

# Übungsaufgaben zum Thema Gleichungen und Ungleichungen

Jürgen Gilg<sup>1</sup>  
Austr. 59  
70376 Stuttgart

Februar 2004

<sup>1</sup>Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: [gilligan01@worldonline.de](mailto:gilligan01@worldonline.de)

# 1 Ganzrationale Gleichungen und Bruchgleichungen

## Aufgabe 1:

Bestimmen Sie die Definitionsmenge und berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen und Ungleichungen.

a)  $4x - 3 < 3(x + 1)$

b)  $x^2 - 15 < (x + 5)^2$

c)  $2(x^2 - 16) > 2x^2 + 14x - 4$

d)  $\frac{7x}{3x - 9} > 4$

e)  $\frac{2x - 2}{2x + 2} \leq 2$

f)  $\frac{8}{2x - 4} + \frac{24}{2x + 4} = \frac{4,5}{(x - 2)(x + 2)}$

g)  $\frac{3x}{x + 1} + \frac{5}{x} = 3$

h)  $\frac{3}{x + 2} + \frac{2}{x - 2} = -\frac{12}{x^2 - 4}$

i)  $\frac{b(a - 2x)}{ax} + \frac{a}{b} = \frac{a(a - x)}{bx}$

## Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen mit der Mitternachtsformel oder vielleicht sogar einfacher.

a)  $\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0$

b)  $-\frac{2}{7}x^2 + 3 = 0$

c)  $4x^2 - 2x = 0$

## Aufgabe 3:

Bestimmen Sie  $a$  so, daß die Funktion  $p_a(x) = ax^2 - 4x + 2$  keine bzw. eine bzw. zwei Nullstellen besitzt.

## Aufgabe 4:

Zerlegen Sie die quadratische Funktion in Linearfaktoren.

a)  $p(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

b)  $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2$

c)  $p(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x + 4$

**Aufgabe 5:**

Geben Sie eine quadratische Gleichung an, die folgende Lösungen besitzt.

a)  $L = \{5; 7\}$

b)  $L = \{-3; \frac{2}{3}\}$

c)  $L = \{2 + \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2}\}$

**Aufgabe 6:**

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Parabel  $p$  und der Geraden  $g$ .

a)  $p(x) = x^2 + 2x$  und  $g(x) = -\frac{1}{2}x - 1$

b)  $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$  und  $g(x) = -x + \frac{7}{2}$

c)  $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$  und  $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$

**Aufgabe 7:**

Wie ist  $m$  bzw.  $b$  zu wählen, damit die Gerade  $g$  die Parabel  $p$  berührt?

a)  $p(x) = x^2 + 3x$  und  $g_b(x) = -x + b$

b)  $p(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$  und  $g_m(x) = mx$

**Aufgabe 8:**

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender quadratischer Ungleichungen.

a)  $x^2 - 3x - 4 > 0$

b)  $\frac{1}{2}x^2 + x \leq 4$

**Aufgabe 9:**

Berechnen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen durch eine geeignete Substitution.

a)  $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

b)  $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$

c)  $16x^8 - 257x^4 + 16 = 0$

d)  $(x^3 + 2)^2 + 3(x^3 + 2) - 18 = 0$

**Aufgabe 10:**

Bestimmen Sie die Nullstellen von  $f$  mit Hilfe des Horner-Schemas und zerlegen Sie soweit wie möglich in Linearfaktoren.

a)  $f(x) = x^3 - 13x + 12$

b)  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 5x + 15$

c)  $f(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$

d)  $f(x) = 3x^3 - 9x^2 - 18x + 24$

e)  $f(x) = x^3 + 9x^2 + 23x + 15$

f)  $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{3}x - 4$

g)  $f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 50x^2 + 100x$

## 2 Exponentialgleichungen und Logarithmusgleichungen

### Aufgabe 1:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

a)  $e^{\ln 3}$

b)  $e^{-\ln 4}$

c)  $e^{2 \ln 3}$

d)  $e^{-\ln \sqrt{2}}$

e)  $e^{-t \ln c}$

f)  $e^{\frac{1}{2} \ln \frac{1}{4}}$

### Aufgabe 2:

Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke.

a)  $\ln e^4$

b)  $\ln e^{-3}$

c)  $\ln \sqrt{2}$

d)  $\ln e^{\frac{1}{4}}$

e)  $\ln \sqrt[3]{e^2}$

f)  $\ln \frac{1}{2\sqrt[4]{e}}$

### Aufgabe 3:

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und bestimmen Sie die Definitionsmenge.

a)  $e^{3x} = 2$

b)  $e^{2x-1} = 4$

c)  $2e^{x^2} = 6$

d)  $-3e^{-x+5} = 3$

e)  $e^x(1 - e^x) = 0$

f)  $2e^{2x} - e^x = 0$

g)  $e^x - e^{-x} = 0$

h)  $2e^{2x} - e^{-x} = 0$

i)  $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$

j)  $2e^x - 3e^{-x} = -5$

k)  $e^x + 1 = 12e^{-x}$

l)  $e^{2x} + 36e^{-2x} = 13$

**Aufgabe 4:**

Lösen Sie die folgenden Gleichungen und bestimmen Sie die Definitionsmenge.

a)  $\ln 2x = 1$

b)  $\ln 3x = -1$

c)  $\ln \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$

d)  $2 \ln x = 1$

e)  $-\frac{1}{2} \ln(1 - x^2) = 1$

f)  $\ln(x - 1) = 0$

g)  $3 \ln(1 - x) = 0$

h)  $2 \ln x = \ln 2x$

### 3 Trigonometrische Gleichungen

#### Aufgabe 1:

Bringen Sie folgende Funktionsgleichungen in die Norm-Form  $f(x) = a \sin[b(x+c)] + d$  bzw.  $f(x) = a \cos[b(x+c)] + d$  mit  $b > 0$  und bestimmen Sie damit Amplitude, Periode, Verschiebung in  $x$ -Richtung und Verschiebung in  $y$ -Richtung. Erläutern Sie, wie diese Funktionen aus den reinen Schaubildern von  $f(x) = \sin x$  bzw.  $f(x) = \cos x$  entstehen.

a)  $f(x) = -2 \sin 2x$

b)  $f(x) = \frac{1}{2} \cos(3x - 6\pi) + 1$

c)  $f(x) = \frac{2}{3} \sin(-\frac{1}{2}x + 2\pi) - 1$

d)  $f(x) = -2 \cos(-3x + 3\pi) - 1$

#### Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen für alle  $x \in \mathbb{R}$  und suchen Sie dann die relevanten Lösungen im angegebenen Intervall  $I$ .

Benützen Sie gegebenenfalls die trigonometrischen Standardumformungen:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

a)  $-2 \sin x = 2 \quad I \in [-\pi; 2\pi]$

b)  $\cos 3x + \frac{1}{2} = 0 \quad I \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

c)  $\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(-\frac{1}{2}x + 2\pi) = 1 \quad I \in [0; 2\pi]$

d)  $\sin x + 2 \sin 2x = 0 \quad I \in [-\pi; 2\pi]$

e)  $\sin x - 2 \cos x = 0 \quad I \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

f)  $\sin^2 x - 2 \cos^2 x = 1 \quad I \in [-\frac{3\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}]$

## 4 Betragsgleichungen

### Aufgabe 1:

Stellen Sie folgende Funktionsgleichungen betragsfrei dar und geben Sie die Nahtstellen an. Skizzieren Sie die das Schaubild der jeweiligen Funktion qualitativ und geben Sie die Bereiche an, in denen sich das Schaubild oberhalb bzw. unterhalb der  $x$ -Achse befindet.

a)  $f(x) = |x^2 - 1|$

b)  $f(x) = |x - 1| + |1 + x|$

c)  $f(x) = 3|x + 1| - 2|x - 2| - 2$

d)  $f(x) = e^{|x+1|} - 2$

e)  $f(x) = \ln|x^2 - 1| - 1$

### Aufgabe 2:

Lösen Sie folgende Betragsgleichungen und -ungleichungen.

a)  $|x - 1| = 2$

b)  $|x^2 - 1| = \frac{1}{2}$

c)  $|3x - 1| > 2$

d)  $|x - 1| - |2x - 4| < -2$

## 5 Lösungen zu den Aufgaben von Kapitel 1

1a)  $x \in \mathfrak{R}, x < 6$

1b)  $x \in \mathfrak{R}, x > -4$

1c)  $x \in \mathfrak{R}, x < -2$

1d)  $x \neq 3, 3 < x < \frac{36}{5}$

1e)  $x \neq -1, x \leq -3 \vee x > -1$

1f)  $x \neq \pm 2, x_1 = \frac{41}{32}$

1g)  $x \neq -1; 0, x_1 = -\frac{5}{2}$

1h)  $x \neq \pm 2, x_1 = \frac{14}{5}$

1i)  $x \neq 0, a, b \neq 0, x_1 = \frac{a}{2}$

2a)  $x_1 = -1, x_2 = 3$

2b)  $x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{21}{2}}$

2c)  $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$

3)  $a > 2$  keine Nullstellen,  $a = 2$  eine Nullstelle,  $a < 2$  zwei Nullstellen

4a)  $p(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$

4b)  $p(x) = -\frac{1}{4}(x+4)(x-2)$

4c)  $p(x) = \frac{1}{4}(x+4)^2$

5a)  $(x-5)(x-7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 35 = 0$

5b)  $(x+3)(x-\frac{2}{3}) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 4 = 0$

5c)  $(x-(2+\sqrt{2}))(x-(2-\sqrt{2})) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0$

6a)  $S_1(-2/0), S_2(-\frac{1}{2}/-\frac{3}{4})$

6b)  $S_{1,2}(2/\frac{3}{2})$

6c)  $S_1(-2/0), S_2(4/3)$

7a)  $b = -4$

7b)  $m_1 = 0, m_2 = 4$

8a)  $x < -1 \vee x > 4$

8b)  $x \leq -4 \vee x \geq 2$

9a)  $z = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 3$

$$9b) z = x^2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3, x_{3,4} = \pm \frac{2}{3}$$

$$9c) z = x^4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 4\sqrt{2}, x_{3,4} = \pm \frac{1}{4}$$

$$9d) z = x^3 + 2 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1$$

$$10a) f(x) = (x - 1)(x - 3)(x + 4)$$

$$10b) f(x) = (x - 3)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$$

$$10c) f(x) = (x - 2)(x + 2)(x - 4)$$

$$10d) f(x) = 3(x - 1)(x - 4)(x + 2)$$

$$10e) f(x) = (x + 1)(x + 3)(x + 5)$$

$$10f) f(x) = -\frac{1}{6}(x - 2)(x + 3)(x - 4)$$

$$10g) f(x) = 2x(x - 2)(x - 5)(x + 5)$$