Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Quadratisches LGS (gleich viele Gleichungen wie Unbekannte)

Aufgabe 1

Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$2x_1 - x_2 = 0$
$x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1$

Lösung zu Aufgabe 1

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 9 \end{array} \quad x_3 = -3 \to x_2 = 2 \to x_1 = 1$$

Das LGS ist eindeutig lösbar mit
$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = -3$

Aufgabe 2

Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$
$2x_1 - x_2 + 4x_3 = 5$
$x_1 + 4x_2 - x_3 = -2$

Lösung zu Aufgabe 2

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad x_3 = 3\alpha \to x_2 = -1 + 2\alpha \to x_1 = 2 - 5\alpha$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit
$x_1 = 2 - 5\alpha,\ x_2 = -1 + 2\alpha,\ x_3 = 3\alpha$

Aufgabe 3

Bestimme die Lösung des folgenden LGS:

$2x_1 - 4x_2 + x_3 = -3$
$x_1 + 6x_2 - 4x_3 = 0$
$4x_1 - 8x_2 + 2x_3 = -5$

Lösung zu Aufgabe 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & -8 & 2 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & -3 \\ 0 & -16 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \quad \text{Widerspruch!}$$

Das LGS hat keine Lösung.

Überbesetztes LGS (mehr Gleichungen alsUnbekannte)
Aufgabe 4
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:
$4x_1 - 3x_2 = 5$
$x_1 + x_2 = 3$
$6x_1 - x_2 = 11$

Lösung zu Aufgabe 4
Es reichen zwei der drei Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \\ 6 & -1 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 4 & -3 & 5 \\ 0 & -7 & -7 \\ 6 & -1 & 11 \end{array}\right) \quad x_2 = 1 \rightarrow x_1 = 2$$

Probe mit dritter Zeile liefert: $6 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 11$ ist wahr.
Das LGS ist eindeutig lösbar mit
$x_1 = 2,\ x_2 = 1$

Aufgabe 5
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$
$2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 8$
$3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 12$
$-5x_1 - 10x_2 + 15x_3 = -20$

Lösung zu Aufgabe 5
Es reichen drei der vier Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.
Probe mit vierter Zeile liefert:
$-5(4 + 3\alpha - 2\beta) - 10\beta + 15\alpha = -20$
ist wahr.
Das LGS hat unendlich viele Lösungen mit
$x_1 = 4 + 3\alpha - 2\beta,\ x_2 = \beta,\ x_3 = \alpha$

Aufgabe 6
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:
$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5$
$-2x_1 - 4x_2 - 6x_3 = -2$
$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 1$
$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 1$

Lösung zu Aufgabe 6
Es reichen drei der vier Gleichungen um die Koeffizientenmatrix auf Dreiecksgestalt zu bringen.

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & -2 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$ Widerspruch! (Jede weitere Rechnung erspart sich)

Das LGS hat keine Lösung.

Unterbesetztes LGS (weniger Gleichungen als Unbekannte)
Aufgabe 7
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:
$x_1 - 3x_2 + 7x_3 + x_4 = 5$
$2x_1 - x_2 - 6x_3 = -2$

Lösung zu Aufgabe 7
Es kann keine vollständige Dreiecksgestalt erreicht werden. Es kann keine eindeutige Lösung geben.

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 7 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -6 & 0 & -2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrrr|r} 1 & -3 & 7 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & 20 & 2 & 8 \end{array} \quad x_4 = 5\alpha \rightarrow x_3 = 5\beta \rightarrow x_2 = -\tfrac{12}{5} + 2\alpha + 20\beta \rightarrow x_1 = -$$

Das LGS hat unendlich viele Lösungen:
$x_1 = -\tfrac{11}{5} + \alpha + 25\beta,\ x_2 = -\tfrac{12}{5} + 2\alpha + 20\beta,\ x_3 = 5\beta,\ x_4 = 5\alpha$

Aufgabe 8
Bestimme die Lösung des folgenden LGS:
$4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5$
$-8x_1 + 4x_2 - 6x_3 = -3$

Lösung zu Aufgabe 8
Es kann keine vollständige Dreiecksgestalt erreicht werden. Es kann keine eindeutige Lösung geben.

$$\begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & 5 \\ -8 & 4 & -6 & -3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} 4 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}$$ Widerspruch!

Das LGS hat keine Lösung.Vektoren

Vektoren

Aufgabe 1

Lösen Sie die Klammern auf und vereinfachen Sie so weit wie möglich.

a) $6(\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b})$

b) $7\vec{u} + 5(\vec{u} - 2(\vec{u} + 2\vec{v}) - 3(2\vec{v} - \vec{u}))$

c) $3(2\vec{t} + 5\vec{s}) - (\vec{s} + 4\vec{t})$

Lösung zu Aufgabe 1

a) $6(\vec{a} - \vec{b}) + 4(\vec{a} + \vec{b}) = 6\vec{a} - 6\vec{b} + 4\vec{a} + 4\vec{b} = 10\vec{a} - 2\vec{b}$

b) $7\vec{u} + 5(\vec{u} - 2(\vec{u} + 2\vec{v}) - 3(2\vec{v} - \vec{u})) = 7\vec{u} + 5\vec{u} - 10(\vec{u} + 2\vec{v}) - 15(2\vec{v} - \vec{u})$
$7\vec{u} + 5\vec{u} - 10\vec{u} - 20\vec{v} - 30\vec{v} + 15\vec{u} = 17\vec{u} - 50\vec{v}$

c) $3(2\vec{t} + 5\vec{s}) - (\vec{s} + 4\vec{t}) = 6\vec{t} + 15\vec{s} - \vec{s} - 4\vec{t} = 2\vec{t} + 14\vec{s}$

Aufgabe 2

Lösen Sie die folgenden Gleichungen für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$ nach $\vec{x}$ auf.

a) $4\vec{a} + \vec{x} = 3\vec{b}$

b) $2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{x} = 3\vec{a} - 6\vec{b}$

c) $3\vec{a} - 2\vec{x} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\vec{x} = 3\vec{b} - 4\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 27 \\ -33 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = -\vec{a} + 9\vec{b} = \begin{pmatrix} 35 \\ 48 \\ -66 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = -\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie, falls möglich, eine reelle Zahl x so, dass folgende Beziehung gilt:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 17 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 3

a) $x = -2$

b) unlösbar

c) unlösbar

Aufgabe 4

Stellen Sie den gegebenen Vektor als Linearkombination der Vektoren

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ dar.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$

$x_3 = 1,\ x_2 = 3,\ x_1 = -2$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$

$x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \end{array}$

$x_3 = -5,\ x_2 = 10,\ x_1 = -5$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5

Gegeben sei das Parallelogramm, das von den Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$. M ist der Schnittpunkt der Diagonalen und M_a, M_b, M_c, M_d die Mittelpunkte der Seiten a, b, c, d. Bestimmen Sie mit Hilfe der gegebenen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgende Vektoren.

a) $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$

b) $\overrightarrow{M_aM_b}$, $\overrightarrow{CM_a}$, $\overrightarrow{M_cM_d}$, $\overrightarrow{MM_c}$

Lösung zu Aufgabe 5

a) $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(\vec{a} - \vec{b})$, $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a})$

b) $\overrightarrow{M_aM_b} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{CM_a} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + 2\vec{b})$, $\overrightarrow{M_cM_d} = -\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$, $\overrightarrow{MM_c} = \frac{1}{2}\vec{b}$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die folgenden drei Vektoren auf lineare Unabhängigkeit.

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2+a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3+a \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 6

a) $\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow$ linear unabhängig

b) $\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ a & a & a & 0 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow$ linear abhängig

Aufgabe 7

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ seien linear unabhängig. Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$

ebenfalls linear unabhängig sind.

a) $\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b},\ \vec{y} = 3\vec{a} - 4\vec{c},\ \vec{z} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

b) $\vec{x} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c},\ \vec{y} = -5\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c},\ \vec{z} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$

Lösung zu Aufgabe 7

a) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig, also gilt $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\vec{x} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

$\vec{y} = 3\vec{a} - 4\vec{c}$

$\vec{z} = \vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}$

Frage: Sind die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ebenfalls linear unabhängig? Ansatz

$y_1\vec{x} + y_2\vec{y} + y_3\vec{z} = \vec{0}$ (Diese sind dann linear unabhängig, wenn $y_1 = y_2 = y_3 = 0$)

Obige Beziehung eingesetzt

$y_1(2\vec{a} + 3\vec{b}) + y_2(3\vec{a} - 4\vec{c}) + y_3(\vec{a} - 2\vec{b} + 3\vec{c}) = \vec{0}$

Sortieren nach $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$

$$(\underbrace{2y_1 + 3y_2 + y_3}_{x_1})\vec{a} + (\underbrace{3y_1 - 2y_3}_{x_2})\vec{b} + (\underbrace{-4y_2 + 3y_3}_{x_3})\vec{c} = \vec{0}$$

Die Vorfaktoren der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ müssen laut Voraussetzung ihrer linearen Unabhängigkeit alle Null sein. Dies liefert dann ein homogenes LGS für $y_1,\ y_2,\ y_3$.

$2y_1 + 3y_2 + y_3 = 0$

$3y_1 - 2y_3 = 0$

$-4y_2 + 3y_3 = 0$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 31 & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0$ und somit sind die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ebenfalls linear unabhängig.

b) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear unabhängig, also gilt $x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ mit $x_1 = x_2 = x_3 = 0$

$\vec{x} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}$

$\vec{y} = -5\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}$

$\vec{z} = 2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$

Frage: Sind die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ebenfalls linear unabhängig? Ansatz

$y_1\vec{x} + y_2\vec{y} + y_3\vec{z} = \vec{0}$ (Diese sind dann linear unabhängig, wenn $y_1 = y_2 = y_3 = 0$)

Obige Beziehung eingesetzt

$y_1(-\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}) + y_2(-5\vec{a} + \vec{b} - 4\vec{c}) + y_3(2\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$

Sortieren nach $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$

$$(\underbrace{-y_1 - 5y_2 + 2y_3}_{x_1})\vec{a} + (\underbrace{3y_1 + y_2 + 2y_3}_{x_2})\vec{b} + (\underbrace{2y_1 - 4y_2 - y_3}_{x_3})\vec{c} = \vec{0}$$

Die Vorfaktoren der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ müssen laut Voraussetzung ihrer linearen

Unabhängigkeit alle Null sein. Dies liefert dann ein homogenes LGS für $y_1,\ y_2,\ y_3$.

$-y_1 - 5y_2 + 2y_3 = 0$

$3y_1 + y_2 + 2y_3 = 0$

$2y_1 - 4y_2 - y_3 = 0$

$$\begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 8 & 0 \\ 0 & -14 & 3 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rrr|r} -1 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & -14 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow\ y_1 = y_2 = y_3 = 0$ und somit sind die Vektoren $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ebenfalls linear unabhängig.

Aufgabe 8

Berechnen Sie die Länge der folgenden Vektoren und geben Sie ihren zugehörigen normierten Vektor an.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ c) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lösung zu Aufgabe 8

a) $\vec{a}_0 = \frac{1}{\sqrt{33}} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\vec{b}_0 = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

c) $\vec{c}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 9

Berechnen Sie mit Hilfe der Rechenregeln des Skalarprodukts, wenn gilt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

a) $(3\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 7\vec{b})$

b) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + 2\vec{b})$

c) Berechnen Sie die Teilaufgaben a) und b) unter dem Zusatz, dass die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ normiert sind, also dass Folgendes gilt: $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = 1$ und $\vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{b}^2 = 1$

Lösung zu Aufgabe 9

a) $(3\vec{a} + 5\vec{b}) \cdot (2\vec{a} - 7\vec{b}) = 6\vec{a}^2 - 21\vec{a}\vec{b} + 10\vec{b}\vec{a} - 35\vec{b}^2 = 6\vec{a}^2 - 35\vec{b}^2$

b) $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (-3\vec{a} + 2\vec{b}) = -6\vec{a}^2 + 4\vec{a}\vec{b} - 9\vec{b}\vec{a} + 6\vec{b}^2 = -6\vec{a}^2 + 6\vec{b}^2$

c) a) –29 b) 0

Aufgabe 10

Berechnen Sie für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ die Vektoren

a) $\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b} \times \vec{c}, \vec{c} \times \vec{a}$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}), (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

Lösung zu Aufgabe 10

a) $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -9 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ -16 \\ 17 \end{pmatrix}, \vec{c} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \\ 11 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{pmatrix} 97 \\ -9 \\ -37 \end{pmatrix}, (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 60 \\ 44 \\ -32 \end{pmatrix}$

Aufgabe 11

Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$ so, dass er sowohl senkrecht zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als auch senkrecht zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist. Berechnen Sie zusätzlich noch den Winkel φ zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Lösung zu Aufgabe 11

Den Vektor $\vec{n}$ erhält man mit Hilfe des Vektorprodukts der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Den Winkel φ erhält man mit der Formel

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|} = \frac{-3}{\sqrt{9}\cdot\sqrt{6}} = -0,408 \Rightarrow \varphi = 114,09°$$

Aufgabe 12
Bestimmen Sie den Spiegelpunkt A^* des Punktes $A(1/2/-1)$ bezüglich des Spiegelzentrums $Z(-3/1/2)$ und berechnen Sie den Abstand der Punkte $\overline{AA^*}$.

Lösung zu Aufgabe 12
Laut Aufgabenstellung ist also Z der Mittelpunkt zwischen A und A^*
Folglich gilt

$$\vec{z} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{a}^*) \Rightarrow \vec{a}^* = 2\vec{z}-\vec{a} = 2\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix}$$

Der Spiegelpunkt A^* hat damit die Koordinaten
$A^*(-7/0/5)$
Der Abstand der beiden Punkte $\overline{AA^*}$ ist gleich dem Betrag des Vektors $\left|\overrightarrow{AA^*}\right|$

$$\overrightarrow{AA^*} = \vec{a}^* - \vec{a} = \begin{pmatrix}-7\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-2\\6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overline{AA^*} = \left|\overrightarrow{AA^*}\right| = \sqrt{64+4+36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$$

Geraden und Ebenen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch die Punkte $A(2/2/3)$ und $B(4/-2/3)$.

Lösung zu Aufgabe 1

Gegeben sind zwei Punkte A und B

Die Gleichung der gesuchten Geraden lautet

$g : \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Kürzen des RV's auf kleinstmögliche ganzzahlige Komponenten

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden g durch den Punkt $P(2/1/-4)$ parallel zur Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Gegeben ist ein Punkt P und eine Richtung $\vec{u}$

Die Gleichung der gesuchten Geraden lautet

$g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 3

Begründen Sie, wie folgende Geraden g und h zueinander liegen?

a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$

b) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$

c) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$

d) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$

Berechnen Sie im Schnittfall zusätzlich noch den Schnittwinkel und im windschiefen Fall zusätzlich noch den Abstand der beiden Geraden und die Lotfußpunkte *G* und *H*.

Lösung zu Aufgabe 3

a) Die RV's sind (leicht ersichtlich) linear abhängig und der Aufpunkt von *g* ist Element von *h*.
Die Geraden sind also identisch.

b) Die RV's sind (leicht ersichtlich) linear abhängig und der Aufpunkt von *g* ist nicht Element von *h*.
Die Geraden sind also echt parallel.

c) Die RV's sind (leicht ersichtlich) linear unabhängig.
Gleichsetzen der Geradengleichungen liefert

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$t\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Überbesetztes LGS mit den Lösungen

$2t - s = -3$

$3t - s = -4$

$t - 2s = -3$

$\Rightarrow\ t = -1$ und $s = 1 \Rightarrow S(5/-5/1)$

Der Schnittwinkel ist gleich dem Winkel zwischen den beiden RV's $\vec{v}_g$ und $\vec{v}_h$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{v}_g \cdot \vec{v}_h}{|\vec{v}_g| \cdot |\vec{v}_h|} = \frac{7}{\sqrt{14}\sqrt{6}}$$

$\varphi = 40,2^\circ$

d) Die RV's sind (leicht ersichtlich) linear unabhängig.
Gleichsetzen der Geradengleichungen liefert ein unlösbares LS
Die Geraden sind also windschief
Lotfußpunkte:

Man berechnet einen beliebigen Vektor zwischen g und h:

$$\overrightarrow{GH} = \vec{H} - \vec{G} = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Steht dieser Vektor sowohl senkrecht auf g wie auch auf h, so wird G Lotfußpunkt zu g und H Lotfußpunkt zu h.

Die Orthogonalität fordert:

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{GH} \perp g &: \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 7t - 14s = 27 \\ \overrightarrow{GH} \perp h &: \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - s\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6t - 7s = 8 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} t &= -\tfrac{11}{5} \\ s &= -\tfrac{106}{35} \end{aligned}$$

Den Wert s in g und den Wert t in h eingesetzt liefern die Lotfußpunkte G und H:

$G(-\frac{2}{35}/-\frac{248}{35}/-\frac{176}{35})$, $H(\frac{9}{5}/-\frac{41}{5}/-\frac{27}{5})$

Der Abstand der beiden Geraden ist gleich dem Betrag des Vektors

$$\overrightarrow{GH} = \begin{pmatrix} \frac{65}{35} \\ -\frac{39}{35} \\ -\frac{13}{35} \end{pmatrix}$$

$$d_{g,h} = \tfrac{1}{35}\sqrt{65^2 + 39^2 + 13^2} = \tfrac{13}{35}\sqrt{35}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene E durch die Punkte $A(3/0/2)$, $B(5/1/9)$, $C(6/2/7)$. Rechnen Sie diese geschickt in die Koordinatenform um und geben Sie deren Hesse-Normalform an.

Lösung zu Aufgabe 4

Die Gleichung der Ebene ergibt sich leicht in Parameterform

$E : \vec{x} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t(\vec{c} - \vec{a})$ mit $t, s \in \mathbb{R}$

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ mit } t, s \in \mathbb{R}$$

Bestimmen des NV's der Ebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Normalenform $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$

$E: -9x_1 + 11x_2 + x_3 = -25$
Bestimmen der zugehörigen Hesse-Normalform
HNF $E: \dfrac{-9x_1 + 11x_2 + x_3 + 25}{\sqrt{203}} = 0$

Aufgabe 5

Wie liegt die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $r, t, s \in \mathbb{R}$?

Rechnen Sie möglichst geschickt und begründen Sie Ihr Vorgehen!

Lösung zu Aufgabe 5
Bestimmung des NV's der Ebene
$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$
Mit der Normalenform $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ und dem Aufpunkt $A(0/0/2)$
$E: 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$
Einsetzen der Geradengleichung g in die Ebenengleichung E
$4(2 + r) + 2(1 - r) - (3 + 2r) = -2 \Leftrightarrow 0 = -9$
Sie haben keinen Punkt gemeinsam, deshalb liegen sie parallel.

Aufgabe 6
Bestimmen Sie die Gleichungen der Koordinatenachsen sowie der Koordinatenebenen.

Lösung zu Aufgabe 6
x_1-Achse: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, x_2-Achse: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, x_3-Achse: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit jeweils $t \in \mathbb{R}$
$[x_1, x_2]$-Ebene: $x_3 = 0$, $[x_1, x_3]$-Ebene: $x_2 = 0$, $[x_2, x_3]$-Ebene: $x_1 = 0$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie die Durchstoßpunkte $D_{1,2}$, $D_{1,3}$, $D_{2,3}$ der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ mit den Koordinatenebenen.

Was kann man über die Lage einer Geraden g sagen, wenn es keine drei

Durchstoßpunkte gibt?

Lösung zu Aufgabe 7
Schnittpunkt mit der $[x_1, x_2]$-Ebene: $x_3 = 0 \Leftrightarrow t = -1$
$D_{1,2}(2/0/0)$
Schnittpunkt mit der $[x_1, x_3]$-Ebene: $x_2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$
$D_{1,3}(2/0/0)$
Schnittpunkt mit der $[x_2, x_3]$-Ebene: $x_1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$
$D_{2,3}(0/2/2)$
Wenn es z.B. keinen Durchstoßpunkt $D_{1,2}$ der Geraden gibt, dann ist die Gerade notwendigerweise parallel zur $[x_1, x_2]$-Ebene.

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$ und errechnen Sie dann möglichst einfach ihre Spurpunkte S_1, S_2, S_3. Die Verbindungslinie zweier Spurpunkte nennt man Spurgerade. Berechnen Sie ebenfalls deren Gleichungen.
Was kann man über die Lage von Ebenen E sagen, die keine drei Spurpunkte besitzen?

Lösung zu Aufgabe 8
Man bestimmt die Koordinatenform der Ebene E
Bestimmung des NV's der Ebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Mit der Normalenform $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ und dem Aufpunkt $A(1/0/0)$
$E: 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$
Die Spurpunkte sind
$S_1(1/0/0)$, $S_2(0/2/0)$, $S_3(0/0/-4)$
Die Spurgeraden lauten

$$s_{1,2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$$s_{1,3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

$$s_{2,3}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Wenn eine Ebene z.B. keinen Spurpunkt mit der x_1-Achse besitzt, so ist sie zu dieser notwendigerweise parallel.

Aufgabe 9

Gegeben sind die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t, s \in \mathbb{R}$. Ferner ist noch der Punkt $P(0/1/0) \notin g \notin h$ gegeben.

Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Geraden k, die durch P geht und die beiden Geraden g und h in jeweils einem Punkt schneidet. Eine Skizze zu dieser Problematik ist sehr hilfreich.

Lösung zu Aufgabe 9

Man bestimmt die Ebene E, die P und g enthält

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } t, s \in \mathbb{R}$$

Bestimmung des NV's der Ebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit der Normalenform $(\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ und dem Aufpunkt $A(1/0/0)$

$E: -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -2$

Man schneidet E mit h und erhält Q

$-2(1 - s) - 2 \cdot (1) + 1 + s = -2 \Leftrightarrow s = \frac{1}{3} \Rightarrow Q(\frac{2}{3}/1/\frac{4}{3})$

Die gesuchte Gerade geht durch die Punkte P und Q

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Mit den kleinsten ganzzahligen Komponenten des RV's

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 10

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P(2/1/2) \notin g$ von der Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie den zugehörigen Lotfußpunkt F.

Lösung zu Aufgabe 10
Man erstellt eine Hilfsebene E senkrecht zu g durch P

Mit der Normalenform $(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ und dem Punkt $P(2/1/2)$ und dem NV $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$E : x_2 + 2x_3 = 5$
Man schneidet E mit g und erhält F
$t + 2 \cdot 2t = 5 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow F(1/1/2)$
Man bestimmt den Abstand zwischen F und P

$\overrightarrow{FP} = \vec{p} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$d_{P,g} = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} = 1$

Aufgabe 11
Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(1/-1/2)$ von der Ebene
$E : 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 16 = 0$ und berechnen Sie den zugehörigen Lotfußpunkt F.

Lösung zu Aufgabe 11
Man bestimmt eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch Q

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Man schneidet g und E und erhält F
$2(1 + 2t) - (-1 - t) + 2(2 + 2t) - 16 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow F(3/-2/4)$
Man bestimmt den Abstand zwischen F und Q

$\overrightarrow{FQ} = \vec{q} - \vec{f} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$d_{Q,E} = \left|\overrightarrow{FQ}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3$

Aufgabe 12
Berechnen Sie die Parameterform der Schnittgeraden g der beiden Ebenen
$E_1 : x_1 - 2x_2 - 3 = 0$ und $E_2 : -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4 = 0$.

Lösung zu Aufgabe 12
Dies ist ein einfach unterbesetztes LGS, mit unendlich vielen Lösungen.
$x_1 - 2x_2 = 3$
$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4$
Man wählt $x_2 = t \Rightarrow x_1 = 3 + 2t \Rightarrow x_3 = 5 + 4t$
Die vektorielle Darstellung der Lösung dieses LGS ist die Schnittgerade

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\5\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\1\\4\end{pmatrix}\text{ mit } t\in\mathbb{R}$$

Kugeln

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(2/-3/2)$ und dem Radius $r = 5$

a) in der Vektordarstellung 1.

b) in der Vektordarstellung 2.

c) in Koordinatenform.

Lösung zu Aufgabe 1

a) $K: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)^2 = 25$

b) $K: \vec{x}^2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}\vec{x} - 8 = 0$

c) $K: (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2 + (x_3 - 2)^2 = 25$

Aufgabe 2

Gegeben sei eine Kugel K wie folgt: $K: \vec{x}^2 + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}\vec{x} - 12 = 0$

Berechnen Sie ihre Koordinatenform.

Lösung zu Aufgabe 2

Mittels quadratischer Ergänzung folgt

$$K: (\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})^2 - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 12 = 0$$

$$K: (\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})^2 - 14 - 12 = 0 \Leftrightarrow K: (\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix})^2 = 26$$

$$K: (x_1 + 3)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 - 1)^2 = 26$$

Aufgabe 3

In welcher Ebene E_S liegt der Schnittkreis der Kugel K_1 mit dem Mittelpunkt $M_1(3/3/3)$ und dem Radius $r_1 = \sqrt{\frac{27}{2}}$ und der Kugel $K_2: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 27$.

Berechnen Sie auch Schnittkreismittelpunkt M^* und Schnittkreisradius r^*.

Lösung zu Aufgabe 3
Gleichung der Kugel K_1
$K_1 : (x_1-3)^2+(x_2-3)^2+(x_3-3)^2 = \frac{27}{2}$ oder ausmultipliziert geschrieben
$K_1 : x_1^2+x_2^2+x_3^2-6x_1-6x_2-6x_3 = -\frac{27}{2}$
$K_2 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 27$
K_2-K_1 ergibt die Gleichung der Schnittebene
$E_S : 6x_1+6x_2+6x_3 = \frac{81}{2}$ oder nach kürzen
$E_S : x_1+x_2+x_3-\frac{27}{4} = 0$
Der Schnittkreismittelpunkt M^* liegt auf der Geraden g senkrecht zu E_S durch M_1 (oder M_2)

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Schnitt der Ebene E_S mit der Geraden g liefert M^*
$3+t+3+t+3+t-\frac{27}{4} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{3}{4} \Rightarrow M^*(\frac{9}{4}/\frac{9}{4}/\frac{9}{4})$
Abstand des Mittelpunkts M_1 von E_S

$$\text{HNF } E_S : \frac{x_1+x_2+x_3-\frac{27}{4}}{\sqrt{3}} = 0$$

$$d_{M_1,E_S} = \left| \frac{9}{4\sqrt{3}} \right|$$

Pythagoras liefert $r^{*2} = r_1^2 - d_{M_1,E_S}^2$
$r^{*2} = \frac{27}{2} - \frac{27}{16} = \frac{189}{16}$
$r^* = \frac{3}{4}\sqrt{21}$

Aufgabe 4
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene E_T im Punkt $B(5/9/-1)$ auf der Kugel $K : (x_1-2)^2+(x_2-5)^2+(x_3+1)^2 = 25$.

Lösung zu Aufgabe 4
Die Gleichung der Tangentialebene E_T lautet $E_T : (\vec{x}-\vec{m})(\vec{b}-\vec{m}) = r^2$
Der Mittelpunkt der Kugel ist $M(2/5/-1)$ und ihr Radius ist $r = 5$
$E_T : 3x_1+4x_2 = 51$

Aufgabe 5
Bestimmen Sie die Gleichung der Polarebene E_P im Punkt $P(3/1/12)$ auf der Kugel $K : (x_1-1)^2+x_2^2+(x_3+1)^2 = 25$.

Lösung zu Aufgabe 5
Die Gleichung der Polarebene E_P lautet $E_P : (\vec{x}-\vec{m})(\vec{p}-\vec{m}) = r^2$
Der Mittelpunkt der Kugel ist $M(1/0/-1)$ und ihr Radius ist $r = 5$
$E_P : 2x_1+x_2+13x_3-14 = 0$

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Schnittpunkte der Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

und der Kugel $K : (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 5)^2 = 36$.

Lösung zu Aufgabe 6
Einsetzen der Geradengleichung g in die Kuglegleichung K, liefert eine quadratische Gleichung in Abhängigkeit von t
$(4 - t - 2)^2 + (-5 - 4t + 1)^2 + (9 + t - 5)^2 = 36$
$(2 - t)^2 + (-4 - 4t)^2 + (4 + t)^2 = 36$
$4 - 4t + t^2 + 16 + 32t + 16t^2 + 16 + 8t + t^2 = 36$
$18t^2 + 36t = 0 \Leftrightarrow 18t(t + 2) = 0$
$t_1 = 0,\ t_2 = -2$
Eingesetzt in die Geradengleichung g ergibt die Schnittpunkte
$S_1(4/-5/9)$ und $S_2(6/3/7)$

Aufgabe 7
Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K, die den Ursprung $O(0/0/0)$ als Mittelpunkt hat und die Ebene $E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ im Punkt B berührt. Welche Koordinaten hat der Berührpunkt B?

Lösung zu Aufgabe 7
Der Radius der gesuchten Kugel r ist gleich dem Abstand des Punktes O von der Ebene E
HNF $E : \dfrac{2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12}{3} = 0 \Rightarrow d_{O,E} = r = \left|\dfrac{-12}{3}\right| = 4$
Somit lautet die Gleichung der Kugel
$K : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$
Der Berührpunkt B ist Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g, die senkrecht zu E ist und durch O geht.

$g : \vec{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Geradengleichung g in Ebenengleichung E eingesetzt
$2 \cdot 2t + t + 2 \cdot 2t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{3} \Rightarrow B(\frac{8}{3}/\frac{4}{3}/\frac{8}{3})$

Aufgabe 8
Die Kugel $K : \vec{x}^2 - 25 = 0$ schneidet die Ebene $E : -3x_1 + 4x_3 - 21 = 0$. Bestimmen Sie den Punkt Q auf der Kugel K, der von der Ebene E maximalen Abstand hat.

Lösung zu Aufgabe 8
Schnitt der Geraden g senkrecht zu E durch O mit der Kugel K liefert zwei Schnittpunkte. Vergleich derer Abstände zu E liefert den gesuchten Punkt Q

$g : \vec{x} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

Geradengleichung g in Kugelgleichung K eingesetzt

$(-3t)^2 + (4t)^2 = 25 \Leftrightarrow t^2 - 1 = 0$

$t_1 = 1,\ t_2 = -1 \Rightarrow S_1(-3/0/4),\ S_2(3/0/-4)$

Bestimmung der Abstände $S_1,\ S_2$ zur Ebene E

HNF $E : \dfrac{-3x_1 + 4x_3 - 21}{5} = 0$

$d_{S_1,E} = \left|\dfrac{4}{5}\right|$

$d_{S_2,E} = \left|-\dfrac{46}{5}\right| > d_{S_1,E}$

Damit ist der Punkt S_2 der gesuchte Punkt Q

$Q(3/0/-4)$

Aufgabe 9

Für welches $c \in \mathbb{R}$ ist die Geraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ Tangente an die Kugel $K : \vec{x}^2 - 25 = 0$?

Lösung zu Aufgabe 9

Einsetzen der Geradengleichung g in die Kuglegleichung K, liefert eine quadratische Gleichung in Abhängigkeit von t mit dem Parameter c, die nur eine Lösung besitzen darf (Tangentenbedingung).

$(-5 + t)^2 + (2t)^2 + (-3 + ct)^2 = 25$

$25 - 10t + t^2 + 4t^2 + 9 - 6ct + c^2t^2 = 25$

$(5 + c^2)t^2 - (10 + 6c)t + 9 = 0$

Die Diskriminante muss Null werden:

$(10 + 6c)^2 - 36(5 + c^2) = 0$

$100 + 120c + 36c^2 - 180 - 36c^2 = 0 \Leftrightarrow 120c = 80$

$c = \frac{2}{3}$

Aufgabe 10

Berechnen Sie den Radius r der Kugel K, die den Mittelpunkt $M(3/1/8)$ hat und aus der Ebene $E : 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ einen Schnittkreis mit dem Radius $r^* = 4$ ausschneidet?

Lösung zu Aufgabe 10

Der Abstand des Mittelpunkts M von der Ebene E

HNF $\dfrac{3x_1 + x_2 + 2x_3 - 12}{\sqrt{14}} = 0$

$d_{M,E} = \left|\dfrac{14}{\sqrt{14}}\right|$

Pythagoras liefert

$r^2 = r^{*2} + d_{M,E}^2 = 16 + 14 = 30$

$r = \sqrt{30}$

Aufgabe 11
Gegeben sind die Ebene $E : 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 1 = 0$ und die Kugel $K : (x_1 - 3)^2 + x_2^2 + (x_3 + 2)^2 = 36$. Bestimmen Sie je eine Gleichung der Ebenen E_1 und E_2, die parallel zu E sind und aus der Kugel K einen Schnittkreis mit dem Radius $r^* = \sqrt{20}$ ausschneiden.

Lösung zu Aufgabe 11
Die Schnittkreismittelpunkte M_1 und M_2 liegen auf einer normierten Geraden g senkrecht zu E durch $M(3/0/-2)$.
Sie liegen symmetrisch zum Mittelpunkt M.

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{t}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R} \Rightarrow M_i(3 + 2t/-2t/-2-t)$ mit $i = 1,2$

Den Abstand der Mittelpunkte M_i vom Mittelpunkt M erhält man mit Pythagoras
$d^2 = r^2 - r^{*2} = 36 - 20 = 16 \Rightarrow d = 4$

$\vec{x}_{M_i} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \pm \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Damit folgt $M_1(\frac{17}{3}/-\frac{8}{3}/-\frac{10}{3})$ und $M_2(\frac{1}{3}/\frac{8}{3}/-\frac{2}{3})$
Mit der Normalenform für Ebenen folgt $E_i : (\vec{x} - \vec{m}_i) \cdot \vec{n} = 0$
$E_1 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 - 20 = 0$
$E_2 : 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 4 = 0$

Aufgabe 12
Eine Kugel K berührt die Ebene $E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ im Punkt $A(4/3/-2)$ und geht durch $Q(7/6/2)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel K.

Lösung zu Aufgabe 12
Der Mittelpunkt der Kugel K liegt auf der Geraden senkrecht zu E durch A
$M_t(4 + t/3 + 2t/-2 + 2t)$
Es muss gelten
$\overline{AM_t} = \overline{QM_t}$
$\sqrt{t^2 + (2t)^2 + (2t)^2} = \sqrt{(-3+t)^2 + (-3+2t)^2 + (-4+2t)^2}$
$9t^2 = 9 - 6t + t^2 + 9 - 12t + 4t^2 + 16 - 16t + 4t^2$
$0 = 34 - 34t \Rightarrow t = 1$
Der Mittelpunkt ist damit $M(5/5/0)$
Der Radius r ist gleich dem Abstand von M zu E
HNF $\frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6}{3} = 0$
$d_{M,E} = r = \left|\frac{9}{3}\right| = 3$
Damit lautet die Gleichung der Kugel K
$K : (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 5)^2 + x_3^2 = 9$