Lineare Gleichungssysteme

i) Quadratisches LGS $n = m$ (Gleich viele Gleichungen wie Unbekannte):

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad\quad &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array}\right) \to x_3 = -3 \to x_2 = 2 \to x_1 = 1$$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$.

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to x_3 = 3\alpha \to x_2 = -1 + 2\alpha \to x_1 = 2 - 5\alpha$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $x_1 = 2 - 5\alpha, x_2 = -1 + 2\alpha, x_3 = 3\alpha$.

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + x_3 &= -3 \\ x_1 + 6x_2 - 4x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Lösung:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & 2 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -16 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \text{Widerspruch!}$$

Das LGS hat keine Lösung.

ii) Überbesetztes LGS $m > n$ (m Gleichungen mit n Unbekannten):

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 &= 5 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ 6x_1 - x_2 &= 11 \end{aligned}$$

Lösung:
Es reichen zwei der drei Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\left.\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 11 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & -7 \\ 6 & -1 & 11 \end{array}\right. \rightarrow x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2$$

Probe mit dritter Zeile liefert: $6 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 11$ ist wahr.
Das LGS ist eindeutig lösbar mit $x_1 = 2, x_2 = 1$.

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 8 \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 &= 12 \\ -5x_1 - 10x_2 + 15x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Lösung:
Es reichen drei der vier Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -6 & 8 \\ 3 & 6 & -9 & 12 \\ -5 & -10 & 15 & -20 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & -10 & 15 & -20 \end{array}\right. \rightarrow x_3 = \alpha \rightarrow x_2 = \beta \rightarrow x_1 = 4 + 3\alpha - 2\beta$$

Probe mit vierter Zeile liefert: $-5(4 + 3\alpha - 2\beta) - 10\beta + 15\alpha = -20$ ist wahr.
Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit $x_1 = 4 + 3\alpha - 2\beta, x_2 = \beta, x_3 = \alpha$.

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 5 \\ -2x_1 - 4x_2 - 6x_3 &= -2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 &= 1 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:
Es reichen drei der vier Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{array} \rightarrow \text{Widerspruch! (Jede weitere Rechnung erspart sich)}$$

Das LGS hat keine Lösung.

iii) Unterbesetztes LGS $m < n$ **(m Gleichungen mit n Unbekannten):**

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 - x_2 - 6x_3 = -2$$

Lösung:
Es kann keine vollständige Dreiecksgestalt erreicht werden. Es kann keine eindeutige Lösung geben.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 20 & 2 & 8 \end{array} \rightarrow x_4 = 5\alpha \quad \rightarrow x_3 = 5\beta \quad \rightarrow x_2 = -\tfrac{12}{5} + 2\alpha + 20\beta \quad \rightarrow x_1 = -\tfrac{11}{5} + \alpha + 25\beta$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen:
$x_1 = -\frac{11}{5} + \alpha + 25\beta, x_2 = -\frac{12}{5} + 2\alpha + 20\beta, x_3 = 5\beta, x_4 = 5\alpha$.

Aufgabe:
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$$
$$-8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -3$$

Lösung:
Es kann keine vollständige Dreiecksgestalt erreicht werden. Es kann keine eindeutige Lösung geben.

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & 5 \\ -8 & 4 & -6 & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \rightarrow \text{Widerspruch!}$$

Das LGS hat keine Lösung.