Etwas über Koordinaten

Ein Punkt ist genau durch 2 Koordinaten bestimmt $P(a/b)$. Alleine mit diesen Angaben kann man jedoch keinerlei Aussagen über seine direkte Umgebung machen. Liegt ein Punkt P auf dem Schaubild der Funktion $f(x)$, so gilt für seine Koordinaten: $P(a/f(a)) \rightarrow P \in f$

- Ist $a > 0 \Rightarrow$ Punkt P liegt **rechts** von der **y-Achse**
- Ist $a < 0 \Rightarrow$ Punkt P liegt **links** von der **y-Achse**
- Ist $a = 0 \Rightarrow$ Punkt P liegt **auf** der **y-Achse**

- Ist $f(a) > 0 \Rightarrow$ Punkt P liegt **oberhalb** von der **x-Achse**
- Ist $f(a) < 0 \Rightarrow$ Punkt P liegt **unterhalb** von der **x-Achse**
- Ist $f(a) = 0 \Rightarrow$ Punkt P liegt **auf** der **x-Achse**

Um etwas über die direkte Umgebung von $P(a/f(a))$ zu erfahren, untersucht man die ersten beiden Ableitungen an dieser Stelle:

$f'(a)$, die **1. Ableitung** an der Stelle a, gibt das **Steigungsverhalten** an.
(Das Schaubild in der direkten Umgebung von $P(a/f(a))$ geht bergauf oder bergab oder hat eine waagrechte Tangente)

$f''(a)$, die **2. Ableitung** an der Stelle a, gibt das **Krümmungsverhalten** an.
(Das Schaubild in der direkten Umgebung von $P(a/f(a))$ macht eine Links- oder eine Rechtskurve oder hat keine Krümmung).

- Ist $f'(a) > 0 \Rightarrow$ Schaubild geht bei $P(a/f(a))$ **bergauf**
- Ist $f'(a) < 0 \Rightarrow$ Schaubild geht bei $P(a/f(a))$ **bergab**
- Ist $f'(a) = 0 \Rightarrow$ Schaubild hat bei $P(a/f(a))$ eine **waagrechte Tangente**

- Ist $f''(a) > 0 \Rightarrow$ Schaubild macht bei $P(a/f(a))$ eine **Linkskurve**
- Ist $f''(a) < 0 \Rightarrow$ Schaubild macht bei $P(a/f(a))$ eine **Rechtskurve**
- Ist $f''(a) = 0 \Rightarrow$ Schaubild hat bei $P(a/f(a))$ **keine Krümmung**

Mit diesen beiden zusätzlichen Informationen, die man sich leicht durch die beiden Ableitungen besorgen kann, erhält man einen Überblick über die direkte Umgebung des Punktes P und schreibt dies wie folgt zu den Koordinaten dazu: $P(a/f(a);f'(a);f''(a))$

Etwas über Grenzwerte

Untersuchungen von Schaubildern $f(x)$ an bestimmten Stellen, z. B. Definitionslücken oder der Fall, dass die Variable x gegen Unendlich geht. Hier interessiert, was der Funktionswert an solchen Stellen macht. Strebt er nach Unendlich oder hat er einen bestimmten endlichen Wert.

Folgende Konventionen gelten:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$	Untersuchung der Funktionswerte „ganz weit rechts“
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	Untersuchung der Funktionswerte „ganz weit links“
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$	Untersuchung der Funktionswerte „ganz nah an der Stelle $x = x_0$“, aber wegen des Minuszeichens links davon
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$	Untersuchung der Funktionswerte „ganz nah an der Stelle $x = x_0$“, aber wegen des Pluszeichens rechts davon
$f(x) \to +\infty$	Funktionswerte „hauen nach oben ab“
$f(x) \to -\infty$	Funktionswerte „hauen nach unten ab“
$f(x) \to c^+$	Funktionswerte „streben von oben gegen c“
$f(x) \to c^-$	Funktionswerte „streben von unten gegen c“

Wie können Funktionen 2. Grades aussehen?

Jede ganzrationale Funktion 2. Grades $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a \neq 0$ ist achsensymmetrisch zu einer Geraden parallel zur y-Achse durch ihren Scheitel $S(\underbrace{-\frac{b}{2a}}_{x_S}/?)$.

Beweis durch stures rechnen:
Bestimmung der x-Koordinate des Scheitels: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 2ax + b = 0$$

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

Für Achsensymmetrie bezüglich $x = x_S$ muss gelten:

$$f(x_S - h) = f(x_S + h)$$

$$\begin{aligned} a\left(-\frac{b}{2a} - h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} - h\right) + c &= a\left(-\frac{b}{2a} + h\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a} + h\right) + c \\ a\left(\frac{b^2}{4a^2} + 2\frac{b}{2a}h + h^2\right) - \frac{b^2}{2a} - bh &= a\left(\frac{b^2}{4a^2} - 2\frac{b}{2a}h + h^2\right) - \frac{b^2}{2a} + bh \\ bh - bh &= -bh + bh \\ 0 &= 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

- Ist $a > 0$, so ist die Parabel **nach oben geöffnet**.
- Ist $a < 0$, so ist die Parabel **nach unten geöffnet**.
- Ist $0 < |a| < 1$, so hat die Parabel eine **breite Öffnung**.
- Ist $|a| > 1$, so hat die Parabel eine **schmale Öffnung**.

TYP I:

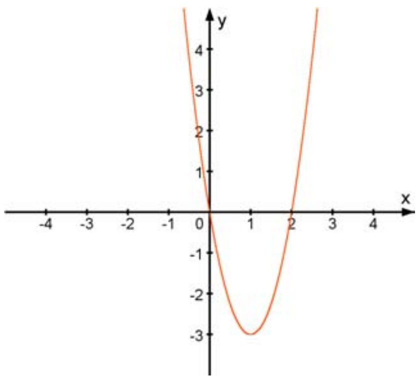
$a > 0, |a| > 1$

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = 3x^2 - 6x$

Koordinaten des Scheitels:

$S(1/-3)$



TYP II:

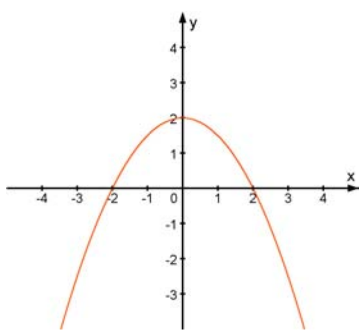
$a < 0, 0 < |a| < 1$

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

Koordinaten des Scheitels:

$S(0/2)$



Wie können Funktionen 3. Grades aussehen?

Jede ganzrationale Funktion 3. Grades $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a \neq 0$ besitzt genau einen Wendepunkt $W(\underbrace{-\frac{b}{3a}}_{x_W} / \underbrace{\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d}_{y_W})$ und ist zu diesem punktsymmetrisch.

Beweis durch stures rechnen:
Bestimmung des Wendepunktes: $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6ax + 2b = 0$$

$$x_W = -\frac{b}{3a}$$

$$y_W = f(x_W) = a(-\frac{b}{3a})^3 + b(-\frac{b}{3a})^2 + c(-\frac{b}{3a}) + d$$

$$= -\frac{ab^3}{27a^3} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{cb}{3a} + d$$

$$= -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d = \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d$$

Für Punktsymmetrie zum Wendepunkt $W(x_w / y_w)$ muss gelten:

$$f(x_W + h) + f(x_W - h) = 2y_W$$

Kleine Nebenrechnung, die sehr nützlich ist:

$$(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a^3 + 6ab^2$$

$$(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2a^2 + 2b^2$$

$$(a+b) + (a-b) = 2a$$

eingesetzt in Symmetrieformel:

$$a(2x_W{}^3 + 6x_W h^2) + b(2x_W{}^2 + 2h^2) + c(2x_W) + 2d = 2(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{cb}{3a} + d)$$

$$a((-\frac{b}{3a})^3 + 6(-\frac{b}{3a})h^2) + b((-\frac{b}{3a})^2 + 2h^2) + c(2(-\frac{b}{3a})) + 2d = \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2cb}{3a} + 2d$$

$$a(-2\frac{b^3}{27a^3} - \frac{2b}{a}h^2) + b(2\frac{b^2}{9a^2} + 2h^2) - 2\frac{cb}{3a} = \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2cb}{3a}$$

$$-\frac{2b^3}{27a^2} - 2bh^2 + \frac{2b^3}{9a^2} + 2bh^2 - \frac{2cb}{3a} = \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2cb}{3a}$$

$$\frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2cb}{3a} = \frac{4b^3}{27a^2} - \frac{2cb}{3a}$$

$$0 = 0 \quad \text{q.e.d.}$$

TYP I:

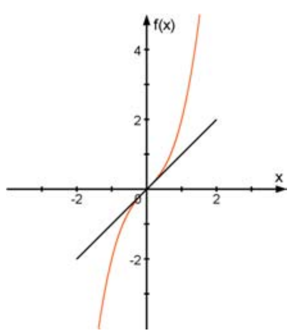
$a > 0, m_W > 0$

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = x^3 + x$

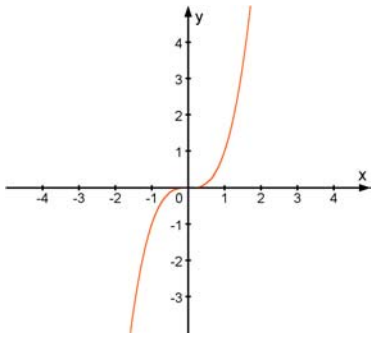
Gleichung der Wendetangente:

$y = x$



TYP II:

$a > 0, m_W = 0$



Als einfaches Beispiel:

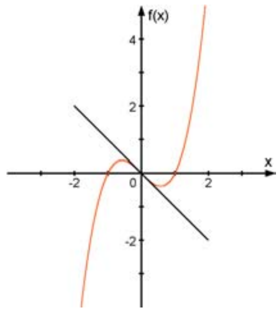
$f(x) = x^3$

Gleichung der Wendetangente:

$y = 0$

TYP III:

$a > 0, m_W < 0$



Als einfaches Beispiel:

$f(x) = x^3 - x$

Gleichung der Wendetangente:

$y = -x$

Dieselben Typen erhält man auch als „Faller“, also von der Form her gespiegelt an der x-Achse.

Wie können Funktionen 4. Grades aussehen?

Jede ganzrationale Funktion 4. Grades $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ mit $a \neq 0$ hat entweder zwei Wendepunkte oder keinen Wendepunkt.

Beweis durch stures rechnen:

$f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$

$f'''(x) = 24ax + 6b$

Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt: $f''(x) = 0$

$12ax^2 + 6bx + 2c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-6b \pm \sqrt{36b^2 - 96ac}}{24a} = -\frac{b}{4a} \pm \frac{1}{12a}\sqrt{9b^2 - 24ac} = -\frac{b}{4a} \pm \frac{\sqrt{3}}{12a}\sqrt{3b^2 - 8ac}$$

Diese quadratische Gleichung hat entweder

a) **zwei Lösungen**: $3b^2 > 8ac$

1. Fall: $c \neq 0 \Rightarrow x_{1,2}$ hängen von c ab $\Rightarrow f'''(x_{1,2}) \neq 0$, also gibt es **zwei** Wendepunkte.

2. Fall: $c = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{b}{2a}$

i) $b \neq 0 \Rightarrow$ zwei verschiedene Lösungen: $f'''(0) = 6b \neq 0, f'''(-\frac{b}{2a}) = -6b \neq 0$, also gibt es **zwei** Wendepunkte.

ii) $b = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$ ist **Doppelnullstelle** der 2. Ableitung, also existieren **keine** Wendepunkte, aber dafür ein Extremum.

b) **eine Lösung**: $3b^2 = 8ac$

Dies ist allerdings eine **Doppelnullstelle** der 2. Ableitung $x_{1,2} = -\frac{b}{4a}$, also existieren **keine** Wendepunkte, aber dafür ein Extremum.

c) **keine Lösung**: $3b^2 < 8ac$

Keine Lösung der quadratischen Gleichung, also existieren **keine** Wendepunkte.

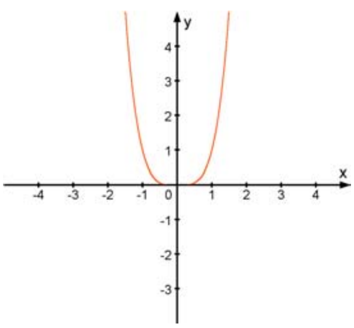
- Ist $a > 0$, so ist die Funktion **nach oben geöffnet**.
- Ist $a < 0$, so ist die Funktion **nach unten geöffnet**.

TYP I:

$a > 0$ und keine Wendepunkte

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = x^4$



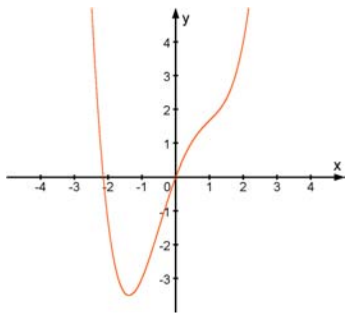
TYP II a:

$a > 0$ und zwei Wendepunkte

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2 + \frac{8}{3}x$

$m_{W_1} > 0$ und $m_{W_2} > 0$



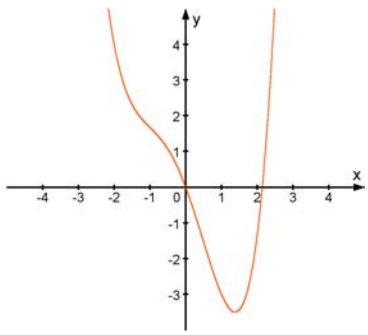
TYP II b:

$a > 0$ und zwei Wendepunkte

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{8}{3}x$

$m_{W_1} < 0$ und $m_{W_2} < 0$



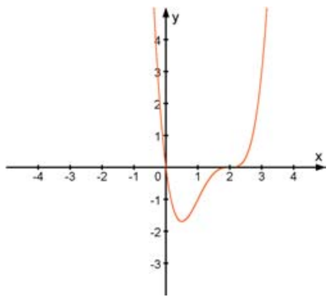
TYP III a:

$a > 0$ und zwei Wendepunkte

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$

$m_{W_1} > 0$ und $m_{W_2} = 0$



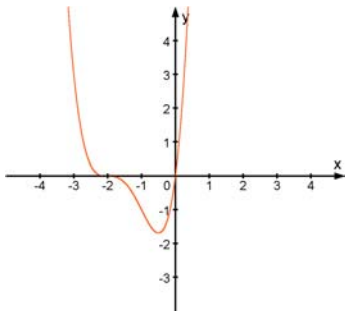
TYP III b:

$a > 0$ und zwei Wendepunkte

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$

$m_{W_1} = 0$ und $m_{W_2} < 0$



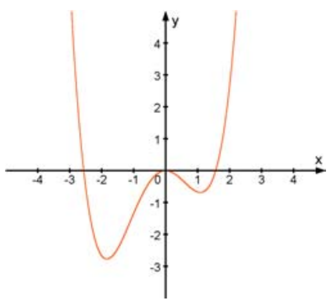
TYP IV:

$a > 0$ und zwei Wendepunkte

Als einfaches Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x^2$

$m_{W_1} > 0$ und $m_{W_2} < 0$



Dieselben Typen erhält man auch als „Faller“ (nach unten geöffnet), also von der Form her gespiegelt an der x-Achse.

Etwas über gebrochenrationale Funktionen

Definitionsbereich, Nullstellen, Pole, hebbare Stetigkeitslücken, Asymptoten

Beispiel:

Eine Funktion f mit $f(x)=\dfrac{-3x^4-3x^3+9x^2+3x-6}{4x^4-8x^3-28x^2+80x-48}$ ist in **Normalform** gegeben.

Zählergrad: 4
Gradfaktor des Zählers: -3
Nennergrad: 4
Gradfaktor des Nenners: 4

Man sieht leicht: Zählergrad ist gleich Nennergrad, also existiert eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung: $y=-\frac{3}{4}$

Für den **Definitionsbereich** von f bestimmt man die Nullstellen des Nenners und schließt diese aus der Menge der reellen Zahlen aus.

$$4x^4-8x^3-28x^2+80x-48=0$$
$$\Rightarrow x_{1,2}=2, x_3=1, x_4=-3$$
$$\Rightarrow D_f=\Re\setminus\{-3;1;2\}$$

Für die **Nullstellen** der Funktion f bestimmt man die Nullstellen des Zählers.

$$-3x^4-3x^3+9x^2+3x-6=0$$
$$\Rightarrow x_{5,6}=1, x_7=-1, x_8=-2$$

Nun kann man die Funktion f in **Nullstellenform** schreiben:

$$f(x)=-\tfrac{3}{4}\frac{(x-1)^2(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)^2(x+3)} \text{ mit } D_f=\Re\setminus\{-3;1;2\}$$

Man sieht, dass man diese Funktion kürzen kann, darf jedoch den Definitionsbereich nicht ändern:
Die **vollständig gekürzte Nullstellenform** lautet:

$$f(x)=-\tfrac{3}{4}\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+3)}=\frac{-3x^3-6x^2+3x+6}{4x^3-4x^2-32x+48} \quad \text{mit } D_f=\Re\setminus\{-3;1;2\}$$

Man sieht, dass sich eine Nennernullstelle rausgekürzt hat. An der Stelle $x_3=1$ befindet sich eine **hebbare Stetigkeitslücke** (ein Loch im Schaubild).

An den verbleibenden Nennernullstellen (Definitionslücken) befinden sich **Pole** (unendliche Sprungstellen).
An der Stelle $x_{1,2}=2$ ist ein **Pol ohne Vorzeichenwechsel**, weil die **Ordnung** dieser Nullstelle 2, also **gerade** ist.
An der Stelle $x_4=-3$ ist ein **Pol mit Vorzeichenwechsel**, weil die **Ordnung** dieser Nullstelle 1, also **ungerade** ist.

Wie ist jedoch das Vorzeichenverhalten an diesen Stellen?

$$\lim_{x\to 2^-} \overbrace{-\tfrac{3}{4}}^{<0} \frac{\overbrace{(x-1)}^{>0}\overbrace{(x+1)}^{>0}\overbrace{(x+2)}^{>0}}{\underbrace{(x-2)^2}_{>0}\underbrace{(x+3)}_{>0}} \to -\infty \text{, also bei } x_{1,2}=2 \text{ ein Pol ohne VZW von } - \to -$$

$$\lim_{x\to -3^-} \overbrace{-\tfrac{3}{4}}^{<0} \frac{\overbrace{(x-1)}^{<0}\overbrace{(x+1)}^{<0}\overbrace{(x+2)}^{<0}}{\underbrace{(x-2)^2}_{>0}\underbrace{(x+3)}_{<0}} \to -\infty \text{, also bei } x_4=-3 \text{ ein Pol mit VZW von } - \to +$$

Die Funktion f hat jeweils Nullstellen der Ordnung 1, also ungerader Ordnung an den Stellen $x_6=1, x_7=-1, x_8=-2$, also Schnittpunkte mit der x-Achse und keine Berührpunkte, wie das bei Nullstellen gerader Ordnung wäre.

Für die **Asymptote** empfiehlt sich eine Polynomdivision:

$$(-3x^3-6x^2+3x+6):(4x^3-4x^2-32x+48) = \overbrace{-\tfrac{3}{4}}^{G(x)} + \overbrace{\frac{-9x^2-21x+42}{4x^3-4x^2-32x^2+48}}^{R(x)}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(-3x^3+3x^2+24x-36)} \\ \qquad -9x^2-21x+42 \end{array}$$

Die **Asymptotenform** der Funktion f lautet:

$$f(x) = -\tfrac{3}{4} + \frac{-9x^2-21x^2+42}{4x^3-4x^2-32x+48} \text{ mit } D_f = \Re \setminus \{-3;1;2\}$$

Man sieht, dass man die Funktion f als Summe einer ganzrationalen Funktion G und einer gebrochenrationalen Restfunktion R schreiben kann. Bei der Restfunktion R ist der Zählergrad kleiner als der Nennergrad.
Also gilt: $f(x)=G(x)+R(x)$

Mathematisch exakter Nachweis, dass $G(x)$ Asymptote ist:

$$\lim_{|x|\to\infty} f(x) = \lim_{|x|\to\infty} (G(x)+R(x))$$

$$\lim_{|x|\to\infty} (f(x)-G(x)) = \lim_{|x|\to\infty} R(x) = 0,$$

weil der Zählergrad von R kleiner ist als der Nennergrad, also nähert sich f der Funktion G, also ist G Asymptote. Wenn man wissen möchte, ob sich f von oben oder unten nähert, so bildet man den Grenzwert:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(-\tfrac{3}{4} + \frac{-9x^2-21x^2+42}{4x^3-4x^2-32x+48}\right) = -\tfrac{3}{4}^-$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(-\tfrac{3}{4} + \frac{-9x^2-21x^2+42}{4x^3-4x^2-32x+48}\right) = -\tfrac{3}{4}^+$$

Die Nullstellen der gebrochenrationalen Restfunktion R, sind - wie man leicht sieht - die Schnittpunkte der Funktion f mit ihrer Asymptote G:

$$\underbrace{f(x)}_{G(x)+R(x)} = G(x)$$

$$G(x) + R(x) = G(x)$$

$$\Leftrightarrow\ R(x) = 0$$

$$-9x^2 - 21x + 42 = 0$$

$x_1 \approx -3{,}62 \qquad x_2 \approx 1{,}29$

D. h., die Funktion f schneidet ihre Asymptote G in zwei Punkten.

Wir haben nun drei verschiedene Schreibweisen für die Funktion f:

Normalform:

$$f(x) = \frac{-3x^4 - 3x^3 + 9x^2 + 3x - 6}{4x^4 - 8x^3 - 28x^2 + 80x - 48} \text{ mit } D_f = \Re \setminus \{-3; 1; 2\}$$

Vorteile dieser Darstellungsform:

- man sieht leicht das Symmetrieverhalten

Nullstellenform:

$$f(x) = -\tfrac{3}{4}\frac{(x-1)^2(x+1)(x+2)}{(x-1)(x-2)^2(x+3)} \text{ mit } D_f = \Re \setminus \{-3; 1; 2\}$$

bzw. **vollständig gekürzte Nullstellenform**:

$$f(x) = -\tfrac{3}{4}\frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x-2)^2(x+3)} \text{ mit } D_f = \Re \setminus \{-3; 1; 2\}$$

Vorteile dieser Darstellungsformen:

- man sieht leicht Definitionsbereich, Nullstellen, Pole, hebbare Stetigkeitslücken

Asymptotenform:

$$f(x) = -\tfrac{3}{4} + \frac{-9x^2 - 21x^2 + 42}{4x^3 - 4x^2 - 32x + 48} \text{ mit } D_f = \Re \setminus \{-3; 1; 2\}$$

Vorteile dieser Darstellungsform:

- man sieht leicht das Verhalten für $x \to \pm\infty$
- man sieht, ob die Funktion f ihre Asymptote G schneidet oder nicht

Das Schaubild der Funktion: