Theorie und Übungsaufgaben zu Vektoren, Linearen Gleichungssystemen, Matrizen und Determinanten

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

Oktober 2002

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

1 Theorie

1.1 Das Skalarprodukt

1.1.1 Definition

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \alpha$$

1.1.2 Rechenregeln

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und die reelle Zahl $\lambda \in \Re$.

$\mathrm{i}_1)$	$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$	Positive Definitheit
$\mathrm{i}_2)$	$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	
ii)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	Kommutativität
$\mathrm{iii}_1)$	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	Distributivität
$\mathrm{iii}_2)$	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	
iv)	$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$	

1.1.3 Anwendung

Gegeben sind die zwei Punkte A und B mit ihren zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

- Senkrechtstehen von zwei Vektoren:

  $\vec{a} \perp \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

- Länge (Betrag) eines Vektors:

  $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

  also: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

- Winkel zwischen zwei Vektoren:

  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$

- Abstand zweier Punkte:

  $d(A,\, B) = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2}$

- **Winkel mit den Koordinatenachsen** (Richtungscosinus):

  $\cos \angle(\vec{a};\, \vec{e_i}) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$ mit $i = 1,\, 2,\, 3$ und

  $\vec{e}_1 = (1\,;\, 0\,;\, 0)$, $\vec{e}_2 = (0\,;\, 1\,;\, 0)$, $\vec{e}_3 = (0\,;\, 0\,;\, 1)$

1.2 Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

1.2.1 Definition

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ -(a_1b_3 - a_3b_1) \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha$

1.2.2 Rechenregeln

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und die reelle Zahl $\lambda \in \Re$.

i)	$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$	Antikommutativität
ii_1)	$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$	
ii_2)	$\vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = \vec{0}$	
iii)	$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$	
iv_1)	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	Distributivität
iv_2)	$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$	
v)	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$	
vi)	$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$	

1.2.3 Anwendung

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

- Flächeninhalt des von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

  $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha$

- Flächeninhalt des von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks:

  $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}| \sin\alpha$

- Normalenvektor von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

  $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ es gilt: $\vec{n} \perp \vec{a} \wedge \vec{n} \perp \vec{b}$

- Lineare Abhängigkeit von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \iff \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig

1.3 Das Spatprodukt

1.3.1 Definition

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2 \qquad \text{Regel von Sarrus}$$

1.3.2 Rechenregeln

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

i) $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >=< \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} >=< \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} >$ zyklische Vertauschung

ii) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

1.3.3 Anwendung

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

- Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats:

  $V = | < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |$

- Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Tetraeders:

  $V = \frac{1}{6} | < \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > |$

- Lineare Abhängigkeit von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

  $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >= 0 \Longleftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig

- Vorzeichen des Spatprodukts von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > \begin{cases} > 0 \Longleftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ bilden ein Rechtssystem} \\ = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind linear abhängig} \\ < 0 \Longleftrightarrow \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ bilden ein Linkssystem} \end{cases}$$

1.4 Matrizen

1.4.1 Definition

Eine $(m,\, n)$-Matrix $\underline{A}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema, das aus $m \cdot n$ Zahlen - Elemente genannt - besteht, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$\underline{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n$$

Das Element a_{ij} steht in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte.
i heißt: Zeilenindex
j heißt: Spaltenindex

1.4.2 Rechenregeln

Sind $\underline{A} = (a_{ij})$ und $\underline{B} = (b_{ij})$ zwei $(m,\, n)$-Matrizen, so gilt:

- Transponierte Matrix:

  $\underline{A}^T = (a_{ji})$

  Zeilen werden mit Spalten vertauscht

- Gleichheit:

  $\underline{A} = \underline{B} \Longleftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$

- Multiplikation mit einem Skalar:

  $\lambda\underline{A} = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ mit $\lambda \in \Re$

  Jedes Element der Matrix wird mit λ multipliziert

- Addition:

  $\underline{A} + \underline{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

  Elementeweises Addieren

- Transponieren einer Matrizensumme:

  $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$

1.4.3 Produkt von Matrizen

Sei $\underline{A} = (a_{ij})$ eine $(m,\, n)$-Matrix und $\underline{B} = (b_{jk})$ eine $(n,\, r)$-Matrix.

$\underline{A} \cdot \underline{B} = (c_{ik})$ ist die $(m,\, r)$-Matrix, mit $c_{ik} = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ für $i = 1,\, \ldots,\, m$ und $k = 1,\, \ldots,\, r$

c_{ik} ist also das Skalarprodukt der i-ten Zeile von $\underline{A}$ mit der k-ten Spalte von $\underline{B}$.
Es muß also die Spaltenanzahl von $\underline{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\underline{B}$ übereinstimmen. Die Matrizen müssen zueinander passen!

Rechenregeln:

i) $\underline{A}\,(\underline{B}\,\underline{C}) = (\underline{A}\,\underline{B})\,\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C}$
ii) $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T$
iii) $(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$

Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ!

1.4.4 Inverse Matrizen

Ist $\underline{A}$ eine quadratische $(n,\, n)$-Matrix und gilt $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$, wobei $\underline{E}$ die $(n,\, n)$-Einheitsmatrix ist, so nennt man $\underline{A}^{-1}$ die Inverse Matrix zu $\underline{A}$.

Rechenregeln:

i) $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$
ii) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$
iii) $(\underline{A}^{-1})^T = (\underline{A}^T)^{-1}$

Die Inverse einer $(2,\, 2)$-Matrix berechnet sich wie folgt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \det \underline{A}$$

$$\underline{A}^{-1} = \tfrac{1}{|\underline{A}|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

1.5 Determinanten

Jeder quadratischen (n, n)-Matrix $\underline{A}$ ist eine Zahl - ihre Determinante - zugeordnet. Man schreibt $\det \underline{A}$ oder $|\underline{A}|$. Man definiert sie zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ und entwickelt damit ein Verfahren für $n > 3$.

1.5.1 Definition der Determinante

- $n = 2$:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \det \underline{A} = |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

- $n = 3$:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
$$\Longrightarrow \det \underline{A} = |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

- $n > 3$:

  Man entwickelt die Determinante nach einer Spalte j oder nach einer Zeile i.
  Man definiert die $(n-1,\, n-1)$-Matrix $\underline{A}_{ij}$ als diejenige Matrix, die entsteht, wenn man von der ursprünglichen Matrix $\underline{A}$ die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

  – Es gilt somit für die Entwicklung nach der i-ten Zeile:

  $$\det \underline{A} = |\underline{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\underline{A}_{ij}|$$

  – Es gilt somit für die Entwicklung nach der j-ten Spalte:

  $$\det \underline{A} = |\underline{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\underline{A}_{ij}|$$

1.5.2 Eigenschaften und Rechenregeln für Determinanten

- Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten), so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.

- Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit der reellen Zahl a, so multipliziert sich die Determinante mit der Zahl a.

- Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) ändert den Wert der Determinante nicht.

- Rechenregeln:

  i) $\det \underline{A}^T = \det \underline{A}$
  ii) $\det(\underline{A} \cdot \underline{B}) = \det \underline{A} \cdot \det \underline{B}$
  iii) $\det \underline{A}^{-1} = \frac{1}{\det \underline{A}}$
  iv) $\det(\lambda \cdot \underline{A}) = \lambda^n \cdot \det \underline{A}$

2 Aufgaben

Aufgabe 1:

Für welche Zahlen $k \in \Re$ stehen die beiden Vektoren $\vec{a} = (1\,;\,2k\,;\,3)$ und $\vec{b} = (1\,;\,k\,;\,k)$ aufeinander senkrecht?

Aufgabe 2:

Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ schließen einen Winkel von $30°$ ein.
Berechnen Sie $|(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})|$

Aufgabe 3:

Für welche $t \in \Re$ sind die Vektoren $\vec{a} = (1\,;\,-1\,;\,1)$, $\vec{b} = (1\,;\,t\,;\,1)$ und $\vec{c} = (5\,;\,0\,;\,t+3)$ linear abhängig?

Aufgabe 4:

Für die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ sei $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -2$
Berechnen Sie $(\vec{b}\times\vec{a})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

Aufgabe 5:

Geben Sie die Zerlegung des Vektors $\vec{c} = (0\,;\,-4\,;\,3)$ in Komponenten nach den Vektoren $\vec{a} = (1\,;\,-1\,;\,2)$ und $\vec{b} = (2\,;\,2\,;\,1)$ an.

Aufgabe 6:

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1\,;\,2\,;\,-1)$ und $\vec{b} = (k\,;\,0\,;\,1)$

a) Es sei $k = 2$
Für welche Vektoren $\vec{c} = (x\,;\,y\,;\,z)$ gilt dann:
$(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\cdot\vec{c})\cdot\vec{a}$?
Hinweis: $\vec{a}\cdot\vec{b}$ und $\vec{b}\cdot\vec{c}$ sind Skalarprodukte.

b) Für welche Werte des reellen Parameters k hat das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck den Flächeninhalt $A = \sqrt{2}$?

Aufgabe 7:

Gegeben sind die kartesischen Basiseinheitsvektoren $\vec{i} = (1\,;\,0\,;\,0)$, $\vec{j} = (0\,;\,1\,;\,0)$ und $\vec{k} = (0\,;\,0\,;\,1)$.
Geben Sie die Komponenten des folgenden Vektors $\vec{v}$ an:
$\vec{v} = (\vec{i}+\vec{j})\times(\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

Aufgabe 8:

Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben:
$\vec{a} = (1\,;\,-1\,;\,1)$ und $|\vec{b}| = 4$ und ihr eingeschlossener Winkel ist $\alpha = 60°$.
Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$

Aufgabe 9:

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (1\,;\,-1\,;\,2)$ und $\vec{b} = (2\,;\,p\,;\,-1)$:
Bestimmen Sie $p \in \Re$ so, daß der Vektor $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$ parallel zur x, y-Ebene verläuft.

Aufgabe 10:

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = (1\,;\,1\,;\,2)$, $\vec{b} = (2\,;\,-1\,;\,1)$ und $\vec{c} = (0\,;\,3\,;\,3)$:
Zerlegen Sie den Vektor $\vec{c}$ in Komponenten nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Aufgabe 11:

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (2p\,;\, p\,;\, 2p)$ mit $p \neq 0$ und $\vec{b} = (2\,;\, 4\,;\, q)$.
Wie müssen die reellen Parameter p und q gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Quadrat aufspannen?

Aufgabe 12:

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Bestimmen Sie $p \in \Re$ so, daß der Vektor $\vec{a} + p\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{c}$ steht.

Aufgabe 13:

Gegeben ist die Matrix $\underline{A}_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$ mit $m \in \Re$.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\underline{A}_m$. Für welche Werte von $m \in \Re$ ist die Determinante von 0 verschieden?

b) Gegegben ist das lineare Gleichungssystem

$$\underline{A}_m \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters m.

c) Im folgenden sei $m = 2$
Für welche $\lambda \in \Re$ hat das System

$$\underline{A}_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

nichttriviale Lösungen?

Aufgabe 14:

Durch die Matrix

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9-a \\ 2 & -3-a & -1 \\ 3-a & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \Re$$

ist das homogene lineare Gleichungssystem $\underline{A}_a \cdot \vec{x} = \vec{0}$ gegeben.
Zeigen Sie, daß das LGS genau dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn gilt:
$a^3 - 9a^2 - 30a + 88 = 0$
Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung (eine Lösung kann leicht erraten werden).

Aufgabe 15:

Durch die Matrix

$$\underline{A}_p = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & p-1 & 2 \\ 1 & -3 & p+2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_p = \begin{pmatrix} 1-p \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \Re$$

ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $\underline{A}_p \cdot \vec{x} = \vec{b}_p$ gegeben.
Für welche Werte von p ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
Geben Sie in diesem Fall nur die Lösung x_1 in Abhängigkeit von p an.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür aus strategischen Gründen die Cramersche Regel

Aufgabe 16:

Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(2,3)}$ mit den Elementen

$$a_{ik} = \begin{cases} (-1)^{i+k} & \text{für} \quad i < k \\ i^k & \text{für} \quad i \geq k \end{cases} \quad \text{mit } i = 1,\, 2 \text{ und } k = 1,\, 2,\, 3$$

Aufgabe 17:

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A}_{p,q} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die reellen Parameter p und q so, daß gilt:
$\underline{A}_{p,q} \cdot \underline{A}_{p,q}^T = \underline{B}$

Aufgabe 18:

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Welchen Wert besitzen die jeweiligen Determinanten?
Anmerkung: Verlangt ist entweder eine Berechnung oder eine Begründung für den Wert.

Aufgabe 19:

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -a & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B}_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \\ -1 & 1 \\ -a & a \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \Re$$

Berechnen Sie $\underline{B}_a^T \cdot \underline{A}_a$

Aufgabe 20:

Gegeben ist die Matrix

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 1-a & 2a & a-3 \\ 1 & 2a & 2+2a \\ a & -a & 5 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \Re$$

Für welche Werte von a verschwindet die Determinante?
Berechnen Sie $\underline{A}_1^{-1}$ für $a = 1$ und lösen Sie damit das LGS

$$\underline{A}_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3 Lösungen

1) $k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = -1$

2) 5

3) $t_1 = -1$, $t_2 = 2$

4) 2

5) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

6a) $\vec{c} = t(-1\,;\ -2\,;\ 1)$

6b) $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{3}{5}$

7) $\vec{v} = (1\,;\ -1\,;\ -2)$

8) $2\sqrt{3}$

9) $p = -2$

10) $\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

11) $p = \pm 2$, $q = -4$

12) $p = -\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}$

13a) $m \neq 0$

13b) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$

13c) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{5}$

14) $a_1 = 2$, $a_2 = 11$, $a_3 = -4$

15) $p \neq 0 \wedge p \neq 2$, $x_1 = -\frac{p^2+2p+3}{p}$

16) $\underline{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$

17) $p = \pm 2$, $q = -1$

18) $\det \underline{A} = 2$ (Entwicklung nach der 1. Spalte), $\det \underline{B} = 0$ (Zeile 2 und Zeile 4 sind l. a.)

19) $\underline{B}_a^T \cdot \underline{A}_a = \begin{pmatrix} a+2 & a^2-a & a^2-1 & a^2-a-1 \\ 3a & -a^2-a+2 & a^2-1 & -a^2+a-1 \end{pmatrix}$

20) $a_1 = 0$, $a_2 = 5$, $\underline{A}_1^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & -8 & 12 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = (4\,;\ -\frac{1}{2}\,;\ -\frac{1}{2})$