Lösungsstrategien zur Analytischen Geometrie

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

Februar 2004

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

Inhaltsverzeichnis

1 Linearkombinationen

Aufgabe

Stelle den Vektor $\vec{d} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der drei gegebenen Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ dar.

Strategie

Der Ansatz $\vec{d} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$ liefert ein LGS von 3 Gleichungen mit den drei Unbekannten x_1, x_2, x_3.

Diese sind zu bestimmen.

2 Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

Aufgabe

(a) 2 Vektoren im Raum

Sind die zwei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig?

(b) 3 Vektoren im Raum

Sind die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig?

(c) Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig. Zeige, daß die drei Vektoren
$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}, \quad \vec{y} = 2\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{z} = -3\vec{b} + 2\vec{c}$
ebenfalls linear unabhängig sind.

Strategie

(a) Der Ansatz $\vec{0} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b}$ liefert ein homogenes LGS von 3 Gleichungen mit den zwei Unbekannten x_1, x_2. Gilt $x_1 = x_2 = 0$, dann sind sie linear abhängig, ansonsten linear unabhängig.

Hinweis
Kürzer: Sind die beiden Vektoren Vielfache voneinander (kollinear), so sind sie linear abhängig.

(b) Der Ansatz $\vec{0} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c}$ liefert ein homogenes LGS von 3 Gleichungen mit den drei Unbekannten x_1, x_2, x_3. Gilt $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, dann sind sie linear abhängig, ansonsten linear unabhängig.

(c) Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig, d.h. es gilt:
$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c} = \vec{0}$ ist nur lösbar für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.
Zu zeigen ist, daß daraus folgt:
$\lambda_1\vec{x} + \lambda_2\vec{y} + \lambda_3\vec{z} = \vec{0}$ nur für $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
Die neuen Vektoren über die gegebenen Vektoren ausgedrückt führt zu
$\lambda_1(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) + \lambda_2(2\vec{a} + \vec{c}) + \lambda_3(-3\vec{b} + 2\vec{c}) = \vec{0}$
Diese Gleichung nach den gegebenen Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sortieren
$(\underbrace{\lambda_1 + 2\lambda_2}_{=x_1=0})\vec{a} + (\underbrace{\lambda_1 - 3\lambda_3}_{=x_2=0})\vec{b} + (\underbrace{-\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3}_{=x_3=0})c = \vec{0}$
Dies liefert ein homogenes LGS in den drei Unbekannten λ_1, λ_2 und λ_3. Die Lösung des LGS liefert dann $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, was zu beweisen war.

Hinweis
Ist einer der gegebenen Vektoren der Nullvektor $\vec{0}$ oder untersuchen wir die lineare Abhängigkeit von mehr als drei Vektoren im Raum, so sind diese immer linear abhängig.

3 Mittelpunkt, Spiegelpunkt, Schwerpunkt eines Dreiecks

Aufgabe

Die drei Punkte $A(0/1/3)$, $B(2/2/1)$, $C(1/3/-1)$ legen ein Dreieck im Raum fest. Berechne den Mittelpunkt M der Strecke AB und den Schwerpunkt S des Dreiecks ABC. Berechne den Spiegelpunkt B^* von B bezüglich des Schwerpunkts S.

Strategie

- Der Ansatz $\vec{m} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ liefert die Koordinaten des Mittelpunkts M der Strecke AB.
- Der Ansatz $\vec{s} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ liefert die Koordinaten des Schwerpunkts S des Dreiecks ABC.
- Der Ansatz $\vec{b}^* = 2\vec{s} - \vec{b}$ liefert die Koordinaten des Spiegelpunkts B^* bezüglich S.

4 Geradengleichungen

Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $A(2/-1/3)$, $B(0/1/2)$, $C(2/1/1)$ und

die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ mit $t \in R$.

(a) Gib eine Gleichung der Geraden g an, die durch die Punkte A und B geht.

(b) Gib eine Gleichung der Geraden k an, die durch den Punkt C geht und parallel zur Geraden h ist.

(c) Prüfe, ob der Punkt C auf der Geraden h liegt.

(d) Liegen die drei Punkte A, B, C auf einer Geraden?

Strategie

(a) Der Ansatz $g: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a})$ mit $t \in R$ liefert die gesuchte Geradengleichung.

(b) Der Ansatz $k: \vec{x} = \vec{c} + t\vec{v}$ mit $t \in R$ liefert die gesuchte Geradengleichung.

(c) Ersetze in der Geradengleichung h den Vektor $\vec{x}$ durch den Ortsvektor $\vec{c}$ und löse das entstehende LGS von 3 Gleichungen mit einer Unbekannten t. Ist dieses eindeutig lösbar, so ist $C \in h$. Ist das LGS unlösbar, so ist $C \notin h$. Diesen Vorgang nennt man auch Punktprobe.

(d) Erstelle eine Geradengleichung durch zwei Punkte und prüfe, ob der dritte Punkt auf dieser Geraden liegt.

Hinweis

Eine Gerade im Raum ist am einfachsten durch eine Parametergleichung darzustellen. Der Aufpunkt (Stützvektor) ist in dieser Gleichung ein beliebiger Punkt der Geraden und der Richtungsvektor kann durch seine Vielfache ersetzt werden. Somit hat ein und dieselbe Gerade unendlich viele Parameterdarstellungen.

5 Ebenengleichungen

Aufgabe

Gegeben sind die Punkte $A(2/-1/3)$, $B(0/1/2)$, $C(2/1/1)$, $D(5/3/1)$ und die Gerade $h: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$ mit $t \in R$.

(a) Gib eine Gleichung der Ebene E an, die durch die Punkte A, B und C geht.

(b) Gib eine Gleichung der Ebene F an, die durch den Punkt C geht und senkrecht zur Geraden h ist.

(c) Prüfe, ob der Punkt D in der Ebene F liegt.

(d) Liegen die vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene?

(e) Gib eine Gleichung der Ebene H an, die die Gerade h enthält und durch den Punkt D geht.

(f) Berechne die Spurpunkte der Ebene $I: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.

Strategie

(a) Der Ansatz $E: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) + s(\vec{c} - \vec{a})$ mit t, $s \in R$ liefert die gesuchte Ebenengleichung.

(b) Der Ansatz $F: (\vec{x} - \vec{c}) \cdot \vec{v} = 0$ liefert die gesuchte Ebenengleichung.

(c) Setze den Punkt D in die Koordinatengleichung der Ebene F ein. Ist diese erfüllt, so ist $D \in F$. Kommt es zu einem Widerspruch, so ist $D \notin F$.

(d) Erstelle eine Ebenengleichung durch drei Punkte und prüfe, ob der vierte Punkt in dieser Ebene liegt.

(e) Der Ansatz $H: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} + s(\vec{p} - \vec{d})$ mit t, $s \in R$ liefert die gesuchte Ebenengleichung.

(f) $S_1(\frac{d}{a}/0/0)$, $S_2(0/\frac{d}{b}/0)$, $S_3(0/0/\frac{d}{c})$

Hinweis

Eine Ebene im Raum ist am einfachsten durch eine Koordinatenform darzustellen. Ist die Ebene in Parameterform gegeben, so wandelt man sie in die Koordinatenform um, da mit dieser am einfachsten zu rechnen ist.
$E: \vec{x} = \vec{q} + t\vec{u} + s\vec{w}$ mit t, $s \in R$
Mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{w} \Rightarrow E: (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n} = 0$
Parallele Ebenen haben linear abhängige Normalenvektoren.

6 Lage zweier Geraden

Aufgabe

Gegeben sind die beiden Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ mit $t \in R$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$ mit $s \in R$.

(a) Zeige, daß die Geraden g und h windschief sind und berechne ihre Lotfußpunkte G und H und deren Abstand.

(b) Zeige, daß sich die Geraden g und h in einem Punkt S schneiden.

(c) Zeige, daß die Geraden g und h echt parallel sind und berechne ihren Abstand.

(d) Zeige, daß die Geraden g und h identisch sind.

Strategie

(a) Die Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig, also keine Vielfache voneinander.
Gleichsetzen der Geradengleichungen liefert ein LGS von 3 Gleichungen mit zwei Unbekannten s, t, das unlösbar ist.
Bestimmung der Lotfußpunkte G und H:
Bilde die Differenz der beiden Geradengleichungen: $\vec{d}_{g,h} = \vec{q} - \vec{p} + s\vec{w} - t\vec{v}$ mit $s, t \in R$
Es muß gelten: $\vec{d}_{g,h} \cdot \vec{v} = 0 \wedge \vec{d}_{g,h} \cdot \vec{w} = 0$
Dies liefert ein LGS von 2 Gleichungen mit zwei Unbekannten s, t. Diese Werte in die zugehörigen Geradengleichungen eingesetzt, liefern die zugehörigen Lotfußpunkte G und H.
Der Abstand beträgt $d_{g,h} = |\vec{h} - \vec{g}|$

(b) Die Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear unabhängig, also keine Vielfache voneinander.
Gleichsetzen der Geradengleichungen liefert ein LGS von 3 Gleichungen mit zwei Unbekannten s, t, das eindeutig lösbar ist.
Einsetzen des einfacheren Wertes in die zugehörige Geradengleichung liefert den Schnittpunkt S.

(c) Die Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig, also Vielfache voneinander.
Punktprobe vom Aufpunkt P der Geraden g mit der Geraden h liefert $P \notin h$.
Bestimmung des Abstandes:
Konstruiere eine Hilfsebene E senkrecht zu g durch P:
$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{v} = 0$.
Schneide diese Ebene mit der Geraden h: Dies liefert 1 Gleichung mit einer Unbekannten s.
Einsetzen des Wertes in h liefert den Punkt F.
Der Abstand beträgt $d_{g,h} = |\vec{f} - \vec{p}|$

(d) Die Richtungsvektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind linear abhängig, also Vielfache voneinander.
Punktprobe vom Aufpunkt P der Geraden g mit der Geraden h liefert $P \in h$.

Hinweis

Wenn man mehrere Geraden miteinander vergleicht, so ist es ratsam verschiedene Parameter für die verschiedenen Geraden zu benutzen, damit sie unterscheidbar sind.

Aufgabe
Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ mit $t \in R$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$ mit $s \in R$ und ein Punkt A, der weder auf g noch auf h liegt. Bestimme diejenige Gerade k durch A, die die beiden windschiefen Geraden g und h jeweils in genau einem Punkt schneidet.

Strategie
Erstelle eine Hilfsebene E, die g enthält und durch A geht:
$E: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} + r(\vec{p} - \vec{a})$ mit t, $r \in R$. Wandle diese in Koordinatenform um und schneide sie mit h. Dies liefert 1 Gleichung mit einer Unbekannten s, die eindeutig lösbar ist. Setze den Wert s in die Gerade h ein, das liefert den Schnittpunkt S.
Die gesuchte Gerade lautet:
$k: \vec{x} = \vec{a} + t(\vec{s} - \vec{a})$ mit $t \in R$

Aufgabe
Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ mit $t \in R$ und ein Punkt A, der nicht auf g liegt. Bestimme diejenige Gerade h durch A, die senkrecht zur Geraden g ist.

Strategie
Man bestimmt den Lotfußpunkt F des Punktes A bezüglich der Geraden g. Hierzu erstellt man sich eine Hilfsebene E senkrecht zu g durch A:
$E: (\vec{x} - \vec{a}) \cdot \vec{v} = 0$
Diese Ebene E schneidet man mit der Geraden g, dies ergibt 1 lineare Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Man setzt den Wert t in g ein und erhält F.
Die gesuchte Gerade lautet:
$h: \vec{x} = \vec{a} + s(\vec{f} - \vec{a})$ mit $s \in R$

7 Lage zweier Ebenen

Aufgabe

Gegeben sind die beiden Ebenen $E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}_E = 0$ und $F: (\vec{x}-\vec{q})\cdot\vec{n}_F = 0$.

(a) Zeige, daß die Ebenen sich schneiden und berechne ihre Schnittgerade.

(b) Zeige, daß die Ebenen identisch sind.

(c) Zeige, daß die Ebenen echt parallel sind und berechne ihren Abstand.

Strategie

(a) Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear unabhängig, also keine Vielfache voneinander. Die Ebenengleichungen untereinandergeschrieben liefern ein LGS von 2 Gleichungen mit drei Unbekannten x_1, x_2, x_3, das unendlich viele Lösungen besitzt. Der Lösungsvektor $\vec{x}$ ist die gesuchte Schnittgerade.

(b) Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig, also Vielfache voneinander. Die Ebenengleichungen sind identisch (leicht zu sehen).

(c) Die Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig, also Vielfache voneinander. Die linke Seite der Ebenengleichungen ist identisch, die rechte liefert einen Widerspruch. Man nehme einen einfachen Spurpunkt z. B. S_1 von E und setzt diesen in die Hesse-Normalform von F. Dies liefert den Abstand.

Hinweis

Wenn man mehrere Ebenen miteinander vergleicht, ist es ratsam sie in Koordinatenform darzustellen. Sind Ebenen in Parameterform gegeben, so wandelt man diese in Koordinatenform um.

Aufgabe

Gegeben sind die beiden sich schneidenden Ebenen $E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$ und $F: (\vec{x}-\vec{q})\cdot\vec{m} = 0$. Gesucht sind diejenigen Punkte des Raums, die von E und F den gleichen Abstand haben.

Strategie

Alle Punkte, die von zwei sich schneidenden Ebenen den gleichen Abstand haben, liegen auf den sogenannten Winkelhalbierenden Ebenen W_1 und W_2.
Die beiden Normalenvektoren $\vec{n}$ und $\vec{m}$ der Ebenen E und F sind linear unabhängig, deshalb schneiden sie sich.
Man bildet von beiden Ebenen die Hesse-Naormalform:
$E: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0 = 0$ und $F: (\vec{x}-\vec{q})\cdot\vec{m}_0 = 0$
Die erste Winkelhalbierende Ebene W_1 ist die Summe der Hesse-Normalformen:
$W_1: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0 + (\vec{x}-\vec{q})\cdot\vec{m}_0 = 0$
Die zweite Winkelhalbierende Ebene W_2 ist die Differenz der Hesse-Normalformen:
$W_2: (\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n}_0 - (\vec{x}-\vec{q})\cdot\vec{m}_0 = 0$

8 Lage zwischen Geraden und Ebenen

Aufgabe
Gegeben sind die Ebene $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ und die Gerade $g : \vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$ mit $t \in R$.

(a) Zeige, daß die Ebene und die Gerade sich schneiden und berechne ihren Schnittpunkt S.

(b) Zeige, daß die Gerade in der Ebene liegt.

(c) Zeige, daß die Ebene und die Gerade echt parallel sind und berechne ihren Abstand.

Strategie

(a) Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden und Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene sind nicht orthogonal. Setze die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, dies ergibt 1 Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Setze den Wert t in die Gerade ein, das liefert den gesuchten Schnittpunkt S.

(b) Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden und Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene sind orthogonal: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ Setze die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, dies ergibt 1 Gleichung mit einer Unbekannten t, die unendlich viele Lösungen besitzt.

(c) Richtungsvektor $\vec{v}$ der Geraden und Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene sind orthogonal: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ Setze die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein, dies ergibt 1 Gleichung mit einer Unbekannten t, die keine Lösung besitzt.
Der Abstand berechnet sich wie folgt:
Bilde die Hesse-Normalform der Ebene E und setze den Aufpunkt A der Geraden ein.

Aufgabe
Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ mit $t \in R$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$ mit $s \in R$. Bestimme diejenige Ebene E, die g enthält und parallel zu h ist.

Strategie
Die gesuchte Ebene lautet:
$E : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v} + s\vec{w}$ mit $t, s \in R$.

Aufgabe
Gegeben sind die beiden Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ mit $t \in R$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + s\vec{w}$ mit $s \in R$. Bestimme diejenige Ebene E, die g und h enthält.

Strategie
Berechne den Schnittpunkt S der beiden Geraden durch Gleichsetzen. (Wenn sie sich nicht schneiden geht das nicht!) Die gesuchte Ebene lautet:
$E : \vec{x} = \vec{s} + t\vec{v} + s\vec{w}$ mit $t, s \in R$.

9 Kugelgleichungen

Aufgabe

Gegeben sind folgende Kugelgleichungen. Bringe diese in Koordinatenform.

(a) $K_1 : \vec{x}^2 + \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{x} = 16$

(b) $K_2 : \vec{x}^2 - 36 = 0$

Strategie

(a) 1. Schritt: Expilzites Ausführen des Skalarproduktes
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 16$
2. Schritt: Quadratisches Ergänzen
$(x_1 - 2)^2 - 4 + (x_2 + 2)^2 - 4 + (x_3 + 1)^2 - 1 = 16$
$(x_1 - 2)^2 + (x_2 + 2)^2 + (x_3 + 1)^2 = 25$ Man liest ab: $M(2/-2/-1)$, $r = 5$

(b) Man sieht leicht: Ursprungskugel mit dem Radius $r = 6$

10 Kugeln und Geraden

Aufgabe

Gegeben sind die Kugel $K: (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ und die Gerade $g: \vec{x} = \vec{p} + t\vec{v}$ mit $t \in R$.

(a) Zeige, daß die Gerade g eine Passante ist. Berechne denjenigen Punkt C der Geraden g, der der Kugel K am nächsten liegt und berechne die kürzeste Entfernung der Geraden g zur Kugel K. Man berechne den Punkt D der Kugel K, der der Geraden g am nächsten liegt. Es gibt genau zwei Tangentialebenen T_1 und T_2, die die Gerade g als Schnittgerade besitzen. Berechne deren Berührpunkte B_1 und B_2 mit der Kugel K und gib ihre Gleichungen an.

(b) Zeige, daß die Gerade g eine Tangente ist und berechne ihren Berührpunkt B.

(c) Zeige, daß die Gerade g die Kugel K in zwei Punkten S_1 und S_2 schneidet. Berechne die Länge der aus K ausgeschnittenen Sehne.

Strategie

(a) Man setzt die Geradengleichung in die Kugelgleichung ein, dies ergibt 1 quadratische Gleichung mit einer Unbekannten t, die nicht lösbar ist.
Berechnung von C:
Man erstellt eine Hilfsebene E senkrecht zu g durch M:
$E: (\vec{x} - \vec{m}) \cdot \vec{v} = 0$
Diese schneidet man mit der Geraden g, dies ergibt 1 lineare Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Man setzt den Wert t in die Gerade g ein und erhält C.
Berechnung von D:
Man erstelle eine Hilfsgerade h durch M und C:
$h: \vec{x} = \vec{m} + s(\vec{m} - \vec{c})$ mit $s \in R$
Schneide h mit der Kugel K, dies liefert 1 quadratische Gleichung mit einer Unbekannten s, die zwei Lösungen besitzt. Setze die Werte von s in h ein, dies liefert D_1 und D_2.
Berechne jeweils den Abstand dieser Punkte zu C:
$d_1 = |\vec{d_1} - \vec{c}|$ und $d_2 = |\vec{d_2} - \vec{c}|$
Der kürzere Abstand gehört zum gesuchten Punkt.
Berechnung der kürzesten Entfernung, wenn nach D nicht gefragt wird:
$d_{min} = |\vec{c} - \vec{m}| - r$
Berechnung der Berührpunkte der Tangentialebenen, die g als Schnittgerade besitzen:
Man bestimmt zwei verschiedene Punkte der Geraden g: P, der Aufpunkt und Q (z. B. für $t = 1$)
$B(b_1/b_2/b_3)$ sei ein Berührpunkt der Tangentialebene mit der Kugel K
(1) $P \in T \Rightarrow (\vec{p} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$
(2) $Q \in T \Rightarrow (\vec{q} - \vec{m}) \cdot (\vec{b} - \vec{m}) = r^2$
(3) $B \in K \Rightarrow (\vec{b} - \vec{m})^2 = r^2$
Dies liefert ein LGS von 2 linearen Gleichungen (1) und (2) mit drei Unbekannten, nämlich den Koordinaten b_1, b_2, b_3 des Berührpunkts, das unendlich viele Lösungen besitzt und eine quadratische Gleichung (3).
Die Lösung des LGS aus (1) und (2) setzt man in (3) ein und erhält so die gesuchten beiden Berührpunkte B_1 und B_2.
Die Gleichungen der Tangentialebenen lauten:
$T_1: (\vec{x} - \vec{b_1}) \cdot (\vec{b_1} - \vec{m}) = 0$
$T_2: (\vec{x} - \vec{b_2}) \cdot (\vec{b_2} - \vec{m}) = 0$

(b) Man setzt die Geradengleichung in die Kugelgleichung ein, dies ergibt 1 quadratische Gleichung mit einer Unbekannten t, die eine Doppellösung besitzt.
Berechnung des Berührpunktes B:
Man erstellt eine Hilfsebene E senkrecht zu g durch M:
$E: \ (\vec{x} - \vec{m}) \cdot \vec{v} = 0$
Diese schneidet man mit der Geraden g, dies ergibt 1 lineare Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Man setzt den Wert t in die Gerade g ein und erhält B.

(c) Man setzt die Geradengleichung in die Kugelgleichung ein, dies ergibt 1 quadratische Gleichung mit einer Unbekannten t, die zwei Lösungen besitzt.
Man setzt die beiden Werte von t in die Geradengleichung ein und erhält S_1 und S_2.
Länge der Sehne:
$\overline{S_1S_2} = |\vec{s}_2 - \vec{s}_1|$

Hinweis
Beim Schnit von Geraden mit Kugeln treten meistens die Binomischen Formeln auf:
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(-a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Hierauf ist besonders zu achten!

11 Kugeln und Ebenen

Aufgabe

Gegeben sind die Kugel $K : (\vec{x} - \vec{m})^2 = r^2$ und die Ebene $E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n}$.

(a) Zeige, daß die Ebene E die Kugel K nicht schneidet. Berechne den Punkt F auf der Ebene E, der die kürzeste Entfernung zur Kugel K hat und berechne dessen Abstand zur Kugel K. Berechne diejenigen Punkte S_{min} und S_{max} auf der Kugel K, die von der Ebene E am nächsten bzw. am weitesten entfernt liegen. Berechne deren Tangentialebenen T_{min} und T_{max}.

(b) Zeige, daß die Ebene E Tangentialebene an die Kugel K ist und berechne ihren Berührpunkt B. Bestimme diejenigen Ebenen E_1 und E_2 parallel zu E, die mit der Kugel K einen Schnittkreis vom Radius $r^* < r$ bilden.

(c) Zeige, daß die Ebene E die Kugel K schneidet und berechne den Schnittkreismittelpunkt M^* und den Schnittkreisradius r^*. Gib diejenige Kugelschar K_t an, die aus der Ebene E einen Schnittkreis mit dem Radius $R < r$ ausschneiden.

Strategie

(a) Man setzt den Mittelpunkt M der Kugel in die Hesse-Normalform der Ebene E ein und sieht, daß der Abstand d größer ist als der Radius r.
Berechnung von F
Man bildet eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch M:
$g : \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}$ mit $t \in R$
Man setzt die Geradengleichung g in die Ebenengleichung E ein und erhält 1 lineare Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Diesen Wert von t setzt man in die Gerade g ein und erhält den gesuchten Punkt F.
Die kürzeste Entfernung ist $d - r$.
Berechnung von S_{min} und S_{max}
Man bildet eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch M mit dem normierten Richtungsvektor $\vec{n}_0$:
$g : \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}_0$ mit $t \in R$
Die gesuchten Punkte S_{min} und S_{max} haben vom Mittelpunkt M die Entfernung r längs der Richtung von g.
$\vec{s}_{min/max} = \vec{m} \pm r\vec{n}_0$
Durch einsetzen der beiden Punkte in die Hesse-Normalform der Ebene E erfährt man, welcher der beiden Punkte näher zu E liegt.
Berechnung der Tangentialebenen T_{min} und T_{max}
$T_{min} : (\vec{x} - \vec{s}_{min}) \cdot \vec{n} = 0$ und $T_{max} : (\vec{x} - \vec{s}_{max}) \cdot \vec{n} = 0$

(b) Man setzt den Mittelpunkt M der Kugel in die Hesse-Normalform der Ebene E ein und sieht, daß der Abstand d gleich dem Radius r ist.
Berechnung von B
Man bildet eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch M:
$g : \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}$ mit $t \in R$
Man setzt die Geradengleichung g in die Ebenengleichung E ein und erhält 1 lineare Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Diesen Wert von t setzt man in die Gerade g ein und erhält den gesuchten Punkt B.

Berechnung von E_1 und E_2
Über den Satz von Pythagoras erhält man den Abstand, den die gesuchten Ebenen zum Mittelpunkt längs des Lotes von E haben müssen:
$d = \sqrt{r^2 - r^{*2}}$
Man bildet eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch M mit dem normierten Richtungsvektor $\vec{n}_0$:
$g: \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}_0$ mit $t \in R$
Die gesuchten Punkte A_1 und A_2 auf den Ebenen E_1 und E_2 haben vom Mittelpunkt M die Entfernung d längs der Richtung von g.
$\vec{a}_{1/2} = \vec{m} \pm d\vec{n}_0$
Die zugehörigen Ebenengleichungen lauten:
$E_1: (\vec{x} - \vec{a}_1) \cdot \vec{n} = 0$ und $E_2: (\vec{x} - \vec{a}_2) \cdot \vec{n} = 0$

(c) Man setzt den Mittelpunkt M der Kugel in die Hesse-Normalform der Ebene E ein und sieht, daß der Abstand d kleiner als der Radius r ist.
Berechnung von M^*
Man bildet eine Hilfsgerade g senkrecht zu E durch M:
$g: \vec{x} = \vec{m} + t\vec{n}$ mit $t \in R$
Man setzt die Geradengleichung g in die Ebenengleichung E ein und erhält 1 lineare Gleichung mit einer Unbekannten t, die eindeutig lösbar ist. Diesen Wert von t setzt man in die Gerade g ein und erhält den gesuchten Punkt M^*.
Berechnung von r^*
Satz von Pythagoras
$r^* = \sqrt{r^2 - d^2}$
Berechnung der Kugelschar K_t
Alle Kugelscharmittelpunkte M_t der gesuchten Kugelschar liegen auf einer Geraden senkrecht zu E durch M:
$\vec{m}_t = \vec{m} + t\vec{n}$ mit $t \in R$
Diese Kugelscharmittelpunkte M_t, die von t abhängen, setzt man in die Hesse-Normalform der Ebene E ein und erhält so deren Abstand:
$d_{M_t} = |(\vec{m}_t - \vec{p}) \cdot \vec{n}_0|$
Den Radius r_t der Kugelschar, der ebenfalls von t abhängt, erhält man durch den Satz des Pythagoras:
$r_t^2 = R^2 + d_{M_t}^2$
Die Kugelschargleichung lautet:
$K_t: (\vec{x} - \vec{m}_t)^2 = r_t^2$ mit $t \in R$