Aufgabe 1:

Gegeben sind die Kugel K mit der Gleichung K : $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\vec{x} - 35 = 0$ und die Geraden

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad h: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) g schneidet K in den Punkten S_1 und S_2. Berechne die Koordinaten von diesen beiden Punkten.

(b) Stelle die Koordinatengleichungen der Tangentialebenen an K in S_1 und S_2 auf. Bestimme den Schnittwinkel der beiden Ebenen. Ermittle den Abstand des Punktes S_1 von der Tangentialebene in S_2.

(c) Zeige, dass h die Kugel berührt. Gib die Koordinaten des Berührpunktes an.

Aufgabe 2:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte R (3/1/-1) und Q (3/2/-1), sowie die Ebene E mit der Gleichung E: $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ und die Kugel K mit

K: $\vec{x}^2 - \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix}\vec{x} + 23 = 0$ gegeben.

(a) Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts M und den Radius r der Kugel K. Zeige, dass R auf K und Q in E liegt. Berechne die Länge der Sehne $\overline{RR'}$, die K aus der Geraden RQ ausschneidet. Bestimme den Winkel RMR'.

(b) Zeige, dass die Ebene E die Kugel K schneidet. Berechne die Koordinaten des Mittelpunkts M_1 und den Radius r_1 des Schnittkreises k_1.

(c) Bestimme die Gleichung der Tangentialebene T, die K in R berührt. Alle zu T parallelen Ebenen, welche die Kugel K schneiden oder berühren, bilden eine Ebenenschar T_s. Stelle eine Gleichung von T_s auf und gib die zulässigen Werte von s an. Bestimme diejenigen Ebenen von T_s, die aus K Kreise mit dem Radius $r_2 = 3$ ausschneiden.

Aufgabe 3:
In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte gegeben:
$B_1(6/-6/6)$, $M_1(-6/0/6)$, und $M_2(-2/-2/11)$

(a) Bestimme die Gleichung der Kugel K_1 um M_1 durch B_1 und die Gleichung der Tangentialebene T_1 an K_1 in B_1. Die Kugel K_2 mit dem Mittelpunkt M_2 berührt T_1 in B_2. Ermittle die Gleichung von K_2 und die Koordinaten von B_2.
(b) Begründe geometrisch, dass die Geraden B_1B_2 und M_1M_2 einander schneiden. Berechne die Koordinaten ihres Schnittpunktes S. Zeige, dass K_1 und K_2 einander schneiden. Bestimme die Koordinatengleichung der Ebene des Schnittkreises.
(c) Durch Spiegelung von B_1 an der Geraden M_1M_2 erhält man B_1'. Ermittle die Gleichung der Tangentialebene T_1' an K_1 in B_1'. Begründe, dass T_1' auch K_2 berührt. Beschreibe in Worten die Menge der Punkte, durch die es keine gemeinsame Tangentialebene an K_1 und K_2 gibt.

Aufgabe 4:
Die Länge eines Vektors ist gleich dem Betrag des Vektors. Dies ist gleich dem Abstand zwischen den beiden Endpunkten des Vektors.

(a) Berechne die Länge der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b}_t = \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \\ 1-t \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
(b) Für welches t hat der Vektor $\vec{a}_t$ die Länge 1? $\vec{a}_t = \begin{pmatrix} t^2 \\ \sqrt{2}\,t \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 5:
Die Ebene $e_1: 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 13$ schneidet die Ebene $e_2: 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 26$ in einer
Geraden g. Bestimme die Koordinatengleichung einer Ebene e, die e_1 und e_2 in g schneidet und
(a) orthogonal zu e_1 ist
(b) orthogonal zu e_2 ist
(c) durch $P(5/-3/4)$ geht
(d) Berechne den Abstand des Punktes P von e_1.
(Genau beschreiben, welche einzelnen Schritte Du machst)

Aufgabe 6:

Es seien die Vektoren $\vec{a}_u = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ 2u \end{pmatrix}, \vec{b}_u = \begin{pmatrix} u-1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{e}_v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ v \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Zeige, dass $\vec{a}_u$ und $\vec{b}_u$ für jeden Wert von u linear abhängig sind.

(b) Zeige, dass $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}$ linear unabhängig sind und stelle $\vec{d}$ in der neuen Basis $\vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{c}$ dar.

(c) Bestimme der Wert von v so, dass $\vec{a}_3, \vec{b}_3, \vec{e}_v$ linear abhängig sind.

(d) Es sei $\vec{x}_u = \vec{a}_u + \vec{b}_u + \vec{c}$. Für welchen Wert von u hat $|\vec{x}_u|$ seinen kleinsten Wert?

(e) Für welchen Wert von u sind $\vec{a}_u$ und $\vec{b}_u$ orthogonal?

Aufgabe 7:

Für welche Werte von t hat das inhomogene Gleichungssystem eine, keine oder unendlich viele Lösungen? Wie sieht es mit der Lösbarkeit des zugehörigen homogenen Gleichungssystems aus?

$$\begin{aligned} x_1 + tx_2 + tx_3 &= 1 \\ tx_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + tx_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Aufgabe 8:

Wie muß man die Werte r und s wählen, damit das inhomogene Gleichungssystem eine, keine oder unendlich viele Lösungen besitzt?

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + rx_3 &= s \\ 2x_1 + x_2 + sx_3 &= r \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 9:

Für welche Werte von a sind die drei Vektoren linear abhängig (l. a.) bzw. linear unabhängig (l. u.)?

$$\vec{a}_a = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}, \vec{b}_a = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ 2+a \end{pmatrix}, \vec{c}_a = \begin{pmatrix} 3 \\ a \\ 3+a \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:

Für welche Werte von a, b, c sind die beiden Geraden windschief, parallel, identisch oder schneiden sich?

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ c \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11:
Für welche Werte von a, b, c liegt die Gerade parallel oder in der Ebene bzw. schneidet die Ebene?

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix} \qquad e:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$$

Aufgabe 12:
Bestimme die Spurpunkte (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) und die Spurgeraden (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen) einmal mit der Parameterform von e_1 und zum anderen mit der Koordinatenform von e_2. Bringe e_1 möglichst schnell und geschickt (elegant) auf Koordinatenform und begründe die einzelnen Schritte, die Du machst! (Wichtig für den Lehrer, damit er alles nachvollziehen kann!!!) Bringe e_2 möglichst schnell und geschickt (der Königsweg) auf Parameterform und begründe die einzelnen Schritte, die Du machst! (Wichtig für den Lehrer, damit er immer weiß, welcher Gedankengang bei Dir vorliegt!!!)

$$e_1:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad e_2: -x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 7$$

Aufgabe 13:
Alle Ebenen e_t schneiden sich in einer Geraden (man spricht hier von einem Ebenenbüschel). Bestimme die Gleichung der Geraden, die alle Ebenen gemeinsam haben.

$$e_t: 2tx_1 + 4x_2 + (3-t)x_3 = 3t + 5$$

Aufgabe 14:
Bestimme die Werte von a, b, c so, dass gilt: e, e^* sind parallel oder identisch!

$$e:\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad e^*:\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} c \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Zeige dies zum einen über die lineare Abhängigkeit der jeweiligen Richtungsvektoren der Ebenen und zum anderen über die lineare Abhängigkeit der Normalenvektoren.

Aufgabe 15:
Welcher Gleichung müssen die Koordinaten des Punktes $X(x_1/x_2/x_3)$ genügen, damit ein Punkt $P(4/1/-1)$ die Entfernung 5 hat? Wo liegen alle diese Punkte X geometrisch betrachtet?

Aufgabe 16:
Gegeben sei die Gerade g und Punkt P im $\Re^2$. $g: x_1 + 2x_2 = 4 \quad P(1/1) \notin g$
Wie nennt man diese Darstellung einer Geraden in der Ebene? Inwiefern weicht diese Darstellung von der Dir bekannten Art aus der Analysis ($y = mx + b$) ab? Bestimme diejenige Gerade h, die senkrecht zu g ist und durch P geht. (In Parameter- und in Koordinatenform) Diese Gerade h schneidet g in P^*, dem sogenannten "Lotfußpunkt" (Lotfußpunkt von P bezüglich g). Berechne seine Koordinaten. (Genauso kann man eine Ebene e in $\Re^3$ vorgeben und eine senkrechte Gerade h zu e errichten, die $P \notin e$ enthält. Der Schnittpunkt der Geraden h mit der Ebene wird wieder "Lotfußpunkt" P^* genannt (Lotfußpunkt von P bezüglich e).

Aufgabe 17:
Gegeben sind die beiden windschiefen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die Ebene e_1 parallel zu g, die h enthält.
(b) Bestimme die Ebene e_2 parallel zu h, die g enthält.
(c) Bestimme den Abstand dieser beiden windschiefen Geraden g und h und die jeweiligen Lotfußpunkte.

Aufgabe 18:
Gegeben sei die Ebene e: $2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$

Längs der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ falle ein Lichtstrahl auf e und werde an selbiger reflektiert. Längs welcher Geraden h verläuft der reflektierte Strahl?

Aufgabe 19:
Ein Lichtstrahl fällt längs der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ausgehend vom Punkt P (2/1/3) auf ein System dreier paarweiser senkrechter Spiegel und wird an diesen reflektiert. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die Spiegel in drei Koordinatenebenen eines kartesischen Koordinatensystems liegen.
(a) Verfolge den Weg des Lichtstrahls und gib an längs welcher Geraden h der Lichtstrahl nach den drei Spiegelungen das System wieder verläßt.
(b) Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung O (0/0/0) von g? Wie liegen einfallende Gerade g und reflektierte Gerade h zueinander? Berechne deren Abstand!

Aufgabe 20:

(a) Man gebe die Gleichung der Ebene e an, die durch die Punkte A (2/0/0), B (0/4/0) und C(0/0/6) geht.
(b) Wie sehen die Gleichungen der Ebenen aus, die zu e parallel sind und den Abstand 6 von e haben?
(c) Welchen Winkel schließt die Ebene e mit der $[x_2;x_3]$-Ebene ein?
(d) Wo liegen die Punkte, die von e ebenso weit wie von der $[x_1;x_2]$-Ebene entfernt sind?

Aufgabe 21:

Gegeben sei die Ebene e: $2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$

Längs der Geraden g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ falle ein Lichtstrahl auf e und werde an selbiger reflektiert. Längs welcher Geraden h verläuft der reflektierte Strahl?

Aufgabe 22:

Für welche Werte λ hat das inhomogene Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 2 & \lambda+1 & -2 \\ 6 & 3 & \lambda-2 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 3 \\ 2\lambda - 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(a) unendlich viele
(b) eine
(c) keine Lösung?

Aufgabe 23:

Für welche reellen Zahlen a und k ist das Gleichungssystem lösbar, für welche unlösbar?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -k \\ 2 & -1 & 1-2k \\ k & -2 & 2k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ a^2 - 2 \\ 1-2a^2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 24:

Bestimme die Gleichung der Kugel K, die $D(4/-5/-1)$ als Mittelpunkt hat und durch $P(6/2/0)$ geht.

Aufgabe 25:

Bestimme die Gleichung derjenigen Kugel K, die ihren Mittelpunkt im Ursprung O hat und die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 12 = 0$ berührt. Wie lauten die Koordinaten des Berührpunktes?

Aufgabe 26:
Gegeben sei die Gerade g durch die Punkte $A(0/3/2)$ und $B(2/3/0)$. Eine Kugel K hat den Ursprung O als Mittelpunkt und berührt dir Gerade g in T. Berechne den Radius r von K und die Koordinaten von T.

Aufgabe 27:
Gib eine Gleichung der Tangentialebene T_1 an, die die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 54$ im Punkt $A(6/2/0)$ berührt. T_2 sei eine weitere Tangentialebene an K, die parallel zu T_1 ist.
Bestimme eine Gleichung von T_2.

Aufgabe 28:
Gegeben sind die Kugel $K: \vec{x}^2 - 25 = 0$ und die Ebene $E: -3x_1 + 4x_3 - 21 = 0$.
(a) Zeige, dass die Kugel K die Ebene E schneidet und berechne Schnittkreisradius r^* und Schnittkreismittelpunkt M^*.
(b) Bestimme denjenigen Punkt auf der Kugel K, der von E maximalen Abstand hat.

Aufgabe 29:
Gegeben ist ein Punkt $P(10/5/12)$, der nicht auf der Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$ liegt.
Bestimme die Koordinaten des Kugelpunktes Q, der von P minimalen Abstand hat.

Aufgabe 30:
Gib die Länge der Sehne an, die die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$ aus der Geraden g durch $R(3/1/-1)$ und $Q(3/2/-1)$ herausschneidet.

Aufgabe 31:
Für welches $c \in \Re$ ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{pmatrix}$ Tangente an die Kugel $K: \vec{x}^2 - 25 = 0$?

Aufgabe 32:
Gegeben sind die Kugel $K: \vec{x}^2 = 16$ und die Ebene $E: 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$. Durch Spiegelung der Kugel K an der Ebene E erhält man die Kugel $\overline{K}$. Gib ihre Gleichung an.

Aufgabe 33:

Gegeben seien die beiden Kugeln $K_1: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$ und $K_2: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$.

Weise nach, dass diese durch eine Spiegelung an einer Ebene E ineinander übergeführt werden können. Bestimme eine Gleichung von der Spiegelebene E.

Aufgabe 34:
Gegeben ist die Ebene $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 12$. Die zu E parallele Ebene durch den Ursprung O heißt E^*. Die Kugel K berührt E^* in O und E in Q. Bestimme die Koordinaten des Punktes Q und die Gleichung der Kugel K.

Aufgabe 35:
Gib eine Schar aller Kugeln K_t an, die mit der Ebene $E: 2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 24$ den Schnittkreisradius $r^* = \sqrt{5}$ haben und die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}\right]^2 = 54$ als eine mögliche Kugel besitzt.

Aufgabe 36:
Eine Kugel K berührt die Ebene $E: x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6 = 0$ im Punkt $A(4/3/-2)$ und geht durch den Punkt $P(7/6/2)$. Bestimme eine Gleichung dieser Kugel.

Aufgabe 37:
Gegeben seien die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und die parallelen Ebenen $E_1: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -20$ und $E_2: 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 50$. Gesucht ist eine Gleichung derjenigen Kugel K, deren Mittelpunkt M auf der Geraden g liegt und beide Ebenen berührt.

Aufgabe 38:
Gegeben sind die Ebene $E: 2x_1 - 2x_2 - x_3 = -1$ und die Kugel $K: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right]^2 = 36$.

Bestimme je eine Gleichung der Ebenen E_1 und E_2, die parallel zu E sind und aus der Kugel K einen Schnittkreis mit dem Radius $r^* = \sqrt{20}$ ausschneiden.