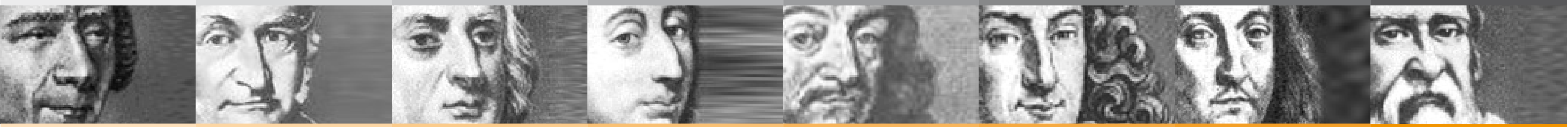


Vektoren

Zusammenfassung

- Lineare Gleichungssysteme
- Geraden
- Ebenen
- Kugeln

Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.

© Jürgen Gilg · E-Mail: gilg@acrotex.net · Webseite: www.acrotex.net **Oktober 2007**

Inhaltsverzeichnis

1. Lineare Gleichungssysteme

1.1. Darstellung von Linearen Gleichungssystemen

Lineare Gleichungssysteme (LGS) haben folgende Gestalt:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

Hierbei handelt es sich um m lineare Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ bezeichnet man als Inhomogenität des LGS. Man spricht deshalb von einem inhomogenen linearen Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Unbekannten.

Ist der Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ der sogenannte Nullvektor, so spricht man von einem homogenen linearen Gleichungssystem von m Gleichungen mit n Unbekannten.

1.2. Matrixschreibweise von Linearen Gleichungssystemen

Eine wesentlich einfachere und übersichtlichere Darstellungsform eines LGS ist die sogenannte Matrixschreibweise $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Wir definieren:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Hierbei ist A eine $m \times n$-Matrix, d. h.eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten, abkürzend geschrieben als A_{mn} und Koeffizientenmatrix des LGS genannt wird. Man bezeichnet m als Zeilenindex und n als Spaltenindex und diese Matrix bildet den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ in den Vektorraum $\mathbb{R}^m$ ab. Der Vektor $\vec{x}$ ist aus $\mathbb{R}^n$ und die Inhomogenität $\vec{b}$ aus $\mathbb{R}^m$. Ein solches LGS löst man, indem man es durch Äquivalenzumformungen Schritt für Schritt auf Stufenform (Dreiecksgestalt) bringt, d. h.man erzeugt unterhalb der Hauptdiagonalen der Koeffizientenmatrix lauter Nullen.

In einer abkürzenden Schreibweise, bei der die Spalten die einzelnen x_i beinhalten – ohne sie zu schreiben – sieht die Dreiecksgestalt folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{cccc|c} a^*_{11} & a^*_{12} & \cdots & a^*_{1n} & b^*_1 \\ 0 & a^*_{22} & \cdots & a^*_{2n} & b^*_2 \\ 0 & 0 & \cdots & a^*_{3n} & b^*_3 \\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots} & \cdots \end{array}$$

© Jürgen Gilg 2007

1.3. Lösbarkeit von Linearen Gleichungssystemen

Ein LGS hat entweder genau eine Lösung (eindeutig lösbar), keine Lösung (nicht lösbar) oder unendlich viele Lösungen (unendlich oft lösbar). Wir definieren den Rang $Rg\ A_{mn}$ der Matrix als die Anzahl der Zeilen oder Spalten der zugehörigen Dreiecksform, die nicht nur Nullen enthalten. Wir betrachten nun einige spezielle Fälle:

1. $n = m$

   Die Koeffizientenmatrix ist nun quadratisch und man nennt das zugehörige LGS gleichbesetzt. Man bestimmt deren Dreiecksgestalt und unterscheidet:

   (a) Es existiert keine Nullzeile auf der Koeffizientenseite
   Das LGS ist eindeutig lösbar

   (b) Das LGS besitzt $k < n$ Nullzeilen auf der Koeffizientenseite

      i. Ist auf der Inhomogenitätsseite ebenfalls eine Null, so hat das LGS unendlich viele Lösungen, die man durch $(n - k)$ Parameter darstellen kann

      ii. Ist auf der Inhomogenitätsseite keine Null, so ist das LGS unlösbar.

2. $n < m$

   Die Koeffizientenmatrix ist rechteckig und es existieren mehr Gleichungen als Unbekannte. Das zugehörige LGS nennt man überbesetzt und es reichen bereits n Gleichungen, um die Lösung zu bestimmen.

   (a) Das LGS ist in n Gleichungen eindeutig lösbar

      i. Es ist eine Probe mit den verbleibenden $(m - n)$ Gleichungen durchzuführen. Sind alle Proben lösbar, so ist das LGS eindeutig lösbar.

      ii. Es ist eine Probe mit den verbleibenden $(m - n)$ Gleichungen durchzuführen. Ist mindestens eine Probe unlösbar, so ist das LGS unlösbar.

   (b) Das LGS hat in n Gleichungen unendlich viele Lösungen

      i. Es ist eine Probe mit den verbleibenden $(m - n)$ Gleichungen durchzuführen. Sind alle Proben unendlich oft lösbar, so ist das LGS unendlich oft lösbar.

      ii. Es ist eine Probe mit den verbleibenden $(m - n)$ Gleichungen durchzuführen. Ist mindestens eine Probe unlösbar, so ist das LGS unlösbar.

   (c) Das LGS hat in n Gleichungen keine Lösung, so ist das gesamte LGS unlösbar

3. $n > m$

   Die Koeffizientenmatrix ist rechteckig und es existieren weniger Gleichungen als Unbekannte. Das zugehörige LGS nennt man unterbesetzt und man erreicht die Dreiecksgestalt gar nicht vollständig.

   (a) Das LGS ist niemals eindeutig lösbar

   (b) Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen

   (c) Das LGS ist unlösbar

Der zugehörige Fall für ein homogenes LGS ist sehr schnell überlegt. Es existiert in jedem Fall die triviale Lösung $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

2. Vektoren

Geometrisch gesprochen sind Vektoren Pfeile, die durch eine Parallelverschiebung jedem Punkt des Raumes einen Bildpunkt zuordnet. Dabei sind die jeweils von einem Punkt zu seinem Bildpunkt weisenden Pfeile parallel, gleichlang und gleichgerichtet. Jeder solcher Pfeil ist ein sogenannter Repräsentant dieser Verschiebung. Man stellt Vektoren wie folgt dar:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ \ldots,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$$

2.1. Parallelogrammregel

Die Hintereinanderausführung (Verkettung) zweier Verschiebungen $\vec{a}$, $\vec{b}$ ist wieder eine Verschiebung. Sie wird als Summe $\vec{a}+\vec{b}$ bezeichnet. Zeichnerisch gewinnt man einen Pfeil von $\vec{a}+\vec{b}$ als Diagonalpfeil des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

2.2. S-Multiplikation

Das r-fache von solchen Verschiebungen, mit $r \in \mathbb{R}$, nennt man S-Multiplikation. Sie ändert die Länge.

i) Ist $r > 0$, so sind die Richtungen der Verschiebungen $r\vec{a}$ und $\vec{a}$ gleich gerichtet.

ii) Ist $r < 0$, so sind die Richtungen der Verschiebungen $r\vec{a}$ und $\vec{a}$ entgegengesetzt gerichtet.

iii) Ist $r = 0$, so erhält man die Nullverschiebung $\vec{0}$.

2.3. Rechengesetze für Verschiebungen

Addition	$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$	Kommutativgesetz
	$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$	Assoziativgesetz
S-Multiplikation	$r\vec{a}+r\vec{b}=r(\vec{a}+\vec{b})$ mit $r\in\mathbb{R}$	Distributivgesetz I
	$r\vec{a}+s\vec{a}=(r+s)\vec{a}$ mit $r\in\mathbb{R}$	Distributivgesetz II
	$r(s\vec{a})=(rs)\vec{a}$ mit $r,\ s\in\mathbb{R}$	

2.4. Orts- und Richtungsvektoren

Man unterscheidet Orts- und Richtungsvektoren.

i) Ortsvektoren

Sie starten immer im Ursprung des Koordinatensystems und weisen mit ihrem Pfeil auf einen eindeutig definierten Punkt im Koordinatensystem.

Merke: Die Komponenten eines Ortsvektors sind gleich den Koordinaten des Punktes an seiner Spitze.

ii) Richtungsvektoren

Sie weisen nur eine Richtung an. Länge und Orientierung spielen hier keine Rolle.

Darstellung von Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

Der Einfachheit halber legen wir immer ein kartesisches Koordinatensystem zugrunde. Dieses zeichnet sich durch drei zueinander orthogonal stehenden zur Norm 1 geeichten Richtungen, den sogenannten Basiseinheitsvektoren $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ und dem Ursprung O aus.

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, O(0/0/0)$$

Für einen beliebigen Punkt A mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{a}$ gilt

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \qquad a_i, \text{ mit } i = 1, 2, 3 \text{ nennt man Komponenten des Vektors } \vec{a}$$

$$A(a_1/a_2/a_3) \qquad a_i, \text{ mit } i = 1, 2, 3 \text{ nennt man Koordinaten des Punktes } A$$

Vektoren werden komponentenweise addiert.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

und

$$r\vec{a} = r \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$

2.5. Linearkombination

Man definiert eine Linearkombination (LK) wie folgt:

$$\vec{x} = r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_n\vec{a}_n \text{ mit } r_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n$$

ist eine LK der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\ldots$, $\vec{a}_n$

Anmerkung:

- Soll ein Punkt $X_{\text{innen},P}$ innerhalb des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms liegen, so muss gelten:

  $$\vec{x}_{\text{innen},P} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \text{ und } 0 < \mu < 1$$

- Soll ein Punkt $X_{\text{innen},D}$ innerhalb des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks liegen, so muss gelten:

  $$\vec{x}_{\text{innen},D} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} \text{ mit } 0 < \lambda < 1 \text{ und } 0 < \mu < 1 \text{ und } 0 < \lambda + \mu < 1$$

2.6. Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Gegeben seien k Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_k \in \mathbb{R}^n$, jeder einzelne Vektor hat also n Komponenten.

i) Diese Vektoren heißen linear unabhängig (l. u.), wenn die Vektorgleichung

$$r_1\vec{a}_1 + r_2\vec{a}_2 + \ldots + r_k\vec{a}_k = \vec{0} \text{ mit } r_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, \ldots, k$$

nur trivial lösbar ist, d. h. $r_1 = r_2 = \ldots = r_k = 0$.

Diese Gleichung liefert ein homogenes LGS von n Gleichungen mit k Unbekannten.

ii) Andernfalls, also wenn mindestens ein r_i, mit $i = 1, 2, \ldots, k$ ungleich null ist, sind sie linear abhängig (l. a.).

Geometrische Interpretation der linearen Abhängigkeit dreier Vektoren im $\mathbb{R}^3$

- Wenn 3 Vektoren in einer Ebene liegen, dann sind sie l. a.und man nennt sie komplanar.
- Wenn 3 Vektoren durch S-Multiplikation ineinander übergehen, also Vielfache voneinander sind, dann sind sie l. a.und man nennt sie kollinear.

3. Einige Definitionen

3.1. Abstand zweier Punkte

Gegeben sind die beiden Punkte $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$. Ihr Abstand ergibt sich durch

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$$

3.2. Mittelpunkt zweier Punkte

Gegeben sind die beiden Punkte $A(a_1/a_2/a_3)$ und $B(b_1/b_2/b_3)$. Ihr Mittelpunkt ergibt sich durch

$$M_{\overline{AB}}(\frac{a_1 + b_1}{2}/\frac{a_2 + b_2}{2}/\frac{a_3 + b_3}{2})$$

3.3. Spiegelpunkt eines Punktes

Gegeben ist ein Punkt A und ein Spiegelzentrum Z mit den zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{z}$. Der Spiegelpunkt A^* des Punktes A bezüglich des Spiegelzentrums Z mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{a}^*$ ergibt sich zu

$$\vec{a}^* = 2 \cdot \vec{z} - \vec{a}$$

3.4. Länge bzw. Betrag eines Vektors

Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$. Sein Betrag ergibt sich durch

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

3.5. Normierter Vektor

Gegeben ist der Vektor $\vec{a}$. Sein zugehöriger normierter Vektor $\vec{a}_0$, also ein Vektor derselben Richtung mit der Länge 1, ergibt sich zu

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

3.6. Skalarprodukt zweier Vektoren in kartesischen Koordinaten

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ihr Skalarprodukt wird definiert durch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \text{ oder } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi \text{ mit } 0° \leq \varphi \leq 180° \text{ und } \varphi\angle\vec{a}, \vec{b}$$

Hier einige Rechenregeln für das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$$
$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$$
$$(r\vec{a}) \cdot \vec{b} = r(\vec{a} \cdot \vec{b}) \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

3.7. Kreuzprodukt zweier Vektoren in kartesischen Koordinaten

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ihr Kreuzprodukt wird definiert durch

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Vektor der sowohl auf $\vec{a}$ als auch auf $\vec{b}$ senkrecht steht.
Der Betrag des Kreuzprodukts $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ mit $0° \leq \varphi \leq 180°$ und $\varphi\angle\vec{a}, \vec{b}$ ist gleich der Maßzahl des Flächeninhalts des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

Hier einige Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \text{ und } \vec{b} \text{ sind linear abhängig}$$
$$\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$$
$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$$
$$\vec{a} \times (r\vec{b}) = r(\vec{a} \times \vec{b}) \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

3.8. Winkel zwischen zwei Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Ihr Winkel wird definiert durch

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4. Geraden

Geht man von einem Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{p}$ um das t-fache des Richtungsvektors $\vec{u}$ weiter, so erreicht man einen Punkt X mit dem Ortsvektor $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$, mit $t \in \mathbb{R}$. Die Punkte, die man für verschiedene Werte von t erhält, liegen auf einer Geraden g durch P in Richtung $\vec{u}$.

Die Vektorgleichung $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$, mit $t \in \mathbb{R}$ nennt man Parameterdarstellung von der Geraden g. Dabei ist $\vec{p}$ der Aufpunkt (Stützvektor) und $\vec{u}$ der Richtungsvektor von g. Die Variable t heißt Parameter.

Die folgenden zwei Möglichkeiten kann man als Punkt-Steigungs-Form (PSF) bzw. Zwei-Punkte-Form (ZPF) einer Geraden deuten.

- Gegeben sind ein Punkt P mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{p}$ und ein Richtungsvektor $\vec{u}$. Die Gleichung der zugehörigen Geraden lautet dann

  $$g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

- Gegeben sind zwei verschiedene Punkte P und Q mit den zugehörigen Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$. Die Gleichung der zugehörigen Geraden lautet dann

  $$g: \vec{x} = \vec{p} + t(\vec{q} - \vec{p}) \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

4.1. Lage zweier Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}$, mit $t \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}$, mit $s \in \mathbb{R}$.

Zwei Geraden g und h im $\mathbb{R}^3$ sind entweder echt parallel, identisch, windschief oder sie schneiden sich in genau einem Punkt.

- Im Falle von echt parallel oder identisch, sind die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Geraden g und h linear abhängig.

  Setzt man die beiden Geraden gleich und das entstehende LGS hat

  i) keine Lösung, so sind die Geraden g und h echt parallel.

  ii) unendlich viele Lösungen, so sind die Geraden g und h identisch.

- Im Falle von windschief oder Schnitt, sind die beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ der Geraden g und h linear unabhängig.

  Setzt man die beiden Geraden gleich und das entstehende LGS hat

  i) keine Lösung, so sind die Geraden g und h windschief.

  ii) genau eine Lösung, so schneiden sich die Geraden g und h in genau einem Punkt.

Voraussetzungen für einige Formeln

Für die nachstehenden Formeln, sind die Geraden g und h sowie der Punkt R gegeben.

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u}, \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$
$$h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{v}, \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$
$$R(r_1/r_2/r_3) \notin g \text{ und } \notin h \text{ mit dem zugehörigen Ortsvektor } \vec{r}$$

4.2. Abstand Punkt - Gerade

Den Abstand von R zu g berechnet man wie folgt

$$d_{R,\,g} = \frac{|\vec{u} \times (\vec{r} - \vec{p})|}{|\vec{u}|}$$

4.3. Abstand zweier windschiefer Geraden

Den Abstand der beiden windschiefen Geraden g und h berechnet man wie folgt

$$d_{g,\,h} = \frac{|(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot (\vec{q} - \vec{p})|}{|\vec{u} \times \vec{v}|}$$

4.4. Winkel zwischen zwei Geraden

Den Winkel zwischen zwei Geraden g und h berechnet man wie folgt

$$\cos\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

5. Ebenen

P sei ein Punkt mit dem Ortsvektor $\vec{p}$, ferner seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Richtungsvektoren. Die Menge aller Punkte X mit dem Ortsvektor $\vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s\vec{v}$ mit $t,\, s \in \mathbb{R}$ beschreiben eine Ebene E durch den Punkt P. Die Variablen t und s, die unabhängig voneinander die Menge der reellen Zahlen durchlaufen, heißen Parameter der Ebenengleichung.

Die Vektorgleichung $E:\ \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s\vec{v}$ mit $t,\, s \in \mathbb{R}$ heißt Parameterdarstellung der Ebene E. Den Ortsvektor $\vec{p}$ nennt man hier den Aufpunkt (Stützvektor), die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Spannvektoren von E.

- Gegeben sind ein Punkt P mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{p}$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Die Gleichung der zugehörigen Ebene lautet

  $$E:\ \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s\vec{v} \text{ mit } t,\, s \in \mathbb{R}$$

- Gegeben sind ein Punkt $P \notin g$ mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{p}$ und eine Gerade

  $$g:\ \vec{x} = \vec{q} + t\vec{u} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

  Die Gleichung der zugehörigen Ebene lautet

  $$E:\ \vec{x} = \vec{p} + t\vec{u} + s(\vec{q} - \vec{p}) \text{ mit } t,\, s \in \mathbb{R}$$

- Gegeben sind drei verschiedene Punkte P, Q und R mit den zugehörigen Ortsvektoren $\vec{p}$, $\vec{q}$ und $\vec{r}$, die nicht auf einer Geraden liegen. Die Gleichung der zugehörigen Ebene lautet

  $$E:\ \vec{x} = \vec{p} + t(\vec{r} - \vec{p}) + s(\vec{q} - \vec{p}) \text{ mit } t,\, s \in \mathbb{R}$$

Es existieren äquivalente andere Darstellungsmöglichkeiten von Ebenen im Raum.

5.1. Normalenform einer Ebene

P ist ein Punkt der Ebene mit Ortsvektor $\vec{p}$, $\vec{n}$ ist Normalenvektor von E. Solch ein Normalenvektor ist ebenfalls ein Richtungsvektor. Einen möglichen Normalenvektor bekommt man durch $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Spannvektoren der Ebene E sind. So erhält man die Normalenform einer Ebene wie folgt

$$E: \ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

5.2. Zugehörige Hesse-Normalform einer Ebene

P ist ein Punkt der Ebene mit Ortsvektor $\vec{p}$, $\vec{n}$ ist Normalenvektor von E. Solch ein Normalenvektor ist ebenfalls ein Richtungsvektor. Einen möglichen Normalenvektor bekommt man durch $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$, wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei linear unabhängige Spannvektoren der Ebene E sind. Den normierten Normalenvektor bezeichnen wir mit $\vec{n}_0$. So erhält man die Hesse-Normalform einer Ebene wie folgt

$$\text{HNF}\, E: \ (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$$

5.3. Koordinatendarstellung einer Ebene

Durch Ausmultiplizieren der Normalform erhält man die Koordinatendarstellung einer Ebene, die wie folgt lautet

$$E: \ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0, \ \text{mit } \vec{n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ ist ein Normalenvektor der Ebene } E$$

Man erhält die sogenannten Spurpunkte, also die Schnittpunkte der Ebene E mit den Koordinatenachsen (x_1-Achse: $\vec{x} = t\vec{e}_1$, x_2-Achse: $\vec{x} = t\vec{e}_2$ und x_3-Achse: $\vec{x} = t\vec{e}_3$, jeweils mit $t \in \mathbb{R}$) wie folgt

$$S_{x_1}(-\frac{D}{A}/0/0), \ S_{x_2}(0/-\frac{D}{B}/0), \ S_{x_3}(0/0/-\frac{D}{C})$$

Die zugehörigen Spurgeraden sind die Geraden durch jeweils zwei verschiedene Spurpunkte.

Skizzieren einer Ebene mit Hilfe der Spurpunkte

Ist $A = 0$, so ist die Ebene parallel zur x_1-Achse, es gibt keinen Spurpunkt S_{x_1}.

Ist $B = 0$, so ist die Ebene parallel zur x_2-Achse, es gibt keinen Spurpunkt S_{x_2}.

Ist $C = 0$, so ist die Ebene parallel zur x_3-Achse, es gibt keinen Spurpunkt S_{x_3}.

Ist $D = 0$, so geht die Ebene durch den Ursprung $O(0/0/0)$.

5.4. Zugehörige Hesse-Normalform einer Ebene

Durch Ausmultiplizieren der Hesse-Normalform erhält man die Koordinatendarstellung in Hesse-Normalform einer Ebene, die wie folgt lautet

$$\text{HNF}\, E: \ \frac{Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0, \ \text{mit } \vec{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \text{ ist ein normierter Norm}$$

5.5. Lage zweier Ebenen

Gegeben sind die beiden Ebenen $E_1 : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_1$ und $E_2 : Fx_1 + Gx_2 + Hx_3 + I = 0$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2$.

Zwei Ebenen E_1 und E_2 im $\mathbb{R}^3$ sind entweder echt parallel, identisch oder sie schneiden sich in einer Geraden.

- Im Falle von echt parallel oder identisch sind die Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ der beiden Ebenen linear abhängig. Setzt man die beiden Ebenen gleich und das entstehende LGS hat

  i) keine Lösung, so sind die Ebenen echt parallel.

  ii) zweifach unendlich viele Lösungen, so sind die Ebenen identisch.

- Sie schneiden sich in einer Schnittgeraden g, wenn die beiden Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ linear unabhängig sind. Das zugehörige LGS hat einfach unendlich viele Lösungen.

Voraussetzungen für einige Formeln

Für die nachstehenden Formeln, ist die Ebene E sowie der Punkt R gegeben.

$E_1 : Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + D = 0$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_1$
$E_2 : Fx_1 + Gx_2 + Hx_3 + I = 0$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}_2$
$R(r_1/r_2/r_3)$ mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{r}$

5.6. Abstand Punkt - Ebene

Den Abstand von R zu E_1 berechnet man wie folgt

$$d_{R,\,E_1} = \left| \frac{Ar_1 + Br_2 + Cr_3 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right|$$

5.7. Winkel zwischen zwei Ebenen

Den Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 berechnet man wie folgt

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

5.8. Winkelhalbierende Ebenen

Zwei Ebenen $E_1 : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 = 0$ und $E_2 : (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{m}_0 = 0$ in Hesse-Normalform, die sich in einer Geraden g schneiden, deren Normalenvektoren $\vec{n}_0$ und $\vec{m}_0$ also l. u. sind, besitzen zwei zueinander orthogonale winkelhalbierende Ebenen W_1 und W_2. Diese berechnen sich wie folgt

$$W_1 : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 + (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{m}_0 = 0$$
$$W_2 : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0 - (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{m}_0 = 0$$

5.9. Lage von einer Geraden zu einer Ebene

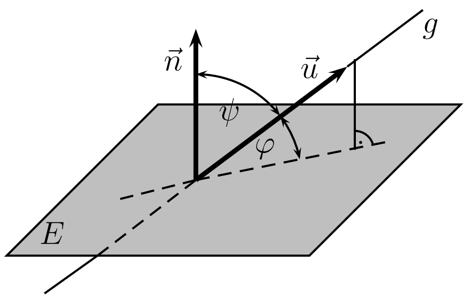
Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$. Setzt man die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, so erhält man eine lineare Gleichung in t. Hat diese

- eine eindeutige Lösung, so schneiden sie sich in genau einem Punkt.
- unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade g in der Ebene E.
- keine Lösung, so ist die Gerade g parallel zur Ebene E.

5.10. Winkel zwischen Gerade und Ebene

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ mit dem Normalenvektor $\vec{n}$. Der Winkel zwischen g und E berechnet sich zu

$$\sin\varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$



6. Lotfußpunkte

Lotfußpunkte sind Punkte, die man erhält, wenn man zu einem gegebenen Punkt das Lot fällt und dieses mit einer gegebenen Geraden bzw. Ebene schneidet.

6.1. Lotfußpunkt eines Punktes bezüglich einer Geraden

Gegeben sei die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und ein Punkt $P \notin g$ mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{p}$. Den Lotfußpunkt F des Punktes P bezüglich der Geraden g erhält man, indem man eine Hilfsebene E senkrecht zu g durch P erstellt. Diese lautet in Normalenform

$$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{u} = 0$$

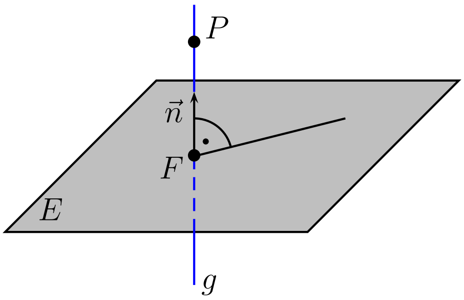
Schneidet man diese Hilfsebene E mit der Geraden g indem man die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzt, so erhält man den gesuchten Lotfußpunkt F.

6.2. Lotfußpunkt eines Punktes bezüglich einer Ebene

Gegeben sei die Ebene $E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ und ein Punkt $P \notin E$ mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{p}$. Den Lotfußpunkt F des Punktes P bezüglich der Ebene E erhält man, indem man eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch P erstellt. Diese lautet

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{n} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Schneidet man diese Ebene E mit der Hilfsgeraden g indem man die Geradengleichung in die Ebenengleichung einsetzt, so erhält man den gesuchten Lotfußpunkt F.



6.3. Lotfußpunkte zweier windschiefer Geraden

Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{x}_g = \vec{p} + t\vec{u}$, mit $t \in \mathbb{R}$ und $h: \vec{x}_h = \vec{q} + s\vec{v}$, mit $s \in \mathbb{R}$. Man bildet den Differenzvektor

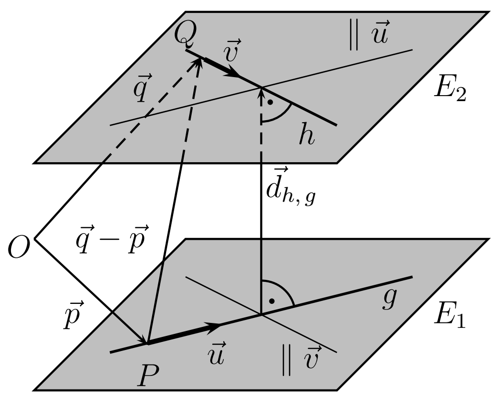
$$\vec{d}_{h,\,g} = \vec{x}_g - \vec{x}_h = (\vec{p} - \vec{q}) + t\vec{u} - s\vec{v} \text{ mit } t,\, s \in \mathbb{R}$$

Dieser Differenzvektor $\vec{d}_{h,\,g}$ startet bei einem beliebigen Punkt H der Geraden h und endet bei einem beliebigen Punkt G der Geraden g. Steht dieser Differenzvektor $\vec{d}_{h,\,g}$ sowohl senkrecht auf g als auch senkrecht auf h, so werden die Anfangs- und Endpunkte H und G zu den Lotfußpunkten F_h und F_g.

Wir fordern also

Orthogonalität zu g	Orthogonalität zu h
$\vec{d}_{h,\,g} \cdot \vec{u} = 0$	$\vec{d}_{h,\,g} \cdot \vec{v} = 0$

Diese beiden Bedingungen ausmultipliziert liefert ein LGS von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten $t,\, s \in \mathbb{R}$. Man bestimmt nun diese Unbekannten und setzt diese jeweils ind die zugehörigen Geradengleichungen ein und erhält somit die gesuchten Lotfußpunkte F_g und F_h.



7. Kugeln

Eine Kugel im Raum mit dem Mittelpunkt $M(m_1/m_2/m_3)$, dem zu ihm gehörigen Ortsvektor $\vec{m}$ und dem Radius r, hat mehrere Darstellungsmöglichkeiten

i) Vektordarstellung 1

$$K:\ (\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2$$

ii) Vektordarstellung 2

$$K:\ \vec{x}^2 - 2\vec{m}\vec{x} + \vec{m}^2 = r^2$$

iii) Koordinatendarstellung

$$K:\ (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2$$

7.1. Tangentialebene

Die Gleichung der Tangentialebene in einem Punkt B mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{b}$ auf der Kugel K lautet

$$E_T:\ (\vec{x}-\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{m}) = 0 \text{ oder } E_T:\ (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{b}-\vec{m}) = r^2$$

7.2. Polarebene

Legt man von einem festen Punkt P mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{p}$ außerhalb einer Kugel K den Tangentialkegel, so bildet dieser mit der Kugel einen Schnittkreis. Dieser Kreis liegt in der sogenannten Polarebene. Diese ändert sich je nach Lage des Punktes P. Liegt P auf K, so wird die Polarebene zur Tangentialebene.

$$E_P:\ (\vec{x}-\vec{m})\cdot(\vec{p}-\vec{m}) = r^2$$

7.3. Lage von einer Geraden zu einer Kugel

Setzt man die Geradengleichung $g:\ \vec{x} = \vec{a} + t\vec{u}$ mit $t \in \mathbb{R}$ in die Koordinatenform der Kugelgleichung $K:\ (x_1-m_1)^2 + (x_2-m_2)^2 + (x_3-m_3)^2 = r^2$ ein, so erhält man eine quadratische Gleichung in t.

- Hat diese zwei Lösungen, so gibt es zwei Durchstoßpunkte und die Gerade nennt man *Sekante*.
- Hat sie eine Lösung, so erhält man einen Berührpunkt und die Gerade nennt man *Tangente*.
- Hat sie keine Lösung, so heißt sie *Passante*.

7.4. Lage von einer Ebene zu einer Kugel

Bestimmt man den Abstand $d_{M,E}$ des Mittelpunktes $M(m_1/m_2/m_3)$ mit dem zugehörigen Ortsvektor $\vec{m}$ einer Kugel $K:\ (\vec{x}-\vec{m})^2 = r^2$ mit der Ebene $E:\ (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$, so liegt die gegebene Ebene E

i) außerhalb der Kugel K, wenn gilt

$$d_{M,E} > r$$

ii) sie wird zur Tangentialebene, wenn gilt

$$d_{M,E} = r$$

iii) sie schneidet die Kugel K in einem Schnittkreis k mit dem Schnittkreismittelpunkt M^* und dem Schnittkreisradius r^*, wenn gilt

$$\overline{MM^*} = d_{M,E} < r$$

Zur Berechnung des Schnittkreismittelpunktes M^* besorgt man sich die Hilfsgerade $g:\ \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und schneidet diese mit der Ebene E. Der Schnittkreisradius r^* ergibt sich dann mit dem Satz von Pythagoras zu

$$r^* = \sqrt{r^2 - \overline{MM^*}^2}$$

7.5. Lage zweier Kugeln

Zwei Kugeln K_1 und K_2 im Raum mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 und den Radien r_1 und r_2 können wie folgt zueinander liegen

i) Die Kugeln liegen auseinander

$$d_{\overline{M_1M_2}} > r_1 + r_2$$

ii) Die Kugeln berühren sich in genau einem Punkt

$$d_{\overline{M_1M_2}} = r_1 + r_2$$

iii) Die Kugeln schneiden sich in einem Schnittkreis

$$|r_1 - r_2| < d_{\overline{M_1M_2}} < r_1 + r_2$$

iv) Die Kugeln liegen ineinander

$$d_{\overline{M_1M_2}} < |r_1 - r_2|$$

Berechnen des Falls iii):
Man gibt die beiden Kugeln in der Vektordarstellung 2 an und subtrahiert sie voneinander. $K_1 - K_2$

Die Differenz liefert die Ebene E, in der sich der Schnittkreis befindet. Danach verfährt man weiter wie bei der Lage der Ebene E zu einer der beiden Kugeln.

$$K_1:\ \vec{x}^2 - 2\vec{m}_1\vec{x} + \vec{m}_1^2 = r_1^2$$
$$K_2:\ \vec{x}^2 - 2\vec{m}_2\vec{x} + \vec{m}_2^2 = r_2^2$$
$$E:\ 2(\vec{m}_2 - \vec{m}_1)\vec{x} = r_1^2 - r_2^2 + \vec{m}_1^2 - \vec{m}_2^2$$