**Aufgabe 1:**

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(5/4/2), B(1/-4/-6)$, die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in R \text{ und für jedes } a \in \Re \text{ eine Kugelschar}$$

$$K_a: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 3+2a \\ -2a \\ -2-a \end{pmatrix} \right]^2 = 9a^2 + 18a + 36.$$

(a) Zeige: $\overline{AB}$ ist ein Durchmesser der Kugel $K_0$. Begründe sauber!

(b) Die Gerade g schneidet $K_0$ in den Punkten C und D.
Zeige: Die Dreiecke ABC und ABD sind rechtwinklig. Wo kann der rechte Winkel jeweils nur liegen? Was steckt geometrisch dahinter? Weise dies zusätzlich rechnerisch nach!
Berechne $c > 0$ so, dass $P(1/-4/c)$ auf $K_0$ liegt. Gib eine Koordinatengleichung der Tangentialebene T an die Kugel $K_0$ im Punkt P an.

(c) Zeige: Die Tangentialebene T berührt auch die Kugel $K_{-2}$; bestimme die Koordinaten des Berührpunktes.

(d) Es gibt im Punkt P aus (b) eine Kugeltangente, die die Gerade g schneidet.
Gib eine Parameterdarstellung dieser Tangente an. Beschreibe den Lösungsweg!

(e) Zeige: Die Kugel $K_{-2}$ ergibt sich durch Spiegelung von $K_0$ an der Ebene
$E: -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$.
Berechne den Radius $r^*$ des Schnittkreises der beiden Kugeln und gib die Koordinaten des Schnittkreismittelpunktes $M^*$ an.

(f) Zeige: Alle Kugeln $K_a$ haben mit der Ebene E denselben Schnittkreis wie $K_0$ und $K_{-2}$.

**Aufgabe 2:**

Für $t \in R$ ist die Ebenenschar $E_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3t \end{pmatrix}$ mit $r, s \in R$ gegeben.

(a) Gib $E_t$ in Koordinatenform an. (Ergebnis: $E_t: 3tx_1 + 4tx_2 - 2x_3 = -15t$)

(b) Zeichne $E_1$ mittels ihrer Spurgeraden.
Zeige, dass sich alle Ebenen $E_t$ in einer ihrer Spurgeraden schneiden.

(c) Gegeben sei die Ebene $E^*: 3x_2 + x_3 = 3$.

(d) Bestimme die Schnittgerade h von $E_1$ und $E^*$.
Zeichne $E^*$ mittels ihrer Spurgeraden in das obige Schaubild und bestimme dadurch die Lage von h.

(e) Bestimme eine Ebene E (in Koordinatenform) durch den Punkt $P(2/2/0)$, die parallel zu $E_1$ liegt.
Bestimme den Abstand dieser beiden Ebenen.

(f) Welcher Punkt der Ebene $E_1$ liegt dem Punkt $P(2/2/0)$ am nächsten?

(g) Welche der Ebenen $E_t$ hat vom Punkt $Q(-2/-2/1)$ den Abstand 1 LE?

(h) Gegeben sei die Gerade $k:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\1\\10\end{pmatrix}$ mit $s\in R$. Bestimme t so, dass k zur Ebene $E_t$ parallel liegt.

(i) Gegeben seien die Punkte $A(1/3/4)$ und $B(2/3/2)$.
Gib eine Ebene H an (in Koordinatenform), die durch A und B geht und senkrecht zur Ebene $E_1$ ist.

**Aufgabe 3:**
Zeige: In jedem Quader mit quadratischer Grundfläche sind die Raumdiagonale und eine der Diagonalen der Grundfläche orthogonal.

**Aufgabe 4:**
**Zeige:** Der Schwerpunkt eines Dreiecks ABC stimmt mit dem Schwerpunkt seines „Mittendreiecks“ $M_aM_bM_c$ überein.

**Aufgabe 5:**
Gegeben sind die Geraden

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \text{ mit } r\in\Re,\ h:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\8\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ mit } s\in\Re \text{ und } i:\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\3\\4\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\-2\\-2\end{pmatrix} \text{ mit } t\in\Re.$$

(a) Untersuche die gegenseitige Lage von g, h und i. Bestimme den Schnittpunkt falls vorhanden!

(b) Gegeben ist die Gerade $k_{a,b}:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\a\\9\end{pmatrix}+u\begin{pmatrix}-2\\b\\-6\end{pmatrix}$ mit $u\in\Re$

Für welche a und b, mit $a,b\in\Re$, gilt: g ist **echt parallel** zu $k_{a,b}$ (kein Schnittpunkt, aber parallel)

**Aufgabe 6:**
Eine Ebene E ist bestimmt durch die Punkte $A(5/6/8), B(6/3/4), C(4/7/9)$.

(a) Für welche $a\in\Re$ liegt der Punkt $P(6/a/a)$ in der Ebene E?

(b) Ermittle jenen Punkt von E, der lauter gleiche Koordinaten hat.

(c) Gegeben ist: $m_u:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\6\\2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-5\\9\\u\end{pmatrix}$ mit $t\in\Re$. Für welche $u\in\Re$ ist die Gerade $m_u$ zu E parallel?

**Aufgabe 7:**
Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\-8\\4\end{pmatrix},\vec{b}_t=\begin{pmatrix}\frac{t}{2}\\-8\\1\end{pmatrix},\vec{c}_t=\begin{pmatrix}4\\-4\\-t\end{pmatrix}$.

Für welche Werte von $t\in\Re$ sind die drei gegeben Vektoren linear abhängig?

**Aufgabe 8:**
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ seien linear unabhängig.
Zeige, dass auch die Vektoren $\vec{x} = 4\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}, \vec{y} = \vec{a} - 2\vec{b} + 5\vec{c}, \vec{z} = 4\vec{b} - \vec{c}$ linear unabhängig sind.

**Aufgabe 9:**
Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden LGS:

(a) $$\begin{aligned} 7x + 3y + 8z &= 35 \\ 3x - 5y + 6z &= 9 \\ 5x + y + 5z &= 18 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} 2x + 3y - z &= 1 \\ 5x + y + z &= 3 \end{aligned}$$

**Aufgabe 10:**
Für welchen Wert des Parameters $a \in \Re$ hat das LGS genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen?

$$\begin{aligned} 2x + y - 3z &= -3 \\ 3x - 2y + z &= -2a \\ 9x + ay - 8z &= 10 \end{aligned}$$

**Aufgabe 11:**
In einem kartesischen Koordinatensystem des Anschauungsraums $\Re^3$ sind die Geraden g und h gegeben.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in \Re$$

(a) Weise nach, dass g und h windschief sind. Bestimme den Abstand der beiden Geraden und ihre Lotfußpunkte.
(b) Die Ebene E enthält die Gerade g und das gemeinsame Lot von g und h.
(c) Bestimme eine Koordinatengleichung von E und gib **ohne weitere Rechnung** die Koordinaten des Durchstoßpunktes von h durch E an. Welchen Winkel schließt h mit E ein? Spiegle den Punkt $B(1/1/-2)$ an E und bestimme die Koordinaten des Spiegelpunktes $\overline{B}$.
(d) Auf der Geraden g liegen die Punkte $P_1$ und $P_2$. Bestimme die Koordinaten dieser Punkte so, dass sie vom Punkt $M(3/-2/6)$ die Entfernung 14 LE haben. Ist das Dreieck $MP_1P_2$ gleichseitig?

**Aufgabe 12:**
Im Anschauungsraum $\Re^3$ seien die Punkte $A(6/4/6), B(0/2/9), C(6/2/0)$ und $D(0/4/1)$ und die beiden Geraden $g = (AB)$ und $h = (CD)$ gegeben.
(a) Gib für beide Geraden je eine Parameterdarstellung an.
(b) Zeige, dass g und h windschief sind.
(c) Die Ebene E sei parallel zu g und geht durch h. Gib eine Koordinatengleichung von E an.

**Aufgabe 13:**

Im Anschauungsraum $\Re^3$ seien die Punkte $A(1/2/3), B(4/4/3)$ und $C(6/2/0)$ gegeben.

(a) Zeige: A, B und C bestimmen eine Ebene E. Gib für E eine Parameterdarstellung und eine Koordinatengleichung an.

(b) Die Ebene E schneidet die $[x_1; x_2]$-Ebene in einer Geraden g und die $x_3$-Achse im Punkt P. Bestimme eine Parameterdarstellung für g und die Koordinaten von P.

(c) Liegt der Punkt $D(3{,}6/1{,}4/1{,}8)$ innerhalb des Dreiecks ABC? Begründe!

**Aufgabe 14:**

Fertige ein Koordinatensystem an mit dem Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ für die $x_1$-Achse.

(a) Zeichne das Spurdreieck der Ebene E mit $E: 8x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 40$.

(b) Zeichne den Spat mit den Ecken $O(0/0/0), A(6/0/0), B(0/5/0)$ und $C(0/0/5)$.

(c) Konstruiere die Schnittfigur der Ebene E mit dem Spat.

**Aufgabe 15:**

Im Anschauungsraum $\Re^3$ sei die Ebenenschar $E_a$ gegeben.

$E_a: (4a-2)x_1 + 5x_2 - (2a-1)x_3 = 10a$ mit $a \in \Re$

Zeige: Alle Ebenen der Schar $E_a$ schneiden sich in einer Geraden g und gib ihre Parameterdarstellung an.

**Aufgabe 16:**

Im Anschauungsraum $\Re^3$ seien die Ebene $E_1$, die Ebene $E_2$ und die Gerade g gegeben.

$E_1: 11x_1 - 9x_2 - x_3 = 8 \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ mit $s, t \in \Re \qquad g: x\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 43 \end{pmatrix}$ mit $r \in \Re$

a) Bestimme die Lagebeziehung zwischen $E_1$ und $E_2$.

b) Die Gerade g schneidet die Ebene $E_1$ in S und die Ebene $E_2$ in T. Gib die Koordinaten des Mittelpunktes M der Strecke $\overline{ST}$ an. Gib die Koordinaten des Punktes P an, der durch Spiegelung von S an T entsteht.

c) $A(8/4/-4)$ ist ein Punkt auf der Geraden g. In welchem Verhältnis teilt S die Strecke $\overline{AT}$?

**Aufgabe 17:**

(a) Untersuche, ob die folgende Teilmenge M des $\Re^3$ bezüglich der im $\Re^3$ definierten Vektorraumoperationen einen Vektorraum bildet. $M = \left\{ \begin{pmatrix} k^2 \\ k \\ 3k \end{pmatrix} \middle| k \in \Re \right\}$

(b) Warum kann die Lösungsmenge eines **inhomogenen LGS** bezüglich der im $\Re^3$ definierten Vektorraumoperationen keinen Vektorraum bilden?

**Aufgabe 18:**

Im Vektorraum $\Re^3$ sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \vec{b}_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{c}_t = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \ t \in \Re$$

(a) Ermittle diejenigen Werte von t, für welche die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}_t, \vec{c}_t$ linear abhängig sind.

(b) Zeige, dass die beiden Vektoren $\vec{b}_t$ und $\vec{c}_t$ für alle Werte von t linear unabhängig sind.

(c) Bestimme die Dimension des von $\vec{a}, \vec{b}_{-3}, \vec{c}_{-3}$ erzeugten Vektorraums U. Gib für U eine Basis an.

(d) Untersuche, ob die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$ in U liegen.

Gib gegebenenfalls eine Darstellung in der neuen Basis an.

**Aufgabe 19:**

Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. M teilt die Strecke $\overline{AD}$ im Verhältnis $1:k$. In welchem Verhältnis teilt dann die Strecke $\overline{BM}$ die Diagonale $\overline{AC}$?

**Aufgabe 20:**
Gegeben sind die Punkte $A(1/-2/3), B(5/2/3)$ und $C(\frac{3}{2}/\frac{3}{2}/8)$ sowie die Ebene $E_1 : x_1 - x_2 = 0$.

(a) Zeige, dass C in $E_1$ liegt und die Gerade durch A und B parallel zu $E_1$ ist.
Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene $E_2$. Gib **ohne weitere Rechnung** eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen $E_1$ und $E_2$ an und begründe dies!

(b) Durch Spiegelung der Strecke $\overline{AB}$ an $E_1$ entsteht die Strecke $\overline{A^*B^*}$. Berechne die Koordinaten der Spiegelpunkte $A^*$ und $B^*$. Das Viereck $ABB^*A^*$ ist die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze C.
Zeige, dass die Grundfläche der Pyramide ein Rechteck, aber kein Quadrat ist.
Zeichne ein Schrägbild der Pyramide mit dem Verkürzungsfaktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ in $x_1$-Richtung.

(c) Gib eine Parameterdarstellung einer Geraden m an, auf der die Mittelpunkte aller Kugeln liegen, die durch A, B, $B^*$ und $A^*$ gehen. Zeichne die Gerade m in das vorhandene Koordinatensystem ein.
Auf welcher Kugel liegen die Punkte A, B, $B^*$, $A^*$ und C? Gib eine Gleichung dieser Kugel an.

(d) Eine Kugel K hat die Gleichung $K : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 10x_1 - 4x_2 - 2x_3 + \frac{93}{4} = 0$.

(e) Berechne den Mittelpunkt M und den Radius r der Kugel K.
Zeichne M in das gegebene Koordinatensystem ein. Bestimme den Abstand von M zu B.
K schneidet aus der Grundfläche der Pyramide einen Kreisausschnitt aus.
Zeige, dass es sich um einen Viertelkreis handelt und berechne dessen Flächeninhalt.

**Aufgabe 21:**
Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 2a & 2a & 2a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \Re$$

(a) Für welche Werte von a hat das LGS genau eine Lösung, keine Lösung oder unendlich viele Lösungen?
(b) Falls möglich, gib die Lösungen an.
(c) Gibt es eine Lösung mit $x_1 = x_2 = 1$?
(d) Gib **ohne weitere Rechnung** die Lösung für $a = 2$ und $a = 25$ des **zugehörigen homogenen LGS** an.

**Aufgabe 22:**
Gegeben sei die Kugel K mit $K : (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 + 3)^2 = 4$ und ein Punkt $P(4/5/1)$ außerhalb der Kugel. Man legt den Tangentialkegel von P an die Kugel K.

(a) Bestimme die Gleichung derjenigen Kugel $K^*$ mit $r^* < 2$, die die Kugel K berührt und im selben Tangentialkegel liegt.
(b) Bestimme die Koordinaten des Berührpunktes B der beiden Kugeln und gib eine Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene T in Koordinatenform an.

**Aufgabe 23:**
Zeige, dass die Gerade g durch die Punkte $P(5/2/1)$ und $Q(6/2/-1)$ mit der Kugel

$K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 9$ keinen Punkt gemeinsam hat. Bestimme dann die Koordinaten der Berühr-

punkte der beiden Ebenen, die g als Schnittgerade besitzen und die Kugel K berühren.

**Aufgabe 24:**
Berechne den Radius r der Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(1/3/-4)$ so, dass die Gerade g durch die Punkte $P(-2/5/7)$ und $Q(0/10/3)$ Tangente wird.

**Aufgabe 25:**
Die Gerade g durch den Punkt $P(5/4/9)$ schneide die Kugel
$K: (x_1 - 3)^2 + (x_2 + 1)^2 + (x_3 - 5)^2 = 81$ im Punkt $S(7/3/s_3)$ mit $s_3 > 5$.
(a) Berechne den zweiten Schnittpunkt.
(b) Wie ist der Radius der Kugel K zu ändern, damit g die Kugel berührt?

**Aufgabe 26:**
Gegeben sei die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad s \in \Re$ und die Ebene $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$.
Die Gerade h ist parallel zu E, geht durch den Punkt $B(3/5/13)$ und hat mit g genau eine Punkt P gemeinsam. Berechne die Koordinaten von P und gib eine Gleichung von h an.
Fertige eine Skizze an und beschreibe den Lösungsweg.

**Aufgabe 27:**
Die Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \Re$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad t \in \Re$ sind windschief.
Der Punkt $A(4/1/6)$ liegt auf keiner der beiden Geraden.
Bestimme eine Parameterdarstellung der Geraden i durch den Punkt A, die g und h schneidet.