**Aufgabe 1:**
Es sei $f_t(x) = \frac{t-2}{t^2}(2x^3 - 3tx^2) + 1$ mit $x \in R, t \in R \setminus \{0; 2\}$ gegeben. Bestimme die Extremwerte und den Wendepunkt. Für welche Werte von t ist der allen $f_t$ gemeinsame Extremwert ein Tiefpunkt? Bestimme die Ortskurve des von t abhängigen Extremwerts.

**Aufgabe 2:**
Es seien $f_t(x) = 2t^2|x| - tx^2$ mit $t > 0$ und $g(x) = |x|^3$ gegeben. Untersuche beide Funktionen auf Symmetrie, Nullstellen und Wertemenge. $f_t$ und die x-Achse schließen für $x \geq 0$ eine Fläche mit der Maßzahl A ein. Zeige, dass das Schaubild von g diese Fläche in einem von t unabhängigen Verhältnis teilt. Zeige, dass $F_t(x) = t^2 x \cdot |x| - \frac{t}{3}x^3$ Stammfunktion von $f_t$ ist und bestimme die gemeinsamen Punkte von $F_t$ und g in Abhängigkeit von t.

**Aufgabe 3:**
Es sei $f_t(x) = \frac{1}{9}x^4 - \frac{8t}{9}x^3 + 2t^2x^2$ mit $t \in R \setminus \{0\}$ gegeben. Untersuche die Funktion auf Extrem- und Wendepunkte. Zeichne $f_1$. Welche Funktionen $f_t$ haben genau einen Sattelpunkt? Bestimme die Gleichung der Ortskurve aller Sattelpunkte.

**Aufgabe 4:**
Es seien $f(x) = -\frac{1}{32}x^3 + \frac{3}{2}x$ und $p_a(x) = ax^2 + \frac{7}{2}x$, mit $a \in R^+$ gegeben. Welche Parabel $p_a$ berührt die Kurve von f? Wie groß ist der Flächeninhalt zwischen den beiden Kurven?

**Aufgabe 5:**
Zu jedem $t > 0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{2}tx^2 + \frac{5}{2}t^2$ mit $x \in R$.
Ihr Schaubild sei $K_t$.

(a) Untersuche $K_t$ auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne $K_1$ für $-4 \leq x \leq 4$.
(b) Bestimme die Ortskurve C aller Tiefpunkte. Zeichne C in das vorhandene Achsenkreuz ein.
(c) Bestimme a ($a \neq 0$) so, dass die Parabel $P_t$ mit der Gleichung $p_{a,t}(x) = ax^2 - \frac{1}{4t}$ die Kurve $K_t$ in deren Wendepunkte schneidet.

**Zeige:**
$K_t$ und $P_t$ schneiden sich außer in den beiden Wendepunkten von $K_t$ in zwei weiteren Punkten.

**Aufgabe 6:**
Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2t}x^4 + x^2 - \frac{3}{2}t$ mit $x \in R$.
Ihr Schaubild sei $K_t$.

(a) Untersuche $K_t$ auf Symmetrie, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte. Zeichne $K_1$ für $-2 \leq x \leq 2$.
(b) Zeige: Für $t_1, t_2 \in R^+$ und $t_1 \neq t_2$ haben die zugehörigen Schaubilder keinen Punkt gemeinsam.
(c) Gib die Ortskurve der Wendepunkte an.

**Aufgabe 7:**

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{4}x^4 - tx^2$ mit $x \in R$. Ihr Schaubild sei $K_t$.

(a) Ermittle die Gleichung der Kurve C, auf der alle Tiefpunkte liegen.
(b) Begründe, warum es keine Kurve $K_t$ gibt, die C senkrecht schneidet.

**Aufgabe 8:**

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 + t^2x - 3$ mit $x \in R$. Ihr Schaubild sei $K_t$.

(a) $P_t$ sei diejenige Parabel zweiter Ordnung mit der Symmetrieachse $x = -\frac{3}{4}$, die $K_t$ im Wendepunkt berührt. Bestimme die Gleichung der Parabel.
(b) Für welchen Wert von t hat der Inhalt des von der Wendetangente, der Normalen im Wendepunkt und der x-Achse gebildeten Dreiecks ein Minimum? Führe den Nachweis des Minimums ohne die zweite Ableitung durch.

**Aufgabe 9:**

Für jedes $t \in R \setminus \{0\}$ ist eine Funktion $f_t$ gegeben durch $f_t(x) = \frac{1}{2}x^3 - tx^2 + \frac{1}{2}t^2x;\quad x \in R$
Ihr Schaubild sei $K_t$

(a) Untersuche $K_t$ auf gemeinsame Punkte mit den Koordinatenachsen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte. Zeichne $K_3$ im Bereich $-1 \le x \le 4$ sowie seine Wendetangente.
(b) Welche Kurve C bilden die Wendepunkte $W_t$ der Kurven $K_t$ für alle zugelassenen Werte von t? Für welche Werte von t schneiden C und $K_t$ einander in $W_t$ senkrecht?
(c) Eine Parabel zweiter Ordnung $P_t$ geht durch die gemeinsamen Punkte von $K_t$ mit der x-Achse und berührt $K_t$ im Ursprung. Weise durch Rechnung nach, dass $K_t$ und $P_t$ keine weiteren gemeinsamen Punkte haben. $K_t$ teilt die von $P_t$ und der x-Achse eingeschlossene Fläche. In welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Teilflächen?
(d) Welche Beziehung muß zwischen $t_1$ und $t_2$ $(t_1 \neq t_2)$ bestehen, damit sich die Kurven $K_{t_1}$ und $K_{t_2}$ im Ursprung berühren?

**Zeige:**

Zwei Kurven $K_{t_1}$ und $K_{t_2}$, die sich nicht im Ursprung berühren, schneiden sich genau in zwei Punkten.

**Aufgabe 10:**
Gegeben seien die Funktionen f und p mit:

$$f(x) = -\frac{1}{30}x^4 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{1}{10}x^2 - \frac{26}{15}x + 2$$

$$p(x) = \frac{11}{30}x^2 - \frac{23}{15}x + \frac{17}{10}$$

(a) Zeige, dass f an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 5$ jeweils eine Nullstelle besitzt. Berechne die restlichen Nullstellen. Bringe f auf Nullstellenform und mache eine qualitative Skizze. Führe eine komplette Kurvendiskussion durch und verfeinere damit Deine Skizze.
(b) Begründe mit der Lage des Extremwerts, dass p keine Nullstellen hat und zeichne p in das selbe Koordinatensystem ein. Bestimme die Gleichung der Tangente und Normalen an p an der Stelle $x_0 = 2$. Die Tangente und die Normale bilden mit der x-Achse ein rechtwinkliges Dreieck. Berechne dessen Flächeninhalt.
(c) Zeige, dass sich f und p an der Stelle $x_3 = 3$ berühren. Berechne die restlichen Schnittpunkte.
(d) Berechne die beiden Flächen, die f und p einschließen. In welchem Verhältnis stehen die beiden Teilflächen zueinander?

**Aufgabe 11:**
Berechne das Flächenstück oberhalb der x-Achse, das von den Bildkurven zu den Funktionen $f(x) = -\frac{1}{a}x^2 + a$ und $g(x) = -ax^2 + a^3$ mit $0 < a < 1$ begrenzt wird. Für welchen Wert von a hat diese Fläche den größten Inhalt? Wie groß ist er? Fertige eine Skizze an!
**Hinweis für eine Skizze:**
Überlege zuerst was größer ist: a oder $a^3$ für $0 < a < 1$?

**Aufgabe 11:**
Berechne den Inhalt der Fläche zwischen der Bildkurve zu $f(x) = -x^2 + 4x + 6$ und der Geraden g durch die Punkte $A(-2/?)$ und $B(4/?)$ auf der Bildkurve.

**Aufgabe 12:**
Berechne folgende Integrale:

(a) $\int_{-5}^{0}(2-x)dx$ (b) $\int_{-3}^{-1}\frac{2}{x^2}dx$

(c) $\int_{1}^{3}\sqrt{x}dx$ (d) $\int_{-1}^{1}x\cdot|x|dx$

Was ist der Unterschied zwischen dem Wert eines Integrals und dem zugehörigen Flächeninhalt der Funktion mit der x-Achse in denselben Grenzen? Was für eine wichtige Konsequenz hat das für Flächenberechnungen?