

Aufgabe 1

- (a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $3x_1 + 6x_2 = 37$ keine ganzzahlige Lösung besitzt.
- (b) Bestimmen Sie ein a so, dass $3x_1 + ax_2 = 37$ ganzzahlig lösbar ist.
- (c) Bestimmen Sie ein b so, dass $3x_1 + 6x_2 = b$ ganzzahlig lösbar ist.

Lösung zu Aufgabe 1

- (a) Man wählt $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{Z}$
 $x_1 = \frac{37}{3} - 2t = \frac{37-6t}{3} \Rightarrow x_2 \in \mathbb{Z}, x_1 \notin \mathbb{Z}$
- (b) Man wählt $x_1 = t$ mit $t \in \mathbb{Z}$
 $x_2 = \frac{37-3t}{a}$
für $a = 2$ und $x_1 = 1 \Rightarrow x_2 = 17$
- (c) Man wählt $x_2 = t$ mit $t \in \mathbb{Z}$
 $x_1 = \frac{b}{3} - 2t$ für $b = 3k$ mit $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

Aufgabe 2

Für die Innenwinkel α, β, γ eines Dreiecks gelte:
 α ist doppelt so groß wie β und β ist um 20° größer als γ . Bestimmen Sie α, β, γ .

Lösung zu Aufgabe 2

Winkelsumme im Dreieck liefert

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

$$\alpha = 2\beta$$

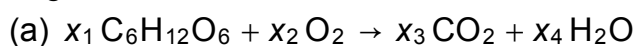
$$\beta = \gamma + 20^\circ$$

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \\ 1 & 1 & 1 & 180^\circ \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 20^\circ \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} \alpha & \beta & \gamma & \\ 1 & 1 & 1 & 180^\circ \\ 0 & 3 & 1 & 180^\circ \\ 0 & 0 & 4 & 120^\circ \end{array}$$

$\gamma = 30^\circ, \beta = 50^\circ, \alpha = 100^\circ$

Aufgabe 3

Die Zahlen x_1, x_2, x_3, x_4 in folgenden chemischen Reaktionsgleichungen sollen möglichst kleine natürliche Zahlen sein.



Lösung zu Aufgabe 3

(a) Forderung für die Koeffizienten: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$

Gleichung für den Kohlenstoff C

$$6x_1 = x_3$$

Gleichung für den Wasserstoff H

$$12x_1 = 2x_4$$

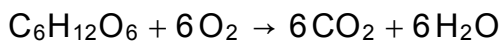
Gleichung für den Sauerstoff O

$$6x_1 + 2x_2 = 2x_3 + x_4$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|cccc|c} 6 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x_4 = t \Rightarrow x_3 = t \Rightarrow x_2 = t \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}t$$

Die kleinste natürliche Lösung erhält man für $t = 6$



(b) Forderung für die Koeffizienten: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$

Gleichung für den Calcium Ca

$$3x_1 = x_3$$

Gleichung für den Phosphor P

$$2x_1 = x_4$$

Gleichung für den Sauerstoff O

$$8x_1 = 4x_4$$

Gleichung für Wasserstoff H

$$x_2 = 3x_4$$

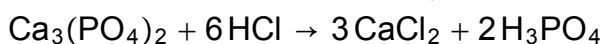
Gleichung für Chlor Cl

$$x_2 = 2x_3$$

$$\begin{array}{cccc|cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|cccc|c} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$x_4 = t \Rightarrow x_2 = 3t \Rightarrow x_3 = \frac{3}{2}t \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}t$$

Die kleinste natürliche Lösung erhält man für $t = 2$



Aufgabe 4

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel 3. Ordnung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ so, dass sie durch die Punkte A, B, C geht.

(a) $A(1/5)$, $B(2/9)$, $C(3/19)$

(b) $A(-2/-25)$, $B(1/11)$, $C(4/11)$

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Punktprobe für A

$$f(1) = 5 \Leftrightarrow a + b + c + d = 5$$

Punktprobe für B

$$f(2) = 9 \Leftrightarrow 8a + 4b + 2c + d = 9$$

Punktprobe für C

$$f(3) = 19 \Leftrightarrow 27a + 9b + 3c + d = 19$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 9 & \Rightarrow & 0 & 4 & 6 & 7 & 31 & \Rightarrow & 0 & 4 & 6 & 7 & 31 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 19 & & 0 & 18 & 24 & 26 & 116 & & 0 & 0 & 6 & 11 & 47 \end{array}$$

$$d = t \Rightarrow c = \frac{1}{6}(47 - 11t) \Rightarrow b = -4 + t \Rightarrow a = \frac{1}{6}(7 - t)$$

$$f(x) = \frac{1}{6}(7 - t)x^3 + (-4 + t)x^2 + \frac{1}{6}(47 - 11t)x + t$$

$$f(x) = \frac{1}{6}[(7 - t)x^3 + (-24 + 6t)x^2 + (47 - 11t)x + 6t]$$

(b) Punktprobe für A

$$f(-2) = -25 \Leftrightarrow -8a + 4b - 2c + d = -25$$

Punktprobe für B

$$f(1) = 11 \Leftrightarrow a + b + c + d = 11$$

Punktprobe für C

$$f(4) = 11 \Leftrightarrow 64a + 16b + 4c + d = 11$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ -8 & 4 & -2 & 1 & -25 & \Rightarrow & 0 & 12 & 6 & 9 & 63 & \Rightarrow & 0 & 12 & 6 & 9 & 63 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 19 & & 0 & 112 & 52 & 73 & 523 & & 0 & 0 & 4 & 11 & 65 \end{array}$$

$$d = t \Rightarrow c = \frac{1}{4}(65 - 11t) \Rightarrow b = \frac{1}{8}(5t - 23) \Rightarrow a = \frac{1}{8}(9t - 19)$$

$$f(x) = \frac{1}{8}(9t - 19)x^3 + \frac{1}{8}(5t - 23)x^2 + \frac{1}{4}(65 - 11t)x + t$$

$$f(x) = \frac{1}{8}[(9t - 19)x^3 + (5t - 23)x^2 + (130 - 22t)x + 8t]$$

Aufgabe 5

Für Düngerversuche auf einem Stuttgarter Acker soll 10 kg Blumendünger hergestellt werden, welcher 40 % Kalium, 35 % Stickstoff und 25 % Phosphor enthält. Zur Herstellung der Mischung stehen drei Düngersorten zur Verfügung.

	Sorte I	Sorte II	Sorte III
Kalium	40 %	30 %	50 %
Stickstoff	50 %	20 %	30 %
Phosphor	10 %	50 %	20 %

Stellen Sie für die verwendeten Mengen der Sorten I, II, III ein LGS mit ganzzahligen Koeffizienten auf und lösen Sie es.

Lösung zu Aufgabe 5

Definition der Variablen:

x_1 sei die Anzahl der kg von Sorte I

x_2 sei die Anzahl der kg von Sorte II

x_3 sei die Anzahl der kg von Sorte III

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

$$0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 = \underbrace{0,4 \cdot 10}_{40\% \text{ von } 10 \text{ kg}}$$

Ganzzahlig gemacht:

$$4x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 40$$

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 35$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 25$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 4 & 3 & 5 & 40 \\ 5 & 2 & 3 & 35 \\ 1 & 5 & 2 & 25 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 15 \\ 0 & 4 & 1 & 15 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}$$

$$x_3 = 3 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow x_1 = 4$$

Man benötigt also

4 kg von Sorte I, 3 kg von Sorte II und 3 kg von Sorte III

Aufgabe 6

Stellen Sie zu folgenden Anwendungsaufgaben ein LGS auf und lösen Sie es.

- Auf einem Bauernhof sind Hühner und Kaninchen mit zusammen 120 Füßen und 36 Köpfen. Wie viele Hühner und Kaninchen sind es?
- Jemand kauft Gänse zu je 10 Groschen, Hühner zu je 5 Groschen und Entenküken zu je 1 Groschen, insgesamt 50 Tiere für 100 Groschen. Wie viele Hühner hat er gekauft?
- Ein Vater und seine beiden Söhne sind zusammen 100 Jahre alt. Der Vater ist doppelt so alt wie sein ältester Sohn und 30 Jahre älter als sein jüngster Sohn. Wie alt sind sie?

- (d) Zwei ältere Ehepaare sind zusammen 290 Jahre alt. Die Männer sind zusammen 10 Jahre älter als die Frauen. Die Frauen sind gleich alt. Ein Mann ist um 4 Jahre älter als der andere Mann. Bestimmen Sie jeweils das Alter der vier Personen.

Lösung zu Aufgabe 6

- (a) Definition der Variablen:

x_1 sei die Anzahl der Hühner

x_2 sei die Anzahl der Kaninchen

Köpfe:

$$x_1 + x_2 = 36$$

Füße:

$$2x_1 + 4x_2 = 120$$

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 36 \\ 2 & 4 & 120 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 36 \\ 0 & -2 & -48 \end{array} \Rightarrow x_2 = 24 \Rightarrow x_1 = 12$$

12 Hühner und 24 Kaninchen

- (b) Definition der Variablen: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^0$

x_1 sei die Anzahl der Gänse

x_2 sei die Anzahl der Hühner

x_3 sei die Anzahl der Entenküken

$$x_1 + x_2 + x_3 = 50$$

$$10x_1 + 5x_2 + x_3 = 100$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 10 & 5 & 1 & 100 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 5 & 9 & 400 \end{array}$$

$$x_3 = t \Rightarrow x_2 = 80 - \frac{9}{5}t \text{ hiermit folgt } t = 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40$$

$$x_1 = -30 + \frac{4}{5}t \text{ hiermit folgt } t = 40, 45, 50, 55, \dots$$

Die einzige Möglichkeit geht also mit $t = 40$

$$\Rightarrow x_3 = 40 \Rightarrow x_2 = 8 \Rightarrow x_1 = 2$$

8 Hühner (40 Entenküken, 2 Gänse)

- (c) Definition der Variablen: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$

x_1 sei das Alter des Vaters

x_2 sei das Alter des älteren Sohnes

x_3 sei das Alter des jüngeren Sohnes

$$x_1 + x_2 + x_3 = 100$$

$$x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_3 + 30$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 30 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 1 & 2 & 70 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 100 \\ 0 & 3 & 1 & 100 \\ 0 & 0 & -5 & -110 \end{array}$$

$$x_3 = 22 \Rightarrow x_2 = 26 \Rightarrow x_1 = 52$$

Der Vater ist 52, der ältere Sohn ist 26 und der jüngere Sohn ist 22 Jahre alt.

(d) Definition der Variablen: $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$

x_1 sei das Alter des Mannes 1

x_2 sei das Alter des Mannes 2

x_3 sei das Alter der Frau 1

x_4 sei das Alter der Frau 2

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 290$$

$$x_1 + x_2 = 10 + x_3 + x_4$$

$$x_3 = x_4$$

$$x_1 + 4 = x_2$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 290 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 290 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 140 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 140 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 294 \end{array}$$

$$x_4 = 70 \Rightarrow x_3 = 70 \Rightarrow x_2 = 77 \Rightarrow x_1 = 73$$

Die Männer sind 73 und 77, die beiden Frauen sind jeweils 70

Aufgabe 7

Jörg und Tanja haben zusammen 40 Taler. Tanja und Beate haben zusammen 50 Taler. Beate hat 10 Taler mehr als Jörg. Wie viele Taler hat Jörg mindestens, wie viele höchstens?

Lösung zu Aufgabe 7

Definition der Variablen: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^0$

x_1 ist die Anzahl der Taler von Jörg

x_2 ist die Anzahl der Taler von Tanja

x_3 ist die Anzahl der Taler von Beate

Einschränkungen: $0 \leq x_1 \leq 40, 0 \leq x_2 \leq 40, 0 \leq x_3 \leq 50$

$$x_1 + x_2 = 40$$

$$x_2 + x_3 = 50$$

$$x_3 = x_1 + 10$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 50 \\ -1 & 0 & 1 & 10 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 1 & 50 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 40 \\ 0 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_3 = t \text{ mit } 0 \leq x_3 \leq 50$$

$$0 \leq t \leq 50$$

$$\Rightarrow x_2 = 50 - t \text{ mit } 0 \leq x_2 \leq 40 \Leftrightarrow 0 \leq 50 - t \leq 40 \Leftrightarrow -50 \leq -t \leq -10$$

$$10 \leq t \leq 50$$

$$\Rightarrow x_1 = t - 10 \text{ mit } 0 \leq x_1 \leq 40 \Leftrightarrow 0 \leq t - 10 \leq 40$$

$$10 \leq t \leq 50$$

Mit den Einschränkungen folgt:

Jörg hat mindestens 0 Taler ($t = 10$) und höchstens 40 Taler ($t = 50$)

Aufgabe 8

Verteilen Sie 9900 Drachmen unter vier Personen so, dass die zweite ein Siebentel mehr als die erste bekommt, die dritte 300 Drachmen mehr als die erste und zweite zusammen und die vierte 300 Drachmen mehr als die ersten drei zusammen.

Lösung zu Aufgabe 8

Definition der Variablen: $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^0$

x_1 ist die Anzahl der Drachmen der ersten Person

x_2 ist die Anzahl der Drachmen der zweiten Person

x_3 ist die Anzahl der Drachmen der dritten Person

x_4 ist die Anzahl der Drachmen der vierten Person

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9900$$

$$x_2 = \frac{8}{7}x_1 \Leftrightarrow 7x_2 = 8x_1$$

$$x_1 + x_2 + 300 = x_3$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + 300 = x_4$$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 9900 \\ -8 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -300 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -300 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 9900 \\ 0 & 15 & 8 & 8 & 79200 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 10200 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 10200 \end{array}$$

$$\Rightarrow x_4 = 5100 \Rightarrow x_3 = 2550 \Rightarrow x_2 = 1200 \Rightarrow x_1 = 1050$$

Der erste bekommt 1050 Drachmen, der zweite 1200 Drachmen, der dritte 2550 Drachmen und der vierte 5100 Drachmen

Aufgabe 9

In den folgenden Zahlenrätseln ist n eine dreistellige Zahl. Bestimmen Sie jeweils alle natürlichen Zahlen mit den angegebenen Eigenschaften.

(a) Die Quersumme von n ist 12. Schreibt man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge, so ergibt sich 24 weniger als das dreifachen von n .

(b) Die letzte Ziffer ist um 2 größer als die erste. Lässt man die erste Ziffer weg

und multipliziert mit 8, so erhält man 15 mehr als n .

- (c) Schreibt man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge und subtrahiert die erhaltene Zahl von n , so ergibt sich 693. Die Summe der ersten und letzten Ziffer ist 11.

Lösung zu Aufgabe 9

Definition der Variablen: $0 \leq x_1, x_2, x_3 \leq 9$ und $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}^0$

x_1 ist die erste Ziffer (Hunderter)

x_2 ist die zweite Ziffer (Zehner)

x_3 ist die dritte Ziffer (Einer)

Die Zahl n ist somit $n = 100x_1 + 10x_2 + x_3$

(a) $x_1 + x_2 + x_3 = 12$

$$100x_3 + 10x_2 + x_1 + 24 = 3(100x_1 + 10x_2 + x_3)$$

$$\Leftrightarrow -299x_1 - 20x_2 + 97x_3 = -24$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ -299 & -20 & 97 & -24 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 31 & 44 & 396 \end{array}$$

$x_2 = t$ mit $0 \leq t \leq 9 \Rightarrow x_3 = 9 - \frac{31}{44}t$ nur natürlich oder zwischen Null und Neun für $t = 0$

$$x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

Die gesuchte Zahl lautet somit

$$n = 309$$

(b) $x_1 + 2 = x_3$

$$8(10x_2 + x_3) = 100x_1 + 10x_2 + x_3 + 15$$

$$\Leftrightarrow -100x_1 + 70x_2 + 7x_3 = 15$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ -100 & 70 & 7 & 15 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 70 & -93 & -185 \end{array}$$

$x_3 = t$ mit $0 \leq t \leq 9 \Rightarrow x_1 = -2 + t$ nur natürlich oder zwischen Null und Neun für $t \geq 2$

$x_2 = \frac{-185+93t}{70}$ nur natürlich oder zwischen Null und Neun für $t = 5$

$$x_3 = 5 \Rightarrow x_2 = 4 \Rightarrow x_1 = 3$$

Die gesuchte Zahl lautet somit

$$n = 345$$

(c) $100x_1 + 10x_2 + x_3 - (100x_3 + 10x_2 + x_1) = 693$

$$\Leftrightarrow 99x_1 - 99x_3 = 693 \Leftrightarrow x_1 - x_3 = 7$$

$$x_1 + x_3 = 11$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 1 & 0 & -1 & 7 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}$$

$$x_2 = t \text{ mit } 0 \leq t \leq 9$$

$$x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = 9$$

$$n = 9t2, \text{ mit } 0 \leq t \leq 9$$