wedge f'(2) = 0$
- hat einen Wendepunkt mit der Steigung  $-1$  in  $W(3/ - 2)$   
 $\Rightarrow f(3) = -2 \wedge f'(3) = -1 \wedge f''(3) = 0$
- hat eine Nullstelle in  $x_0 = 1$ , deren Tangente einen Winkel von  $\alpha = +45^\circ$  einschließt  
 $\Rightarrow f(1) = 0 \wedge f'(1) = \tan \alpha = \tan 45^\circ = 1$
- berührt die Kurve  $g(x) = x^2 + 1, g'(x) = 2x$  an der Stelle  $x_0 = -1$   
 $\Rightarrow f(-1) = g(-1) = 2 \wedge f'(-1) = g'(-1) = -2$
- hat an der Stelle  $x_0 = 1$  eine Tangente parallel zur Geraden  $g(x) = -2x + 1, g'(x) = -2$   
 $\Rightarrow f'(1) = g'(1) = -2$
- verläuft an der Stelle  $x_0 = 3$  senkrecht zur Geraden  $g(x) = -2x + 4, g'(x) = -2$   
 $\Rightarrow f'(3) \cdot g'(3) = -1 \Rightarrow f'(3) = \frac{1}{2}$

## 9. Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion ist der Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen  $P$  und  $Q$ . Man schreibt sie wie folgt:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Man nennt  $P(x)$  das Zählerpolynom und  $Q(x)$  das Nennerpolynom. Diese lassen sich wie folgt darstellen:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \text{ mit } a_n \neq 0, a_i \in \mathbb{R}, \text{ mit } (i = 0, 1, \dots, n) \text{ und } n \in \mathbb{N}^0$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m, \text{ mit } b_m \neq 0, b_i \in \mathbb{R}, \text{ mit } (i = 0, 1, \dots, m) \text{ und } m \in \mathbb{N}^0$$

Hierbei bezeichnet man mit  $n$  den Zählergrad und mit  $m$  den Nennergrad.  $a_n$  und  $b_m$  heißen Gradfaktoren des Zählers bzw. Nenners.

Ist  $n < m$ , so spricht man von einer echt gebrochenrationalen Funktion und ist  $n \geq m$  so spricht man von einer unecht gebrochenrationalen Funktion.

### 9.1. Diskussion von gebrochenrationalen Funktionen

#### i) Definitionsbereich

Die Funktion  $f$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  ohne  $Q(x) = 0$  definiert.

In Worten: Alle Werte außer den Nennernullstellen sind zugelassen

#### ii) Symmetrie

Wir untersuchen auf Symmetrieeigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion, in dem wir separat Zähler- und Nennerpolynom auf deren Symmetrieeigenschaften untersuchen und dann Rückschlüsse ziehen.

- Sind jeweils beide Polynome – sowohl Zählerpolynom als auch Nennerpolynom – gerade oder beide ungerade, so ist die gebrochenrationale Funktion gerade. Man kann daher ganz leicht zeigen:

$$f(-x) = f(x)$$

Achsensymmetrie bezüglich der  $y$ -Achse

- Sind die beiden Polynome verschieden – also das eine gerade und das andere ungerade – bzw. umgekehrt, so ist die gebrochenrationale Funktion ungerade. Man kann daher ganz leicht zeigen:

$$f(-x) = -f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung

- Ist mindestens eines der beiden Polynome weder gerade noch ungerade, dann ist keine der beiden Symmetrien vorhanden.

#### iii) Asymptoten

Bei Asymptoten untersucht man das Verhalten der Funktion für große Werte von  $x$ , also was passiert mit den Funktionswerten  $f(x)$  für  $|x| \rightarrow \infty$  oder in der mathematischeren Form:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x)$$

- Zählergrad kleiner Nennergrad, also  $n < m$ , es handelt sich also um eine echt gebrochenrationale Funktion.

Somit ist  $y = 0$ , also die  $x$ -Achse waagrechte Asymptote, weil  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$

- Zählergrad gleich Nennergrad, also  $n = m$ , es handelt sich also um eine unecht gebrochenrationale Funktion.

Somit ist  $y = \frac{a_n}{b_m}$ , also eine Parallele zur  $x$ -Achse waagrechte Asymptote, weil  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

- Zählergrad größer Nennergrad, also  $n > m$ , es handelt sich also um eine unecht gebrochenrationale Funktion.

Somit ist eine Polynomdivision erforderlich.

Man erhält dadurch eine ganzrationale Funktion  $G$  und eine echt gebrochenrationale Restfunktion  $R$ . Die Polynomdivision liefert also:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + R(x)$$

mit  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} R(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (f(x) - G(x)) = 0$ , weil  $R(x)$  eine echt gebrochenrationale Funktion ist.

$G(x)$  ist somit schiefe, ganzrationale Asymptotenkurve vom Grad  $(n - m)$ .

#### iv) Hebbare Stetigkeitslücken und Pole

In Frage kommen nur die Definitionslücken, also die Nennernullstellen, also  $Q(x) = 0$ .

Man bringt Zähler- und Nennerpolynom in Nullstellenform und kürzt soweit wie möglich. Die gekürzte Darstellung einer gebrochenrationalen Funktion bezeichnen wir nun mit:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \text{ mit } q(x) \neq 0$$

- Hebbare Stetigkeitslücken

Diese liegen an denjenigen Stellen, wo sich eine Nennernullstelle vollständig herausgekürzt hat. Das Schaubild hat an diesen Stellen nur eine Lücke – deshalb hebbar. (Man kann sie nachdefinieren – stetig fortsetzen)

- Pole (Unendlichkeitssprungstellen)

Diese liegen an den übrigbleibenden Nennernullstellen der gekürzten Darstellung. Ist die Nennernullstelle von ungeradzahlgiger Ordnung, so hat das Schaubild dort einen Pol mit Vorzeichenwechsel. (Pol mit VZW)

Ist die Nennernullstelle von geradzahlgiger Ordnung, so hat das Schaubild dort einen Pol ohne Vorzeichenwechsel. (Pol ohne VZW)

#### v) Nullstellen

Nullstellen der gekürzten gebrochenrationalen Funktion sind gleich den Nullstellen des übrigbleibenden Zählerpolynoms.

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0$$

vereinfacht sich zu:

$$p(x) = 0$$

## 10. Wurzelfunktionen

Anders als bei gebrochenrationalen Funktionen, deren Definitionsbereich alle reellen Zahlen bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen umfaßt, kann es bei Wurzelfunktionen ganze Intervalle der  $x$ -Achse geben, für welche der Funktionsterm nicht definiert ist. Ein weiterer Unterschied betrifft die Differenzierbarkeit. Während eine rationale Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, kann eine Wurzelfunktion am Rand ihres Definitionsintervalls zwar noch definiert, muss aber nicht differenzierbar sein.

Das Verhalten einer Wurzelfunktion am Rand ihres Definitionsbereichs erfordert meist eine gesonderte Untersuchung. Ist der Definitionsbereich unbeschränkt, so kann das Schaubild waagrechte oder schiefe Asymptoten besitzen. Deren Ermittlung ist jedoch nicht mehr in ebenso einfacher Weise (z. B. nicht mehr durch Polynomdivision) möglich wie bei gebrochenrationalen Funktionen.

### Bemerkung:

Die Wurzelfunktionen bilden keine in gleicher Weise übersichtliche Funktionenfamilie wie z. B. die gebrochenrationalen Funktionen.

## 11. Trigonometrische Funktionen

Die folgenden trigonometrischen Funktionen

$$f(x) = a \sin[b(x + c)] + d \text{ und } f(x) = a \cos[b(x + c)] + d$$

sind für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

Die Parameter haben folgende Bedeutungen:

$ a $	Amplitude der Funktion
$p = \frac{2\pi}{ a }$	Periode der Funktion und es gilt: $f(x + p) = f(x)$
$c$	Verschiebung in $x$ -Richtung
$d$	Verschiebung in $y$ -Richtung

### 11.1. Symmetrie

Die Sinus-Funktion ist punktsymmetrisch zum Ursprung und die Cosinus-Funktion ist achsensymmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse. Es gilt also:

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ und } \cos(-x) = \cos x$$

### 11.2. Nullstellen der einfachen trigonometrischen Funktionen

$$\sin x = 0$$

$$x_k = k\pi, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Ferner gilt für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\sin(k\pi) = 0$$

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^k)(-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\cos x = 0$$

$$x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{k+1})(-1)^{\frac{k}{2}}$$

### 11.3. Der Zusammenhang zwischen Sinus- und Cosinus-Funktion

Der Sinus ist eine um  $\frac{\pi}{2}$  nach rechts verschobener Cosinus, es gilt also:

$$\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Der Cosinus ist eine um  $\frac{\pi}{2}$  nach rechts verschobener Minus-Sinus, es gilt also:

$$\cos x = -\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

Weitere Zusammenhänge

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ mit } x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

### 11.4. Einige Werte der einfachen trigonometrischen Funktionen

$x$ in $rad$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

Umrechnung von  $rad$  in Grad:

$\alpha$  ist ein Winkel in Grad  $x$  ist ein Winkel in  $rad$

Es gilt:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}$$

## 12. Exponentialfunktionen

Einfache Exponentialfunktionen sind Funktionen, die die unabhängige Variable  $x$  im Exponent stehen haben. Ihre Darstellung sieht wie folgt aus:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

Man nennt  $a$  konstanten Faktor und  $b$  die Basis der Exponentialfunktion  $f$ .

i) Für  $a > 0$

Ist  $0 < b < 1$ , so ist die zugehörige Exponentialfunktion streng monoton fallend,  
ist  $b > 1$ , so ist sie streng monoton steigend.

ii) Für  $a < 0$

Ist  $0 < b < 1$ , so ist die zugehörige Exponentialfunktion streng monoton steigend,  
ist  $b > 1$ , so ist sie streng monoton fallend.

## 12.1. Potenzgesetze

$$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$$

$$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$$

$$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$$

$$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$$

Man kommt auch nicht um den Logarithmus herum. Wie löst man also folgende Exponentialgleichung?

$$b^x = c \quad | \ln \quad (\text{das nennt man durchlogarithmieren})$$

$$x \cdot \ln b = \ln c$$

$$x = \frac{\ln c}{\ln b}$$

ln bedeutet *Logarithmus naturalis*, das ist der Logarithmus zur Basis  $e$

Die oben genannten einfachen Exponentialfunktionen  $f$  liegen alle oberhalb bzw. unterhalb der  $x$ -Achse, das hängt jeweils vom konstanten Faktor  $a$  ab:

i)  $f$  liegt oberhalb der  $x$ -Achse

$$f(x) > 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } a > 0$$

ii)  $f$  liegt unterhalb der  $x$ -Achse

$$f(x) < 0 \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \text{ und alle } a < 0$$

Setzt man  $a = 1$  und  $b = e$ , so erhält man die einfachste aller Exponentialfunktionen nämlich die sogenannte  $e$ -Funktion. Die Zahl  $e$  nennt man Eulersche Zahl und man erhält sie, wie folgt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828 \dots$$

Wenngleich dies auf den ersten Blick doch recht kompliziert erscheint, so hat die Funktion  $f(x) = e^x$  doch einige Vorteile:

Ihre Ableitung geht nämlich in sich selbst über

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \quad f''(x) = e^x \text{ usw.}$$

Bei anderen, komplizierteren Exponentialfunktionen ist dies nicht mehr der Fall

$$f(x) = a \cdot b^x \quad f'(x) = a(\ln b) \cdot b^x$$

$$f(x) = a \cdot b^{g(x)} \quad f'(x) = a(\ln b) \cdot g'(x) \cdot b^{g(x)}$$

## 12.2. Diskussion der einfachsten Exponentialfunktion, der $e$ -Funktion

i) Definitionsbereich

Die Funktion  $f(x) = e^x$  ist für alle Werte von  $x$  definiert:  $x \in \mathbb{R}$

## ii) Symmetrie

Es liegt keine der bekannten Symmetrien vor, die  $e$ -Funktion ist also weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

## iii) Asymptoten

Man unterscheidet folgende vier einfachste Typen von Funktionen:

- $f(x) = e^x$ , wobei gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow +\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- $f(x) = -e^x$ , wobei gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \rightarrow -\infty \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

- $f(x) = e^{-x}$ , wobei gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow +\infty$$

- $f(x) = -e^{-x}$ , wobei gilt:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow -\infty$$

## iv) Nullstellen

Die Funktion  $f$  besitzt keine Nullstellen.

## 13. Wachstums- und Zerfallsprozesse

### 13.1. Natürliches Wachstum

$$f'(t) \sim f(t)$$

Die momentane Wachstumsgeschwindigkeit ist proportional zum augenblicklich vorhandenen Bestand oder anders geschrieben:

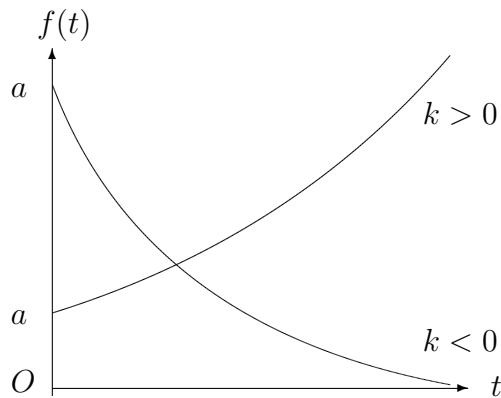
$$f(t) = ae^{kt}, \text{ mit } t \geq 0, a > 0, k \neq 0$$

Ist  $k > 0$ , so handelt es sich um einen Wachstumsprozeß, ist  $k < 0$  handelt es sich um einen Zerfallsprozeß.

Zugehörige Differentialgleichung	$k > 0$ : Wachstumsprozeß	$k < 0$ : Zerfallsprozeß
$f'(t) = kf(t)$	$f(0) = a$	$f(0) = a$
$\frac{f'(t)}{f(t)} = k$	$\lim_{t \rightarrow \infty} ae^{kt} \rightarrow +\infty$	$\lim_{t \rightarrow \infty} ae^{kt} = 0^+$
$\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = kt + c$	$f'(t) = kae^{kt} > 0$	$f'(t) = kae^{kt} < 0$
$\ln f(t) = kt + c$	streng monoton wachsend	streng monoton fallend
$f(t) = e^{kt+c} = \underbrace{e^c}_a e^{kt} = ae^{kt}$	keine waagrechte Tangente	keine waagrechter Tangente

$k$  heißt Wachstumskonstante. Man gibt auch oft prozentuale Zu- bzw. Abnahme  $p$  pro Zeiteinheit an oder etwa die Verdoppelungs- bzw. Halbwertszeit  $T_2$  bzw.  $T_{\frac{1}{2}}$ . Dabei gilt:

$$\begin{array}{ll} \text{Wachstumsfunktion} & k = \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right) \quad k = \frac{\ln 2}{T_2} \\ \text{Zerfallsfunktion} & k = \ln\left(1 - \frac{p}{100}\right) \quad k = \frac{\ln 2}{T_{\frac{1}{2}}} \end{array}$$



### 13.2. Beschränktes Wachstum

$$f'(t) \sim (G - f(t)) \text{ mit } G > f(t)$$

Der Zuwachs pro Zeiteinheit ist umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand  $f(t)$  der oberen Grenze  $G$  nähert oder anders geschrieben:

$$f(t) = G - ae^{-kt}, \text{ mit } t \geq 0, a > 0, k > 0$$

Zugehörige Differentialgleichung

$$f'(t) = k(G - f(t))$$

$$\frac{-f'(t)}{G - f(t)} = -k$$

$$\int \frac{-f'(t)}{G - f(t)} dt = -k$$

$$\ln(G - f(t)) = -kt + c$$

$$G - f(t) = e^{-kt+c} = \underbrace{e^c}_a e^{-kt} = ae^{-kt}$$

$$f(t) = G - ae^{-kt}$$

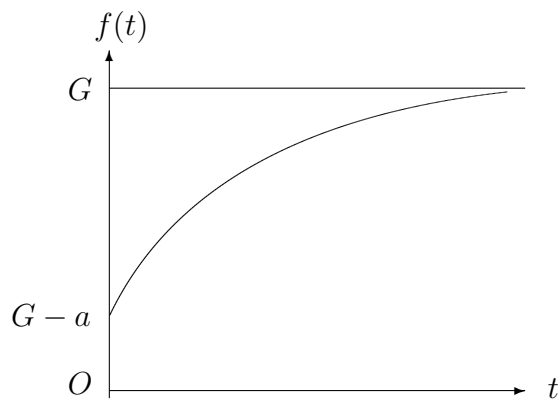
$$f(0) = G - a$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (G - ae^{-kt}) = G^-$$

$$f'(t) = kae^{-kt} > 0$$

streng monoton wachsend

keine waagrechte Tangente



### 13.3. Beschränkter Zerfall

$$f'(t) \sim (G - f(t)) \text{ mit } G < f(t)$$

Die Abnahme pro Zeiteinheit ist umso geringer, je mehr sich der momentane Bestand  $f(t)$  der unteren Grenze  $G$  nähert oder anders geschrieben:

$$f(t) = G + ae^{-kt}, \text{ mit } t \geq 0, a > 0, k > 0$$

Zugehörige Differentialgleichung

$$f'(t) = k(G - f(t)) = -k(f(t) - G)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t) - G} = -k$$

$$\int \frac{f'(t)}{f(t) - G} dt = -k$$

$$\ln(f(t) - G) = -kt + c$$

$$f(t) - G = e^{-kt+c} = \underbrace{e^c}_a e^{-kt} = ae^{-kt}$$

$$f(t) = G + ae^{-kt}$$

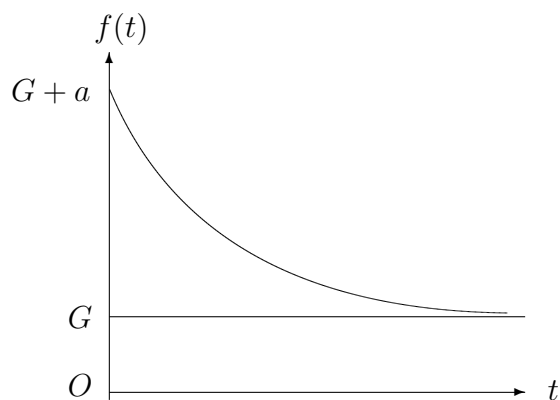
$$f(0) = G + a$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (G + ae^{-kt}) = G^+$$

$$f'(t) = -kae^{-kt} < 0$$

streng monoton fallend

keine waagrechte Tangente



### 13.4. Logistisches Wachstum

$$f'(t) \sim f(t)(G - f(t)) \text{ mit } G > f(t)$$

Der Zuwachs pro Zeiteinheit  $f'(t)$  ist sowohl zum vorhandenen Bestand  $f(t)$  als auch zum noch verfügbaren Rest einer das Wachstum begrenzenden Kapazität  $(G - f(t))$  proportional oder anders geschrieben:

$$f(t) = \frac{aG}{a + e^{-Gkt}}, \text{ mit } t \geq 0, a > 0, G > 0$$

Zugehörige Differentialgleichung

$$f'(t) = kf(t)(G - f(t))$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)(G - f(t))} = k$$

$$\frac{\frac{1}{G}f'(t)}{f(t)} + \frac{\frac{1}{G}f'(t)}{G - f(t)} = k$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{f'(t)}{G - f(t)} = Gk$$

$$\int \left( \frac{f'(t)}{f(t)} + \frac{f'(t)}{G - f(t)} \right) dt = Gkt + c$$

$$\ln f(t) - \ln(G - f(t)) = Gkt + c$$

$$\ln \frac{f(t)}{G - f(t)} = Gkt + c$$

$$\frac{f(t)}{G - f(t)} = e^{Gkt+c} = \underbrace{e^c}_a e^{Gkt}$$

$$f(t) = Gae^{Gkt} - f(t)ae^{Gkt}$$

$$f(t)(1 + ae^{Gkt}) = Gae^{Gkt}$$

$$f(t) = \frac{Gae^{Gkt}}{1 + ae^{Gkt}}$$

$$f(t) = \frac{Gae^{Gkt}}{e^{Gkt}(e^{-Gkt} + a)}$$

$$f(t) = \frac{aG}{a + e^{-Gkt}}$$

verwendete Partialbruchzerlegung

$$\frac{f'(t)}{f(t)(G - f(t))} = \frac{A}{f(t)} + \frac{B}{G - f(t)}$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)(G - f(t))} = \frac{AG - Af(t) + Bf(t)}{f(t)(G - f(t))} = \frac{AG + f(t)(B - A)}{f(t)(G - f(t))}$$

Koeffizientenvergleich liefert:

$$A = B \quad AG = f'(t)$$

$$A = \frac{1}{G}f'(t) \quad B = \frac{1}{G}f'(t)$$

$$\frac{f'(t)}{f(t)(G - f(t))} = \frac{\frac{1}{G}f'(t)}{f(t)} + \frac{\frac{1}{G}f'(t)}{G - f(t)}$$

Besondere Eigenschaften dieser Funktion:

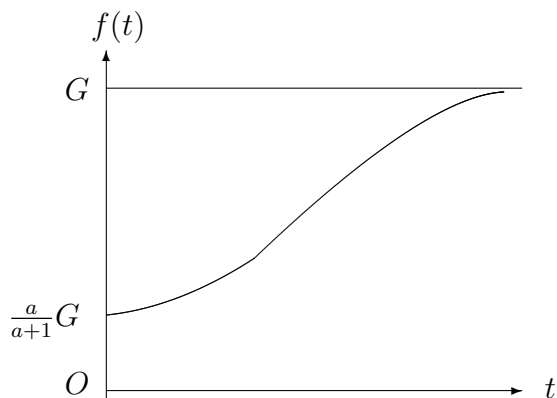
$$f(0) = \frac{a}{a+1}G$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{aG}{a + e^{-Gkt}} = G^-$$

$$f'(t) = G^2ka \frac{e^{-Gkt}}{(a + e^{-Gkt})^2}, \quad f''(t) = G^2k^3a \frac{e^{-Gkt}(e^{-Gkt} - a)}{(a + e^{-Gkt})^3}$$

streng monoton wachsend

keine waagrechte Tangente, 1 Wendepunkt



**Hinweis:**

Der Wendepunkt ist der Punkt des maximalen Zuwachses. Man erhält ihn, indem man die zweite Ableitung Null setzt:  $f''(t) = 0$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow e^{-Gkt} - a = 0 \Rightarrow t_W = -\frac{\ln a}{Gk}$$

**14. Verschiebungen und Dehnungen von Funktionen im kartesischen Koordinatensystem**

Wir betrachten die Auswirkungen auf Funktionsvorschriften und deren Schaubilder

**14.1. Verschiebung in y-Richtung**

Abbildungsgleichung	Gleichung Urbild	Gleichung Bild
$x^* = x, \quad y^* = y + c$	$y = f(x)$	$y^* = f(x) + c$

$c > 0$ : Verschiebung nach oben

$c < 0$ : Verschiebung nach unten

**14.2. Verschiebung in x-Richtung**

Abbildungsgleichung	Gleichung Urbild	Gleichung Bild
$x^* = x + c, \quad y^* = y$	$y = f(x)$	$y^* = f(x - c)$

$c > 0$ : Verschiebung nach rechts

$c < 0$ : Verschiebung nach links

**14.3. Dehnung parallel zur y-Achse (x-Achse fest)**

Abbildungsgleichung	Gleichung Urbild	Gleichung Bild
$x^* = x, \quad y^* = cy$	$y = f(x)$	$y^* = cf(x)$

$c > 1$ : Streckung in y-Richtung

$0 < c < 1$ : Stauchung in y-Richtung

$c < 0$ : zusätzliche Spiegelung an der x-Achse

#### 14.4. Dehnung parallel zur $x$ -Achse ( $y$ -Achse fest)

Abbildungsgleichung	Gleichung Urbild	Gleichung Bild
$x^* = cx, \quad y^* = y$	$y = f(x)$	$y^* = f\left(\frac{x}{c}\right)$

$c > 1$ : Streckung in  $x$ -Richtung

$0 < c < 1$ : Stauchung in  $x$ -Richtung

$c < 0$ : zusätzliche Spiegelung an der  $y$ -Achse

### 15. Allgemeine Symmetrie und Spiegelung von Schaubildern

#### 15.1. Allgemeine Symmetrie

i) Achsensymmetrie zu einer Achse  $x = a$  parallel zur  $y$ -Achse

$$f(a + h) = f(a - h)$$

Spezialfall:  $a = 0$  – Achsensymmetrie bezüglich  $y$ -Achse

ii) Punktsymmetrie zu einem Punkt  $P(a/b)$

$$b = \frac{1}{2}(f(a + h) + f(a - h))$$

Spezialfall:  $P(0/0)$  – Punktsymmetrie zum Ursprung

#### 15.2. Spiegelung von Schaubildern

i) Achsenspiegelung von  $y = f(x)$  an der zur  $x$ -Achse parallelen Geraden  $y = b$

Abbildungsgleichung	Gleichung der gespiegelten Funktion
$x^* = x, \quad y^* = 2b - y$	$y^* = 2b - f(x)$

Spezialfall:  $b = 0$  Achsenspiegelung an der  $x$ -Achse

ii) Achsenspiegelung von  $y = f(x)$  an der zur  $y$ -Achse parallelen Geraden  $x = a$

Abbildungsgleichung	Gleichung der gespiegelten Funktion
$x^* = 2a - x, \quad y^* = y$	$y^* = f(2a - x)$

Spezialfall:  $a = 0$  Achsenspiegelung an der  $y$ -Achse

iii) Punktspiegelung von  $y = f(x)$  am Punkt  $P(a/b)$

Abbildungsgleichung	Gleichung der gespiegelten Funktion
$x^* = 2a - x, \quad y^* = 2b - y$	$y^* = 2b - f(2a - x)$

Spezialfall:  $P(0/0)$  Punktspiegelung am Ursprung

### 16. Nullstellen einer Funktion $f(x)$

Eine stetige Funktion  $f$  hat im Intervall  $[a; b]$  mindestens eine Nullstelle, wenn die Funktionswerte der Intervallgrenzen  $f(a)$  und  $f(b)$  unterschiedliches Vorzeichen haben.

Sie hat genau eine Nullstelle, wenn sie noch zusätzlich streng monoton im Intervall  $[a; b]$  ist.

## 17. Schnitt zweier Funktionen $f(x)$ und $g(x)$

### i) Schnittpunkt

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  schneiden sich an der Stelle  $x_0$ , wenn gilt:

$$f(x_0) = g(x_0)$$

### ii) Berührungspunkt

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  berühren sich an der Stelle  $x_0$ , haben also eine gemeinsame Tangente an dieser Stelle, wenn gilt:

$$f(x_0) = g(x_0) \wedge f'(x_0) = g'(x_0)$$

### iii) Orthogonaler Schnittpunkt

Zwei Funktionen  $f$  und  $g$  schneiden sich orthogonal an der Stelle  $x_0$ , wenn gilt:

$$f(x_0) = g(x_0) \wedge f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1$$

## 18. Scharkurven

Scharkurven, sind die Schaubilder von Funktionen, die einen Parameter  $t \in I$ , mit  $I \in \mathbb{R}$  enthalten und hier mit  $f_t(x)$  bezeichnet werden. Führt man eine Kurvendiskussion durch, so hängen in der Regel die Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte von dem Parameter  $t$  ab, deren Ortskurven man bestimmen kann.

### 18.1. Gemeinsame Punkte einer Scharkurve

Sucht man die gemeinsamen Punkte einer Scharkurve, so will man die von  $t$  unabhängigen Punkte haben, die alle Schaubilder der Funktionenschar gemeinsam haben.

#### Strategie 1:

Setze  $f_{t_1}(x) = f_{t_2}(x)$ , mit  $t_1 \neq t_2 \Rightarrow t_1 - t_2 \neq 0$  und suche die von  $t_1$  und  $t_2$  unabhängigen Lösungen von der Variablen  $x$ .

#### Strategie 2:

Bilde die 1. Ableitung nach dem Parameter  $t$  und setze diese gleich Null  $\frac{d}{dt}f_t(x) = 0$  und suche die von  $t$  unabhängigen Lösungen von der Variablen  $x$ .

### 18.2. Verbotene oder erlaubte Punkte einer Scharkurve

Man sucht die verbotenen Punkte einer Scharkurve, also diejenigen Punkte, die von keiner der Scharkurven erreicht werden können.

#### Strategie:

Setze  $f_t(x) = y$  und löse die Funktionsgleichung nach dem Parameter  $t$  auf.

Ist z. B.  $t > 0$  für die Scharkurve vorgegeben, so ist  $t < 0$  der verbotene Bereich des Parameters.

Setze die nach  $t$  aufgelöste Scharkurve für den verbotenen Bereich des Parameters  $t$  ein und löse die entstehende Ungleichung, die nur noch von  $x$  und  $y$  abhängt. Die Lösung dieser Ungleichung ergibt den Bereich in dem kein Punkt der Schar liegen kann.

Man kann auch nach denjenigen Punkten einer Scharkurve fragen, die nur erreicht werden können – die erlaubten Punkte.

Hier verfährt man wie oben, nur setzt man den erlaubten Bereich des Parameters  $t$  ein und löst die entstehende Ungleichung.

### 18.3. Ortskurven

Bei Scharkurven  $f_t(x)$  mit dem Parameter  $t \in I$ , mit  $I \subseteq \mathbb{R}$  (auch als Formvariable bezeichnet), wird oft nach der Ortskurve  $k_{P_t}(x)$  eines Punktes  $P_t$  gefragt. Die Koordinaten dieses Punktes  $P_t(\underbrace{g(t)}_x / \underbrace{h(t)}_y)$  hängen vom Parameter  $t$  ab.

#### Strategie:

Gesucht ist die Verknüpfung zwischen  $y$  und  $x$

Löse die Gleichung  $x = g(t)$  nach dem Parameter  $t$  auf, bestimme damit den Definitionsbereich der Variablen  $x$  und setze das Ergebnis in  $y = h(t)$  ein.

Hieraus erhält man:  $y = k_{P_t}(x)$

#### Anmerkung:

Hängt eine der beiden Koordinaten des Punktes  $P_t$  nicht vom Parameter  $t$  ab, so vereinfacht sich das Problem auf folgende drei Fälle:

- $P_t(a/h(t)) \rightarrow x = a$  ist Ortskurve unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs von  $y$
- $P_t(g(t)/b) \rightarrow y = b$  ist Ortskurve unter Berücksichtigung des Definitionsbereichs von  $x$
- Ist die Ortskurve von mehreren verschiedenen Punkten gefragt, dann bestimmt man die Ortskurve der einzelnen Punkte separat. Bei symmetrisch liegenden Punkten und symmetrischer Funktion  $f_t(x)$  vereinfacht die Symmetrie die Problemstellung.

## 19. Extremwertaufgaben

Bei dem Gebiet der Extremwertaufgaben sucht man nach absolut maximalen bzw. minimalen Größen, wie z. B. Flächeninhalt eines Dreiecks, Umfang eines Rechtecks, Abstand zwischen zwei Punkten, Volumen eines Kegels, etc.

Strategie

- 1) Zielfunktion bestimmen aus der Geometrie des Problems
- 2) Intervall derjenigen Variablen festlegen, die absolut extremal werden soll
- 3) Ein- oder zweimal nach dieser Variablen ableiten – je nachdem wie kompliziert die Zielfunktion ist
- 4) 1. Ableitung Null setzen, damit erhält man mögliche relative Extrema und mit 2. Ableitung (oder VZW der 1. Ableitung) untersuchen, um welche Art von relativem Extremum es sich handelt
- 5) Den Zielfunktionswert ( $y$ -Wert des Extremums) ausrechnen

- 6) Den  $y$ -Wert der Intervallgrenzen bestimmen und mit dem  $y$ -Wert des Extremums vergleichen, ob evtl. ein Randextremum vorliegt.

## 20. Tangenten- und Normalenproblem

### 20.1. Tangenten- bzw. Normalengleichung durch einen Punkt auf dem Schaubild

Hierzu wird nur die Funktionsgleichung  $f(x)$  und die  $x$ -Koordinate des Punktes benötigt.

Strategie

Gegeben sind  $f(x)$  und  $x_0$

Zu bestimmen bleibt lediglich:

$$f(x_0), f'(x_0)$$

Die Tangentengleichung erhält man dann wie folgt:

$$t : \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

diese muss nur noch nach  $y$  aufgelöst werden.

Die Normalengleichung erhält man wie folgt:

$$n : \frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

diese muss nur noch nach  $y$  aufgelöst werden.

### 20.2. Tangentengleichungen durch einen Punkt nicht auf dem Schaubild

Hierzu wird nur die Funktionsgleichung  $f(x)$  und die  $x$ - und  $y$ -Koordinate des Punktes außerhalb des Schaubilds benötigt.

**Strategie:**

Gegeben sind  $f(x)$  und  $A(a/b)$ , mit  $b \neq f(a)$

Zu bestimmen bleiben lediglich die möglichen Berührungspunkte  $B_i(u_i/f(u_i))$ , die sich wie folgt berechnen:

$$\frac{b - f(u)}{a - u} = f'(u)$$

Dies ist eine Gleichung in  $u$ . Diese Gleichung bleibt zu lösen und der Index  $i$  gibt die Anzahl der Lösungen an, also wieviele Berührungspunkte es gibt. Sind die Lösungen  $u_i$  bestimmt, so kennt man also die  $x$ -Koordinaten der Berührungspunkte  $B_i$  und kann verfahren wie oben, da die Funktionsgleichung  $f(x)$  bekannt ist. Hieraus ergeben sich dann die verschiedenen Tangentengleichungen.

## 21. Das Newton-Verfahren

Verfahren zur näherungsweise Berechnung von Nullstellen:  $f(x) = 0$

Wir bestimmen nun die Vorschrift, die von einem Näherungswert  $x_n$  zum nächsten Näherungswert  $x_{n+1}$  führt. Die Gleichung der Tangente im Punkt  $Q_n(x_n/f(x_n))$  lautet:

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$$

Die Abszisse ( $x$ -Koordinate) ihrer Nullstelle liefert den neuen Näherungswert  $x_{n+1}$ . Diesen erhält man indem man die Tangentengleichung Null setzt.

$$f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = 0$$
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren lautet somit:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ mit } f'(x_n) \neq 0$$

## 22. Vollständige Induktion

Ist  $A(n)$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  eine Aussage über die Zahl  $n$  und sind die beiden folgenden Aussagen richtig:

### i) Induktionsanfang

Die Aussage gilt für ein  $n_0 \in \mathbb{N}$

Formal:  $A(n_0)$  ist wahr

### ii) Induktionsannahme

Gilt die Aussage für  $n > n_0$ , so auch für  $n + 1$

Formal:  $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

### iii) Induktionsschluß

Dann gilt die Aussage  $A(n)$  für jede natürliche Zahl  $n \geq n_0$