Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktionenschar f_t durch $f_t(x) = x + t + \frac{2t}{x}$ mit $x \in R \setminus \{0\}$ und $t \neq 0$.

(a) Untersuche für $t = -1$ das Schaubild von f_t auf Schnittpunkte mit der x-Achse, Extrem- und Wendepunkte sowie Asymptoten. Begründe!

(b) Skizziere das Schaubild für $-6 \leq x \leq 6$ $\quad 1LE = 1cm$.

(c) Bestimme diejenigen Werte von t, für welche die zugehörigen Schaubilder mehr als einen Schnittpunkt mit der x-Achse haben. Ermittle rechnerisch den gemeinsamen Punkt A der Schaubilder aller Funktionen f_t.

Aufgabe 2:

Für jedes $t > 0$ ist durch $f_t(x) = \frac{x^2 - 4t^2}{x^2 - t^2}$ mit $x \in D_{f_t}$ eine Funktion f_t gegeben. Ihr Schaubild sei K_t.

(a) Bestimme den umfassendsten Definitionsbereich D_{f_t} von der Funktion f_t. Untersuche K_t auf Asymptoten, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Extrem- und Wendepunkte.

(b) Zeige, dass es genau einen allen Schaubildern von f_t gemeinsamen Punkt T gibt. Berechne seine Koordinaten. Für welche Werte von k ($k \in R$) schneidet die Gerade mit der Gleichung $y = k$ das Schaubild von f_t? Wie lautet deshalb die Wertemenge W_{f_t} der Funktion f_t?

(c) Die Gerade $y = k$ mit $k < 1$ schneidet das Schaubild von f_2 in den Punkten P_1 und P_2. Läßt man das Dreieck TP_1P_2 um die y-Achse rotieren, so entsteht ein Kegel mit dem Volumen V_k.

(d) Für welches k wird das Volumen V_k extremal? Von welcher Art ist das Extremum?

(e) Das Schaubild der ganzrationalen Funktion g zweiten Grades, mit der allgemeinen Gleichung $g(x) = ax^2 + bx + c$ mit $a, b, c \in R, a \neq 0$ und $x \in R$ berührt K_t im Punkt $T(0/4)$ und besitzt dieselben Schnittpunkte mit der x-Achse wie K_t. Bestimme a, b, c. Für welchen Wert von t schneiden sich die Schaubilder in den gemeinsamen Schnittpunkten mit der x-Achse orthogonal?

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion f_t mit $f_t(x) = \frac{x^2 + t}{x + t}$ mit $x \in D_{f_t}$ und $t \in R^+$.

(a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich von f_t. Begründe, dass das Schaubild von f_t für jedes zugelassene t zwei Asymptoten hat. Bestimme ihre Gleichungen.

(b) Für welchen Wert von t hat der Schnittpunkt der beiden Asymptoten die Ordinate (y-Wert) -5?

Aufgabe 4:

Leite die folgenden Funktionen jeweils einmal ab.

(a) $f(x) = (\sin 4x)^3 \cdot (\cos x - x^3)^6$ $\qquad$ (b) $f(x) = \frac{(x^2 - 1)^3}{(x^4 + x^2 + 5)^2}$

Aufgabe 5:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^3}{(x-1)^2}$ mit $x \in R \setminus \{1\}$. Ihr Schaubild sei K.

(a) Bestimme die Schnittpunkte von K mit den Kooordinatenachsen.
(b) Bestimme die Asymptoten von K und die Art der Annäherung von K an diese.
(c) Skizziere mit diesen Angaben das Schaubild.

Aufgabe 6:

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$ mit $x \in R \setminus \{1\}$. Ihr Schaubild sei K.

(a) Bestimme die Nullstellen und die Asymptoten von K.
(b) Zeige, dass K symmetrisch zum Schnittpunkt der beiden Asymptoten ist.
(c) Skizziere mit diesen Angaben das Schaubild.

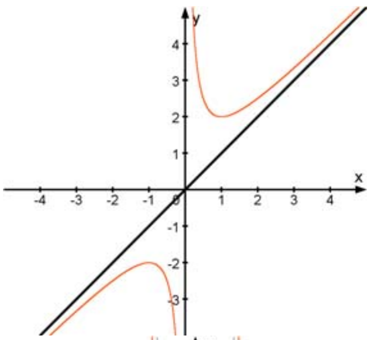
Aufgabe 7:

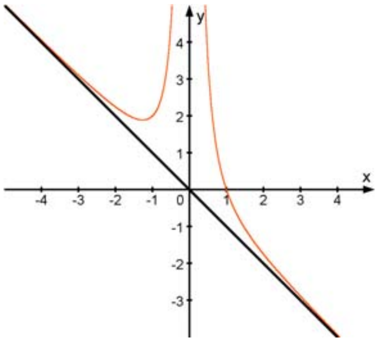
Gegeben sei die Funktionenschar f_t mit $f_t(x)=x+3t-\frac{4t^3}{x^2}$ mit $x \in R \setminus \{0\}, t>0$.

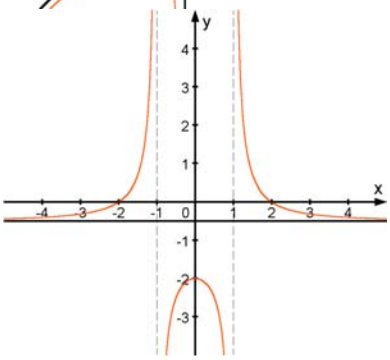
Ihre Schaubilder seien K_t.

(a) Zeige, dass jede Kurve K_t mit der x-Achse die Punkte $R(t/0)$ und $Q(-2t/0)$ gemeinsam hat.
(b) Untersuche K_1 auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte.
(c) Zeichne K_1 im Intervall $-5 \le x \le 3$.

Aufgabe 8:
Gib die Gleichung einer gebrochenrationalen Funktion so an, dass ihr wesentlicher Verlauf wie folgt aussieht:







Aufgabe 9:

Zeige, dass für die Funktionen f und g mit $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ und $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ gilt:

(a) $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in R$.

(b) Was bedeutet $f'(x) = g'(x)$ für den Verlauf der Schaubilder von f und g?

(c) Beweise die in (b) vermutete Beziehung zwischen f und g durch Termumformung.

Aufgabe 10:

Zeige, dass die Schaubilder aller Funktionen f_t mit $f_t(x) = \frac{2x^2 - (2t+1)x}{x-t}$ mit $x \in D_{f_t}$ und $t \in \Re$ eine gemeinsame Asymptote haben. Gib ihre Gleichung an!

(a) Welche der Funktionen f_t hat die Nullstelle 1?

(b) Welche der Funktionen f_t hat die Polstelle 2?