Verschärfte Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und die Ebene

$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $r, s, t \in \mathbb{R}$.

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$

a) ist $g \parallel E$?

b) liegt g in E?

c) schneidet g die Ebene E?

Lösung zu Aufgabe 1

a) Die Gerade liegt parallel zur Ebene, wenn der RV der Geraden orthogonal zum NV der Ebene ist und der Aufpunkt der Geraden nicht in der Ebene liegt:

Koordinatenform der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 - a \\ -16 - a \end{pmatrix}$$

$E: 5x_1 + (4 - a)x_2 - (16 + a)x_3 = -48 + 2a$

Orthogonalität zwischen RV und NV fordert

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 - a \\ -16 - a \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow -5 - 8 + 2a + 16 + a = 0$

$a = -1$

Aufpunkt der Geraden nicht in der Ebene und mit $a = -1$:

$5 \cdot b + (4 - (-1)) \cdot 1 - (16 - 1) \cdot 3 \neq -48 - 2$

$b \neq -2$

Ergebnis: $a = -1 \wedge b \neq -2$

b) Die Gerade liegt in der Ebene, wenn der RV der Geraden orthogonal zum NV der Ebene ist und der Aufpunkt der Geraden in der Ebene liegt:

Koordinatenform der Ebene (vgl. a)):

$E: 5x_1 + (4 - a)x_2 - (16 + a)x_3 = -48 + 2a$

$a = -1$

Aufpunkt der Geraden in der Ebene und mit $a = -1$:

$5 \cdot b + (4 - (-1)) \cdot 1 - (16 - 1) \cdot 3 = -48 - 2$

$b = -2$

Ergebnis: $a = -1 \wedge b = -2$

c) Die Gerade schneidet die Ebene, wenn der RV der Geraden nicht orthogonal zum NV der Ebene ist, also mit a) und b) wenn gilt
Ergebnis: $a \neq -1$

Aufgabe 2

Gegeben sind die Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und die Ebene

$E : 3x_1 + bx_2 + x_3 + 4 = 0$.
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$

a) ist $g \parallel E$?

b) liegt g in E?

c) schneidet g die Ebene E?

Lösung zu Aufgabe 2

a) Die Gerade liegt parallel zur Ebene, wenn der RV der Geraden orthogonal zum NV der Ebene ist und der Aufpunkt der Geraden nicht in der Ebene liegt:
NV der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität zwischen RV und NV fordert

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3a + 3b + 3 = 0$

$a = -b - 1$

Aufpunkt der Geraden nicht in der Ebene und mit $a = -b - 1$:

$3 \cdot 1 + b \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 4 \neq 0$

$b \neq -3$

Ergebnis: $a = -b - 1 \wedge b \neq -3$

b) Die Gerade liegt in der Ebene, wenn der RV der Geraden orthogonal zum NV der Ebene ist und der Aufpunkt der Geraden in der Ebene liegt:

NV der Ebene:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalität zwischen RV und NV fordert

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow\ 3a + 3b + 3 = 0$

$a = -b - 1$

Aufpunkt der Geraden in der Ebene und mit $a = -b - 1$:

$3 \cdot 1 + b \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 4 = 0$

$b = -3$

Ergebnis: $a = -b - 1 \wedge b = -3$, also für $a = -4$, $b = -3$

c) Die Gerade schneidet die Ebene, wenn der RV der Geraden nicht orthogonal zum NV der Ebene ist, also mit a) und b) wenn gilt

Ergebnis: $a \neq -b - 1$

Aufgabe 3

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1\ :\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 7 = 0$ und $E_2\ :\ ax_1 + bx_2 - x_3 - c = 0$.

Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die beiden Ebenen

a) identisch sind.

b) parallel sind.

c) sich schneiden.

Lösung zu Aufgabe 3

Geschicktes Umschreiben der Ebene E_1

$E_1\ :\ -x_1 - \frac{3}{2}x_2 - x_3 + \frac{7}{2} = 0$

Vergleichen der Koeffizienten

a) Zwei Ebenen sind identisch, wenn sie in ihren Koeffizienten der Gleichungen übereinstimmen.

$a = -1 \wedge b = -\frac{3}{2} \wedge c = -\frac{7}{2}$

b) Zwei Ebenen sind parallel, wenn ihre NV’s linear abhängig sind und sie keinen Punkt gemeinsam haben.

$a = -1 \wedge b = -\frac{3}{2} \wedge c = -\frac{7}{2}$

c) Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden, wenn ihre NV's linear unabhängig sind.
$a \neq -1 \wedge b \neq -\frac{3}{2}$

Aufgabe 4
Gegeben sind die beiden Punkte $A(3/5/4)$ und $A^*(1/-1/0)$. Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene E, die zu A und A^* symmetrisch liegt.

Lösung zu Aufgabe 4
Die gesuchte Ebene E liegt orthogonal zur Verbindungslinie AA^* und geht durch deren Mittelpunkt M.

$$\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}^*) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow M(2/2/2)$$

Der NV der Ebene ist $\vec{n} = \overrightarrow{AA^*} = \vec{a}^* - \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$

Mit der Normalenform der Ebene $(\vec{x} - \vec{m}) \cdot \vec{n} = 0$ folgt
$E: -2x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -24$ oder nach kürzen
$E: x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$

Aufgabe 5
Gegeben ist die Ebene $E: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 18 = 0$. Berechnen Sie die Koordinaten des zu $D(0/5/2)$ bezüglich der Ebene E symmetrischen Punktes D^*.

Lösung zu Aufgabe 5
Bestimmung der Lotgeraden g senkrecht zu E, die D enthält

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Bestimmung des zugehörigen Lotfußpunktes F, als Schnittpunkt von g mit E
$2(2t) - 3(5 - 3t) + 6(2 + 6t) - 18 = 0$
$t = \frac{21}{49} = \frac{3}{7} \Rightarrow F(\frac{6}{7}/\frac{26}{7}/\frac{32}{7})$
Der Lotfußpunkt ist Mittelpunkt von D und D^*, folglich gilt

$$\vec{d}^* = 2\vec{f} - \vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{12}{7} \\ \frac{17}{7} \\ \frac{50}{7} \end{pmatrix} \Rightarrow D^*(\frac{12}{7}/\frac{17}{7}/\frac{50}{7})$$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 12 = 0$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Geben Sie eine Gleichung der an E gespiegelten Geraden g^* an.

Lösung zu Aufgabe 6

Bestimmung des Schnittpunktes S von g mit E

$2 + 4t + 2 - 2(2 + t) - 12 = 0$

$t = 6 \Rightarrow S(26/1/8)$

Bestimmung des Lotfußpunktes F vom Aufpunkt der Geraden $A(2/1/2)$ bezüglich der Ebene E. Die Lotgerade h senkrecht zur Ebene E durch A lautet

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Der Schnittpunkt von E mit h liefert F

$2 + t + 2(1 + 2t) - 2(2 - 2t) - 12 = 0$

$t = \frac{4}{3} \Rightarrow F(\frac{10}{3}/\frac{11}{3}/-\frac{2}{3})$

Spiegeln von A an F liefert

$$\vec{a}^* = 2\vec{f} - \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{14}{3} \\ \frac{19}{3} \\ -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow A^*(\tfrac{14}{3}/\tfrac{19}{3}/-\tfrac{10}{3})$$

Die Spiegelgerade g^* geht durch die Punkte S und A^*

$$g^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{64}{3} \\ \frac{16}{3} \\ -\frac{34}{3} \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

oder mit ganzzahligem RV

$$g^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 26 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 32 \\ -8 \\ 17 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Gleichung aller Ebenen $E_{a,b}$ $(a \neq 0,\ b \neq 0)$, die die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R} \text{ als Schnittgerade enthalten.}$$

Welche dieser Ebenen enthält den Ursprung?

Lösung zu Aufgabe 7

Die gesuchte Ebene hat den RV_1 der Geraden und einen zu diesem orthogonalen RV_2, dann liegt ein sogenanntes "Ebenenbüschel" vor, das genau die eine Schnittgerade g besitzt:

$$RV1: \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und RV2 } \vec{w}_{a,b} = \begin{pmatrix} a \\ 4b \\ 3b \end{pmatrix} \perp \vec{u}$$

Der Normalenvektor der Ebene lautet damit

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{w}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ 4b \\ 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25b \\ -4a \\ 3a \end{pmatrix}$$

$E_{a,b} : -25bx_1 - 4ax_2 + 3ax_3 = -25b - 16a$

Die Ebene E_O, die zusätzlich durch den Ursprung geht muss $O(0/0/0)$ enthalten:

Es muss also gelten: $-25b - 16a = 0$ oder $-25b = 16a$

$E_O : 16ax_1 - 4ax_2 + 3ax_3 = 0$ oder nach kürzen

$E_O : 16x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 0$ enthält den Ursprung

Aufgabe 8

Gegeben sind die Ebene $E : 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ und die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}.$$

Die Gerade h ist parallel zur Ebene E, geht durch den Punkt $B(3/5/13) \notin E$ und hat mit der Geraden g genau einen Punkt P gemeinsam. Berechnen Sie die Koordinaten von P und stellen Sie eine Gleichung für h auf.

Lösung zu Aufgabe 8

Bestimmen der Gleichung der Ebene F, die parallel zu E ist und B enthält

$F : 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 40$

Schnitt von F mit g liefert P

$3(6 + t) + 7 + 2t + 2(8 - 2t) = 40$

$t = -1 \Rightarrow P(5/5/10)$

Die gesuchte Gerade geht durch die Punkte B und P

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 9

Gegeben ist die Kugel $K : (x_1 - 4)^2 + (x_2 + 5)^2 + (x_3 + 1)^2 = 54$ und die Ebene $E : 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24 = 0$.

Die Ebene E schneidet die Kugel K in einem Kreis k mit dem Schnittkreisradius $r^* = \sqrt{5}$. Geben Sie die Schar aller Kugeln K_t an, die mit E denselben Schnittkreis k haben.

Lösung zu Aufgabe 9
Der Mittelpunkte M_t der Scharkugeln liegen auf der Lotgeraden zu E durch den Mittelpunkt $M(4/-5/-1)$ der gegebenen Kugel:

Lotgerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow M_t(4+2t/-5+6t/-1+3t)$

Abstand der Mittelpunkte M_t von der Ebene E

HNF $E: \dfrac{2x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 24}{7} = 0$

$d_{M_t,E} = \left| \dfrac{2(4+2t) + 6(-5+6t) + 3(-1+3t) - 24}{7} \right| = 7|t-1|$

Der Radius r_t der Scharkugeln ergibt sich mit Pythagoras

$r_t^2 = r^{*2} + d_{M_t,E}^2 = 5 + 49(t^2 - 2t + 1) = 49t^2 - 98t + 54$

Somit folgt für die Gleichung der Scharkugeln:

$K_t: (x_1 - 4 - 2t)^2 + (x_2 + 5 - 6t)^2 + (x_3 + 1 - 3t)^2 = 49t^2 - 98t + 54$

Aufgabe 10
Gegeben sind die beiden parallelen Ebenen $E_1: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 20 = 0$ und $E_2: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 50 = 0$ und eine Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, die die beiden Ebenen schneidet.
Die Kugel K hat ihren Mittelpunkt auf der Geraden g und berührt die beiden Ebenen E_1 und E_2. Geben Sie die Gleichung der Kugel K an.

Lösung zu Aufgabe 10
Berechnung des Schnittpunkts S_1 der Ebene E_1 mit der Geraden g

$5(2+t) + 4(2+6t) + 3(-1+2t) + 20 = 0$

$t = -1 \Rightarrow S_1(1/-4/-3)$

Berechnung des Schnittpunkts S_2 der Ebene E_2 mit der Geraden g

$5(2+t) + 4(2+6t) + 3(-1+2t) - 50 = 0$

$t = 1 \Rightarrow S_2(3/8/1)$

Der Mittelpunkt der Kugel ist gleich dem Mittelpunkt der beiden Schnittpunkte

$\vec{m} = \dfrac{1}{2}(\vec{s}_1 + \vec{s}_2) \Rightarrow M(2/2/-1)$

Der Radius r der gesuchten Kugel ist gleich dem Abstand des Mittelpunkts M von einer der beiden Ebenen

HNF $E_1: \dfrac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 20}{5\sqrt{2}} = 0$

$r = d_{M,E_1} = \left| \dfrac{5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 20}{5\sqrt{2}} \right| = \dfrac{35}{5\sqrt{2}} = \dfrac{7}{\sqrt{2}}$

Kugel mit Mittelpunkt $M(m_1/m_2/m_3)$ und Radius r hat die Gleichung

$K: (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_1)^2 = r^2$

Obig bestimmte Größen eingesetzt:

$K: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = \frac{49}{2}$

Aufgabe 11
Gegeben sind die beiden Kugeln $K_1 : (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 3)^2 = 16$ und $K_2 : (x_1 - 2)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2)^2 = 9$.
Bestimmen Sie die Koordinaten der Spitze P des gemeinsamen Tangentialkegels der Kugeln K_1 und K_2.

Lösung zu Aufgabe 11
K_1 (größere Kugel) mit $M_1(3/1/3)$ und $r_1 = 4$
K_2 (kleinere Kugel) mit $M_2(2/0/2)$ und $r_2 = 3$
Berechnung des Einheitsvektors (von großem Kugelmittelpunkt zu kleinem Kugelmittelpunkt)

$$\overrightarrow{M_1M_2}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{M_1M_2} = \sqrt{3}$$

Der Abstand des Punktes P (Spitze der gemeinsamen Tangentialkegel) von M_2 (Mittelpunkt der kleineren Kugel) sei a
Der Strahlensatz liefert somit

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a + \overline{M_1M_2}}{a} \Leftrightarrow \frac{4}{3} = \frac{a + \sqrt{3}}{a} \Leftrightarrow 4a = 3a + 3\sqrt{3}$$

$a = 3\sqrt{3}$
Der Punkt P ergibt sich aus:

$$\vec{p} = \vec{m}_2 + a \cdot \overrightarrow{M_1M_2}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$P(-1/-3/-1)$

Aufgabe 12
Gegeben ist die Kugel $K : (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 5)^2 = 36$ und die Gleichung der Schnittgeraden $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ von zwei Tangentialebenen E_{T_1} und E_{T_2} an K. Die Gerade g hat keine gemeinsamen Punkte mit K.
Bestimmen Sie jeweils die Koordinaten der Berührpunkte B_1 und B_2 einer jeden Tangentialebene E_{T_1} und E_{T_2} an K sowie die Gleichungen der Tangentialebenen E_{T_1} und E_{T_2}.

Lösung zu Aufgabe 12
Die Kugel hat den Mittelpunkt $M(2/-1/5)$ und den Radius $r = 6$
Aufstellen der Gleichung der Ebene E senkrecht zu g durch M
$E : -2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$
Schnittpunkt P der Geraden g mit der Ebene E

$-2(6-2t)+t+2(13+2t)=5 \Leftrightarrow t=-1 \Rightarrow P(8/-1/11)$
Polarebene E_P zu P bezüglich der Kugel K
$E_P : (\vec{x}-\vec{m}) \cdot (\vec{p}-\vec{m}) = r^2$

$$E_P : \left(\vec{x}-\begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}6\\0\\6\end{pmatrix} = 36 \Leftrightarrow E_P : x_1+x_3=13$$

Bilden der Schnittgeraden h von E mit E_P
$-2x_1+x_2+2x_3=5$
$x_1+x_3=13$
$\Rightarrow x_3=t,\ x_1=13-t,\ x_2=31-4t$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix}13\\31\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-4\\1\end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkte dieser Geraden h mit der Kugel K liefert die Berührpunkte B_1 und B_2
$(13-t-2)^2+(31-4t+1)^2+(t-5)^2=36$
$(11-t)^2+(32-4t)^2+(t-5)^2=36$
$121-22t+t^2+1024-256t+16t^2+t^2-10t+25=36$
$18t^2-288t+1134=0$

$$t^2-16t+63=0 \Leftrightarrow t_{1,2}=\frac{16\pm\sqrt{256-252}}{2}=\frac{16\pm 2}{2}$$

$t_1=9,\ t_2=7$
$B_1(4/-5/9),\ B_2(6/3/7)$
Für die zugehörigen Tangentialebenen folgt mit $E_{T_i} : (\vec{x}-\vec{m}) \cdot (\vec{b}_i-\vec{m}) = r^2$ und $i=1,2$
$E_{T_1} : x_1-2x_2+2x_3-32=0$
$E_{T_2} : 2x_1+2x_2+x_3-25=0$