Übungen zum Thema Funktionen

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

Februar 2004

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

Inhaltsverzeichnis

1 Zusammengesetzte Funktionen

Zusammengesetzte Funktionen $f(x)$ bestehen aus mehreren Teilfunktionen $f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)$, die an den sogenannten **Nahtstellen** $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$ zusammengefügt werden.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{für} \quad x < x_0 \\ f_2(x) & \text{für} \quad x_0 \leq x < x_1 \\ \cdots & \text{für} \quad \cdots \\ f_n(x) & \text{für} \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} f_1'(x) & \text{für} \quad x < x_0 \\ f_2'(x) & \text{für} \quad x_0 < x < x_1 \\ \cdots & \text{für} \quad \cdots \\ f_n'(x) & \text{für} \quad x_{n-1} < x < x_n \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} f_1''(x) & \text{für} \quad x < x_0 \\ f_2''(x) & \text{für} \quad x_0 < x < x_1 \\ \cdots & \text{für} \quad \cdots \\ f_n''(x) & \text{für} \quad x_{n-1} < x < x_n \end{cases}$$

Dies bedeutet, daß die Teilfunktionen einen eingeschränkten Definitionsbereich (wie angegeben) besitzen und auch nur in diesen Grenzen untersucht werden müssen.
Nun ist es aber **zusätzlich wichtig**, was genau an den **Nahtstellen** passiert.
Man will man wissen, wie sich die Funktionswerte und Tangentensteigungen an den jeweiligen Nahtstellen verhalten, also untersucht man deren links- und rechtsseitigen Grenzwert:

Für die erste Nahtstelle:
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f_1(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f_2(x)$
Sind diese Werte gleich, so ist die Funktion $f(x)$ an dieser Nahtstelle stetig, d.h. sie macht keinen Sprung. Dasselbe führt man für die anderen, verbleibenden Nahtstellen durch.

Für die erste Nahtstelle:
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f_1'(x)$
$\lim\limits_{x \to x_0^+} f_2'(x)$
Sind diese Werte gleich, so hat die Funktion $f(x)$ an dieser Nahtstelle dieselbe Tangentensteigung, d.h. sie hat keinen Knick. Dasselbe führt man für die anderen, verbleibenden Nahtstellen durch.

Sind beide Bedingungen erfüllt, so sagt man die Funktion sei **differenzierbar** (also kein Sprung und kein Knick), ist nur die erste Bedingung erfüllt, so sagt man die Funktion sei **stetig** (also kein Sprung).

1.1 Musteraufgabe

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{2+x^2} & \text{für} \quad x < 0 \\ \sqrt{1-x^2} & \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, daß $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$ stetig und differenzierbar ist.

b) Wie lautet die Gleichung der Tangente im Punkt $P(1/0)$?

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts W. (Auf den Nachweis des Wendepunktes kann verzichtet werden)

d) Welches Verhalten hat die Funktion für $x \to -\infty$?

e) Zeichnen Sie das Schaubild der Funktion.

Lösung
Bilden der 1. und 2. Ableitung:

$$f'(x) = \begin{cases} -4\dfrac{x}{(2+x^2)^2} & \text{für} \quad x < 0 \\ -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{für} \quad 0 < x < 1 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -4\dfrac{2-3x^2}{(2+x^2)^3} & \text{für} \quad x < 0 \\ -\dfrac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} & \text{für} \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

a) Untersuchung auf Stetigkeit:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{2+x^2} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{1-x^2} = 1$$

Somit ist die Funktion an der Nahtstelle $x_0 = 0$ stetig. (Kein Sprung bei $A(0/1)$)

Untersuchung auf Differenzierbarkeit:

$$\lim_{x\to 0^-} -4\frac{x}{(2+x^2)^2} = 0$$
$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Somit ist die Funktion an der Nahtstelle $x_0 = 0$ differenzierbar. (Kein Knick bei $A(0/1)$, gemeinsame Tangentensteigung 0, also waagrechte Tangente)

b) Berechnung der Steigung der Tangente im Punkt $P(1/0)$:

$m = \lim\limits_{x\to 1^-} -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \to -\infty$, also senkrechte Tangente (Parallele zur y-Achse durch P)

Die Gleichung der Tangente lautet also: $x = 1$

c) Die notwendige Bedingung für einen Wendepunkt ist $f''(x) = 0$, auf die hinreichende Bedingung darf laut Aufgabenstellung verzichtet werden, d.h. man spart sich die 3. Ableitung. Nur die erste Teilfunktion hat Nullstellen der 2. Ableitung:

$-4\dfrac{2-3x^2}{(2+x^2)^3} = 0$ für $x < 0$

$\Leftrightarrow 2 - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow (x_1 = \sqrt{\dfrac{2}{3}})$, da nicht im Definitionsbereich

$x_2 = -\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

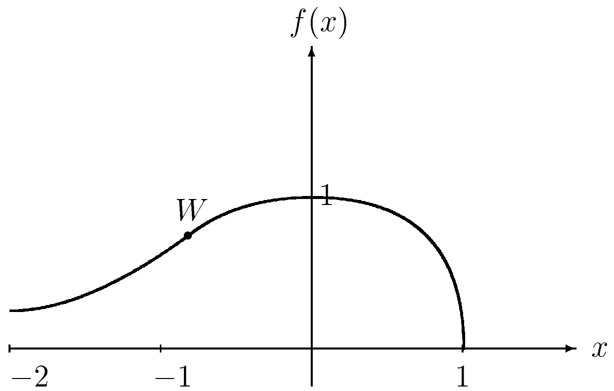
$f(x_2) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow W(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}/\dfrac{3}{4})$

d) Bestimmung des Grenzwertes für $x \to -\infty$:

$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{2+x^2} = 0$

Das bedeutet, daß die negative x-Achse waagrechte Asymptote ist.

e) Skizze:



1.2 Aufgaben zu zusammengesetzten Funktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \cos\dfrac{x}{2} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 3\pi \\[2ex] \dfrac{a}{(x-b)^2} & \text{für} \quad x > 3\pi \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, daß $f(x)$ mit $a = 16$ und $b = 3\pi - 4$ an der Stelle $x_0 = 3\pi$ stetig und differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten und den Typ aller Extrema der Funktion $f(x)$.

c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten (Rechts- oder Linkskurve) in der Umgebung der Nahtstelle $x_0 = 3\pi$.

d) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion $f(x)$.

e) Die Kurve von $f(x)$ schließt mit der x-Achse im Bereich $0 \leq x \leq u$ mit $u > 3\pi$ eine Fläche ein. Berechnen Sie den Flächeninhalt $A(u)$ dieser Fläche, sowie den Grenzwert $\lim\limits_{u\to\infty} A(u)$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^2} & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\[2ex] a \cdot e^{bx} & \text{für} \quad x > \sqrt{3} \end{cases}$$

a) Wie müssen a und b gewählt werden, daß $f(x)$ an der Stelle $x_0 = \sqrt{3}$ stetig und differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie für diese Werte a und b die Koordinaten und den Typ aller Extrema der Funktion $f(x)$.

c) Ermitteln Sie die Stammfunktion $F(x)$.

d) Berechnen Sie den Flächeninhalt A, den die Funktion $f(x)$ mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{12x}{3+x^2} & \text{für} \quad x \leq 3 \\[2ex] a \cdot e^{b(x-3)} & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

a) Wie müssen a und b gewählt werden, daß $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 3$ stetig und differenzierbar ist.

b) Bestimmen Sie für diese Werte a und b die Nullstellen und die Koordinaten und den Typ aller Extrema der Funktion $f(x)$.

c) Skizzieren Sie das Schaubild von $f(x)$.

d) Es sei nun $a = 3$ und $b \in \Re$. Für welche Werte von b schließen die Funktionskurve und die x-Achse für $x \geq 0$ eine endliche Fläche ein? Berechnen Sie in diesen Fällen den Flächeninhalt $A(b)$.

2 Betragsfunktionen

Bei einer Betragsfunktion $f(x)$ besteht zumindest ein Teil der Funktion aus einem Betrag. Das, was in den Betragsstrichen steht nennt man **Argument** $\arg(x)$. Man kann diese Funktion folgendermaßen in Teilfunktionen aufsplitten:

Ist $\arg(x) \geq 0$ (dies ist der Definitionsbereich dieser Teilfunktion), so ersetzt man die Betragsstriche in $f(x)$ durch eine **Plusklammer**.

Ist $\arg(x) < 0$ (dies ist der Definitionsbereich dieser Teilfunktion), so ersetzt man die Betragsstriche in $f(x)$ durch eine **Minusklammer**.

Die restliche Funktionsuntersuchung ist dieselbe wie bei zusammengesetzten Funktionen.

2.1 Musteraufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{-|x|}$

a) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ in betragsfreier Form und untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrieeigenschaften.

b) Untersuchen Sie $f(x)$ im Nullpunkt auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Wie verhält sich $f(x)$ für $x \to \pm\infty$?

c) Bestimmen Sie die Extremwerte von $f(x)$ und skizzieren Sie die Kurve.

d) Es sei für $u \geq 0$ ein Punkt $P(u/0)$ auf der x-Achse und $Q(u/f(u))$ der zugehörige Punkt auf der Funktionskurve. Wir betrachten nun das Dreieck OPQ, mit $O(0/0)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $A(u)$ des Dreiecks in Abhängigkeit von u. Für welchen Wert von u wird die Fläche maximal?

e) Berechnen Sie in Abhängigkeit von t den Wert des Integrals
$I(t) = \int\limits_0^t x \cdot e^{-|x|}\,dx$ mit $0 < t < \infty$
Bestimmen Sie daraus den Grenzwert $\lim\limits_{t\to\infty} I(t)$.

Lösung

a) $f(x) = xe^{-|x|} = \begin{cases} xe^{-x} & \text{für} \quad x \geq 0 \\ xe^{x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & \text{für} \quad x > 0 \\ (1+x)e^{x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} (x-2)e^{-x} & \text{für} \quad x > 0 \\ (x+2)e^{x} & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}$$

Symmetrie:
$f(-x) = (-x)e^{-|-x|} = -xe^{-|x|} = -f(x)$
Punktsymmetrie zum Ursprung

b) Untersuchung auf Stetigkeit im Nullpunkt (Nahtstelle):
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{-x} = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} xe^{x} = 0$
Die Funktion $f(x)$ ist an der Nahtstelle stetig

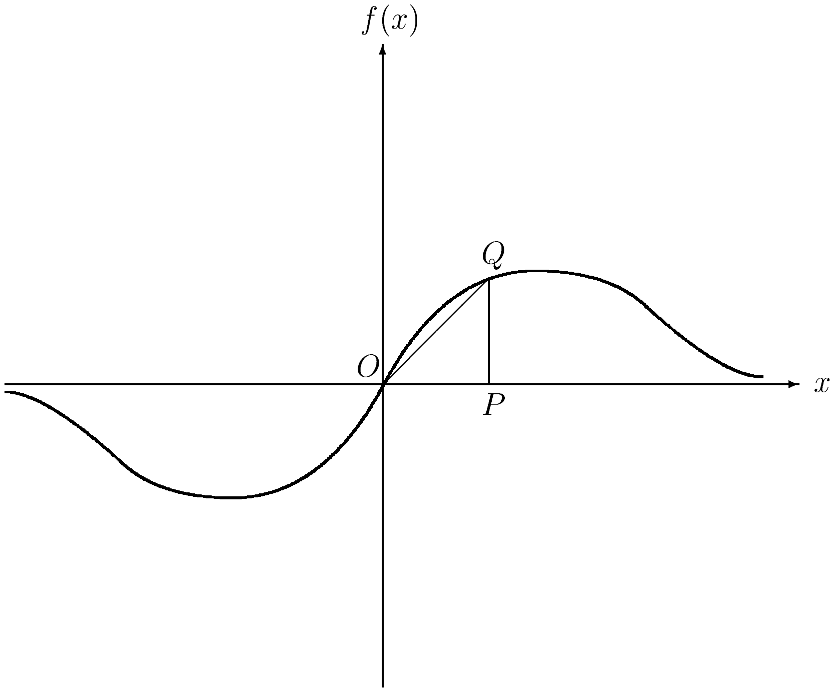
Untersuchung auf Differenzierbarkeit im Nullpunkt (Nahtstelle):
$\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)e^{-x} = 1$
$\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} (1+x)e^{x} = 1$
Die Funktion $f(x)$ ist an der Nahtstelle differenzierbar

Verhalten für $x \to \pm\infty$
$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x} = 0^+$
$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} xe^{x} = 0^-$

c) Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung reicht es, die Funktion $f(x)$ im Bereich $x > 0$ zu untersuchen.

Extrema: $f'(x) = 0$
$(1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = 1$
$f''(x_1) = f''(1) = -\frac{1}{e} < 0$
$f(x_1) = f(1) = \frac{1}{e}$
$\Rightarrow H(1/\frac{1}{e})$, aus Symmetriegründen folgt $T(-1/-\frac{1}{e})$

Skizze:



d) Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt:

$A(u) = \frac{1}{2}uf(u) = \frac{1}{2}u^2e^{-u}$ mit $u \geq 0$
$A'(u) = \frac{1}{2}e^{-u}(2-u)u$
$A'(u) = \frac{1}{2}e^{-u}(u^2 - 4u + 2)$

Die notwendige Bedingung für ein Extremum: $A'(u) = 0$
$\frac{1}{2}e^{-u}(2-u)u = 0$
$u_1 = 0,\ u_2 = 2$

Hinreichende Bedingung:
$A''(u_1) = A''(0) = \frac{1}{e^2} > 0$ relatives Minimum, (macht keinen Sinn, da Maximum gesucht ist)
$A''(u_2) = A''(2) = -\frac{1}{e^2} < 0$ relatives Maximum

Untersuchung der Ränder:
$\lim\limits_{x \to 0^+} A(u) = 0$
$\lim\limits_{x \to +\infty} A(u) = 0$

Hieraus folgt für $u_2 = 2$ ein absolutes Maximum

e) Berechnung des Integrals:

$I(t) = \int\limits_0^t x \cdot e^{-|x|}\,dx$ mit $0 < t < \infty$, da $t > 0$ vereinfacht sich das Integral zu:

$I(t) = \int\limits_0^t x \cdot e^{-x}\,dx$

Mit Hilfe der Produktintegration wählen wir $g(x) = x$ und $f'(x) = e^{-x}$

$$I(t) = \int\limits_0^t x \cdot e^{-x}\,dx = [-xe^{-x}]_0^t - \int\limits_0^t (-e^{-x})\,dx = [-xe^{-x}]_0^t - [e^{-x}]_0^t = 1 - (1+t)e^{-t}$$

Der Wert des Integrals ist somit:
$I(t) = 1 - (1+t)e^{-t}$

Der Grenzwert für $t \to +\infty$ ergibt
$\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = 1$

2.2 Aufgaben zu Betragsfunktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$

a) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ in betragsfreier Form und bestimmen Sie den Definitionsbereich.

b) Untersuchen Sie $f(x)$ im Punkt $P(1/f(1))$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Bestimmen Sie Nullstellen, Asymptoten sowie Extrema (Lage und Art) der Funktion $f(x)$.

c) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x)$ für $0 < x < 1$ streng monoton fallend ist und für $x > 1$ einen Wendepunkt besitzt. Geben Sie seine Koordinaten an.

d) Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = |x-2| \cdot e^x$

a) Schreiben Sie die Funktion $f(x)$ in betragsfreier Form.

b) Bestimmen Sie Nullstellen, Asymptoten und Extremwerte der Funktion.

c) Zeigen Sie, daß die Funktionskurve einen Wendepunkt besitzt. Ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts und geben Sie die Gleichung der Wendetangente an.

d) Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist. Geben Sie die Steigungen der Links- und Rechtstangenten im Punkt $P(2/f(2))$ an.

e) Skizzieren Sie das Schaubikld der Funktion $f(x)$

f) Die Funktionskurve von $f(x)$ schließt für $x \leq 2$ mit der x-Achse eine endliche Fläche A_1 ein. Berechnen Sie A_1.
Für $2 \leq x \leq a$ begrenzen die Funktionskurve von $f(x)$, die x-Achse und die Gerade $x = a$ ein Flächenstück mit dem Inhalt A_2. Bestimmen Sie a so, daß die beiden Flächen A_1 und A_2 gleich groß sind.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \cdot e^{-|x|}$

a) Stellen Sie die Funktion $f(x)$ in betragsfreier Form dar.

b) Untersuchen Sie $f(x)$ auf Symmetrie. Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Untersuchen Sie die Funktion $f(x)$ und $f'(x)$ auf Stetigkeit an der Stelle $x_0 = 0$.

d) Bestimmen Sie die x-Koordinaten sämtlicher Extrema und Wendepunkte von $f(x)$.

e) Skizzieren Sie den Verlauf der Kurve von $f(x)$.

f) Das Schaubilder der Funktion $f(x)$, die positive x-Achse begrenzen im Intervall $[0;\, b]$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(b)$. Berechnen Sie $A(b)$. Was ergibt sich für $b \to +\infty$?

Zur Berechnung der Stammfunktion dürfen nur die folgende Rekursionsformel

$\int x^n \cdot e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot e^{ax}\, dx$

sowie die Grundintegrale von $\int x^n\, dx$ und $\int e^{ax}\, dx$ benutzt werden.

3 Wurzelfunktionen

Anders als bei gebrochenrationalen Funktionen, deren Definitionsbereich alle reellen Zahlen bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen umfaßt, kann es bei Wurzelfunktionen ganze Intervalle der x-Achse geben, für welche der Funktionsterm nicht definiert ist. Ein weiterer Unterschied betrifft die Differenzierbarkeit. Während eine rationale Funktion an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches differenzierbar ist, kann eine Wurzelfunktion am Rand ihres Definitionsintervalls zwar noch definiert, muß aber nicht differenzierbar sein (nur linksseitige bzw. rechtsseitige Ableitung existiert und es gibt möglicherweise senkrechte Tangenten). Das Verhalten einer Wurzelfunktion am Rand ihres Definitionsbereichs erfordert meist eine gesonderte Untersuchung. Ist der Definitionsbereich unbeschränkt, so kann das Schaubild waagrechte oder schiefe Asymptoten besitzen. Deren Ermittlung ist jedoch nicht mehr in ebenso einfacher Weise (z. B. nicht mehr durch Polynomdivision) möglich wie bei gebrochenrationalen Funktionen.

Bemerkung: Die Wurzelfunktionen bilden keine in gleicher Weise übersichtliche Funktionenfamilie wie z. B. die gebrochenrationalen Funktionen.

3.1 Musteraufgabe

Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = \dfrac{x-a}{\sqrt{16-x^2}}$ für $a \geq 0$

a) Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich von $f_a(x)$. Für welche Werte des Parameters a besitzt $f_a(x)$ Nullstellen?

b) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion am Rand des Definitionsbereiches.
Hinweis: Fallunterscheidung $0 \leq a < 4$, $a = 4$, $a > 4$

c) Nun sei $a = 0$ und man erhält die Funktion $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}$
Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich der Funktion $g(x)$ und untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $g(x)$ am Rand des Definitionsbereichs.

d) Untersuchen Sie die Funktion $g(x)$ auf Symmetrie, Achsenschnittpunkte, Extremwerte und Wendepunkte (auf die hinreichende Bedingung eines Wendepunktes wird verzichtet).

e) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion $g(x)$.

Lösung

a) Definitionsbereich:
Der Radikand $r(x) = 16 - x^2$ steht im Nenner und unter der Wurzel, also gilt für den Definitionsbereich:
$r(x) > 0$
$16 - x^2 > 0$ oder $x^2 < 16 \Rightarrow -4 < x < 4$ oder $|x| < 4$

Nullstellen: $f_a(x) = 0$ mit $a \geq 0$
$x - a = 0 \Rightarrow x_1 = a$ mit $a \geq 0$
Da der Definitionsbereich $-4 < x < 4$ ist gilt für die möglichen Nullstellen:
$-4 < a < 4$ mit $a \geq 0 \Rightarrow 0 \leq a < 4$

b) Die Ränder sind $x \to -4^+$ und $x \to 4^-$

1. Fall: $0 \leq a < 4$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{\overbrace{x-a}^{>0}}{\sqrt{16-x^2}} \to +\infty \text{ und } \lim_{x \to -4^+} \frac{\overbrace{x-a}^{<0}}{\sqrt{16-x^2}} \to -\infty$$

2. Fall: $a = 4$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{x-4}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{x \to 4^-} -\sqrt{\frac{4-x}{4+x}} = 0 \text{ und } \lim_{x \to -4^+} \frac{\overbrace{x-4}^{<0}}{\sqrt{16-x^2}} \to -\infty$$

3. Fall: $a > 4$

$$\lim_{x \to 4^-} \frac{\overbrace{x-a}^{<0}}{\sqrt{16-x^2}} \to -\infty \text{ und } \lim_{x \to -4^+} \frac{\overbrace{x-a}^{<0}}{\sqrt{16-x^2}} \to -\infty$$

c) Man erhält $g(x)$ für $a = 0$, also es existieren Nullstellen vgl. a) und für die Ränder gilt der 1. Fall aus b).
Die Ableitungen sind:

$$g'(x) = \frac{16}{\sqrt{(16 - x^2)^3}}$$
$$g''(x) = \frac{48x}{\sqrt{(16 - x^2)^5}}$$

d) Symmetrie:

$$g(-x) = \frac{(-x)}{\sqrt{16 - (-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = -g(x)$$

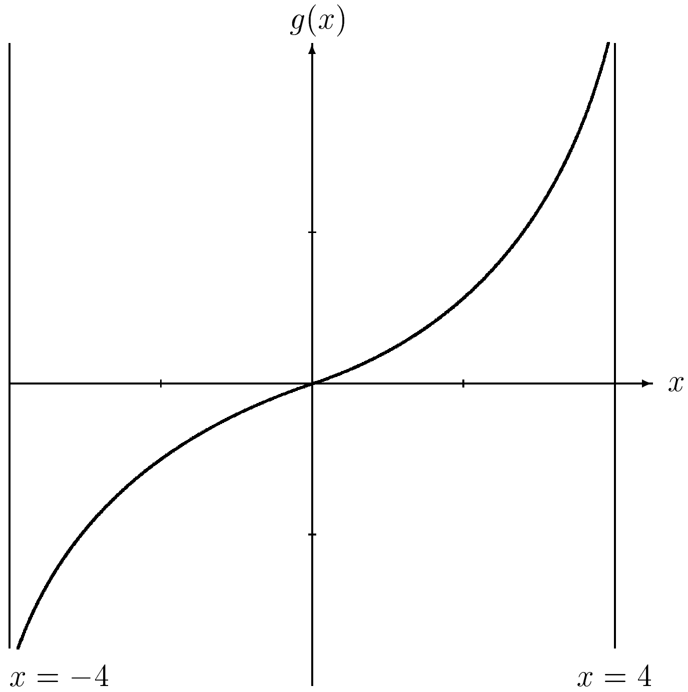
Punktsymmetrie zum Ursprung

Nullstellen: $g(x) = 0$
$x_1 = 0 \Rightarrow N(0/0)$
Die Steigung in der Nullstelle N ist $g'(0) = \frac{1}{4}$

Extrema: $g'(x) = 0$
keine Lösung und somit keine Extrema

Wendepunkte: $g''(x) = 0$
$x_2 = 0 \Rightarrow W(0/0)$

e) Skizze:



3.2 Aufgaben zu Wurzelfunktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist eine Funktion $f(x) = \dfrac{4x}{\sqrt{1+x^2}}$ mit $x \in \Re$

a) Bestimmen Sie die Symmetrie der Funktion $f(x)$ und ihre Asymptoten. Bestimmen Sie den Wendepunkt (auf die hinreichende Bedingung wird verzichtet).

b) Zeigen Sie, daß $f(x)$ im gesamten Definitionsbereich streng monoton steigend ist und berechnen Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}(x)$.

c) Skizzieren Sie $f(x)$ für $-4 \leq x \leq 4$ und $\bar{f}(x)$ für $x \geq 0$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

d) Die Funktionen $f(x)$ und $\bar{f}(x)$ umschließen im 1. Quadranten einen Flächeninhalt. Berechnen Sie seinen Inhalt.

4 Gebrochenrationale Funktionen

Eine gebrochenrationale Funktion ist der Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen P und Q. Man schreibt sie wie folgt:
$f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Man nennt $P(x)$ das Zählerpolynom und $Q(x)$ das Nennerpolynom. Diese lassen sich wie folgt darstellen:
$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, mit $a_n \neq 0$, $a_i \in R$, mit $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ und $n \in N^0$
$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$, mit $b_m \neq 0$, $b_i \in R$, mit $(i = 0, 1, 2, \ldots, m)$ und $m \in N^0$

Hierbei bezeichnet man mit n den Zählergrad und mit m den Nennergrad. a_n und b_m heißen Gradfaktoren des Zählers bzw. Nenners.
Ist $n < m$, so spricht man von einer echt gebrochenrationalen Funktion und ist $n \geq m$ so spricht man von einer unecht gebrochenrationalen Funktion.

i) Definitionsbereich

Die Funktion f ist für alle $x \in R$ ohne $Q(x) = 0$ definiert.
In Worten: Alle Werte außer den Nennernullstellen sind zugelassen

ii) Symmetrie

Wir untersuchen auf Symmetrieeigenschaften einer gebrochenrationalen Funktion, in dem wir separat Zähler- und Nennerpolynom auf deren Symmetrieeigenschaften untersuchen und dann Rückschlüsse ziehen.

- Sind jeweils beide Polynome - sowohl Zählerpolynom als auch Nennerpolynom - gerade oder beide ungerade, so ist die gebrochenrationale Funktion gerade. Man kann daher ganz leicht zeigen:
  $f(-x) = f(x)$. Achsensymmetrie bezglich der y-Achse
- Sind die beiden Polynome verschieden - also das eine gerade und das andere ungerade - bzw. umgekehrt, so ist die gebrochenrationale Funktion ungerade. Man kann daher ganz leicht zeigen:
  $f(-x) = -f(x)$. Punktsymmetrie zum Ursprung
- Ist mindestens eines der beiden Polynome weder gerade noch ungerade, dann ist keine der beiden Symmetrien vorhanden.

iii) Asymptoten

Bei Asymptoten untersucht man das Verhalten der Funktion für große Werte von x, also was passiert mit den Funktionswerten $f(x)$ für $|x| \to \infty$ oder in der mathematischeren Form:
$\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x)$

- Zählergrad kleiner Nennergrad, also $n < m$, es handelt sich also um eine echt gebrochenrationale Funktion.
  Somit ist $y = 0$, also die x-Achse waagrechte Asymptote,
  weil $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$

- Zählergrad gleich Nennergrad, also $n = m$, es handelt sich also um eine unecht gebrochenrationale Funktion.
  Somit ist $y = \frac{a_n}{b_m}$, also eine Parallele zur x-Achse waagrechte Asymptote,
  weil $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$
- Zählergrad größer Nennergrad, also $n > m$, es handelt sich also um eine unecht gebrochenrationale Funktion.
  Somit ist eine Polynomdivision erforderlich.
  Man erhält dadurch eine ganzrationale Funktion G und eine echt gebrochenrationale Restfunktion R. Die Polynomdivision liefert also:
  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = G(x) + R(x)$, mit $\lim\limits_{|x|\to\infty} R(x) = \lim\limits_{|x|\to\infty} (f(x) - G(x)) = 0$,
  weil $R(x)$ eine echt gebrochenrationale Funktion ist.
  $G(x)$ ist somit schiefe, ganzrationale Asymptotenkurve vom Grad $(n - m)$.

iv) Hebbare Stetigkeitslücken und Pole

In Frage kommen nur die Definitionslücken, also die Nennernullstellen, also $Q(x) = 0$.
Man bringt Zähler- und Nennerpolynom in Nullstellenform und kürzt soweit wie möglich.
Die gekürzte Darstellung einer gebrochenrationalen Funktion bezeichnen wir nun mit:
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit $Q(x) \neq 0$

- Hebbare Stetigkeitslücken
  Diese liegen an denjenigen Stellen, wo sich eine Nennernullstelle vollständig herausgekürzt hat. Das Schaubild hat an diesen Stellen nur eine Lücke - deshalb hebbar. (Man kann sie nachdefinieren - stetig fortsetzen)
- Pole (Unendlichkeitssprungstellen)
  Diese liegen an den übrigbleibenden Nennernullstellen der gekürzten"Darstellung.
  Ist die Nennernullstelle von ungeradzahliger Ordnung, so hat das Schaubild dort einen Pol mit Vorzeichenwechsel. (Pol mit VZW)
  Ist die Nennernullstelle von geradzahliger Ordnung, so hat das Schaubild dort einen Pol ohne Vorzeichenwechsel. (Pol ohne VZW)

v) Nullstellen

Nullstellen der gekürzten gebrochenrationalen Funktion sind gleich den Nullstellen des übrigbleibenden Zählerpolynoms.
$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0$ vereinfacht sich zu:
$p(x) = 0$

4.1 Musteraufgabe

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = \dfrac{x^2}{x^2+a}$ mit $a \neq 0$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a (Fallunterscheidung $a > 0$ und $a < 0$)
Nullstellen und Symmetrie,
Asymptoten und Polstellen,
Extremwerte und deren Typ,
Koordinaten von Wendepunkten (ohne hinreichende Bedingung).

b) Skizzieren Sie mit Hilfe von a) die Funktionskurven für $a = 1$ und $a = -1$ in ein gemeinsames Koordinatensystem. (Einheiten jeweils 2 cm)

c) Im folgenden sei $a = 1$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $A(u)$ des Dreiecks mit den Eckpunkten $A(-u/f_1(-u))$, $B(u/f_1(u))$, $C(0/1)$.
Zwischenergebnis: $A(u) = \dfrac{u}{u^2+1}$
Für welchen Wert von $u > 0$ wird dieser Flächeninhalt maximal und wie groß ist dieser maximale Flächeninhalt?

d) Im folgenden sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Gleichung der Wendepunktstangenten in Abhängigkeit von a. Zeigen Sie, daß sich die Wendepunktstangenten aller Scharkurven in einem gemeinsamen Punkt auf der y-Achse schneiden. Wie lauten die Koordinaten dieses Schnittpunkts S?

Lösung
Die Ableitungen sind:

$$f_a'(x) = 2a\frac{x}{(x^2+a)^2}$$

$$f_a''(x) = -2a\frac{3x^2-a}{(x^2+a)^3}$$

a) Nullstellen: $f_a(x) = 0$
$x^2 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0$ Doppelnullstelle (Extremum) bei $N_{1,2}(0/0)$ unabhängig von a

Symmetrie:

$$f_a(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2+a} = \frac{x^2}{x^2+a} = f_a(x)$$

Achsensymmetrie zur y-Achse, unabhängig von a

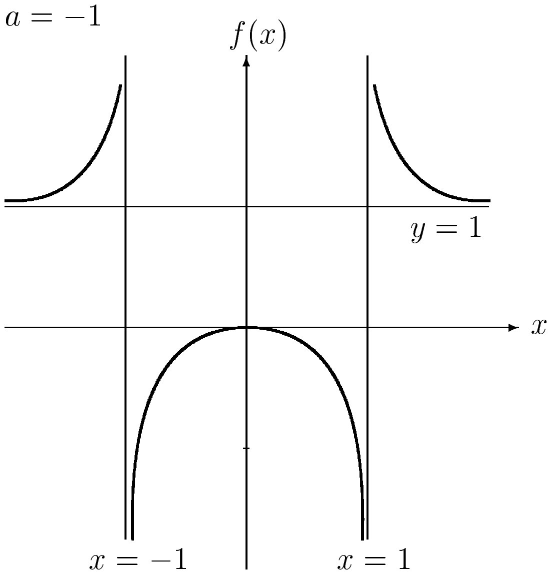
Asymptoten:
Nach Polynomdivision erhält man: $f_a(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2+a}$
Waagrechte Asymptote bei $y = 1$ unabhängig von a

Polstellen: Nennernullstellen
$x^2 + a = 0$
Für $a > 0$ keine Lösungen, also keine Pole
Für $a < 0$ folgt $x_{3,4} = \pm\sqrt{-a}$ Zwei Polstellen mit Vorzeichenwechsel

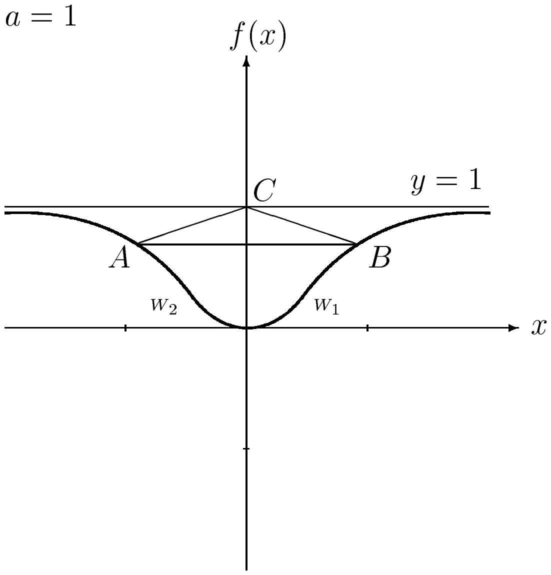
Extrema: $f_a'(x) = 0$
$x_5 = 0$
$f_a''(x_5) = f_a''(0) = \dfrac{2}{a}$
Für $a > 0$ folgt ein Tiefpunkt $T(0/0)$
Für $a < 0$ folgt ein Hochpunkt $H(0/0)$

Wendepunkte: $f_a''(x) = 0$
$3x^2 - a = 0$
$x^2 = \dfrac{a}{3}$
Für $a > 0$
$x_{6,7} = \pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}$ hinreichende Bedingung (3. Ableitung) nicht verlangt.
$f_a(x_{6,7}) = f_a(\pm\sqrt{\dfrac{a}{3}}) = \dfrac{1}{4}$
folgen zwei Wendepunkte $W_{1,2}(\pm\sqrt{\frac{a}{3}}/\frac{1}{4})$
Für $a < 0$ keine Lösungen, also keine Wendepunkte

b) Skizzen:
$a = -1$



$a = 1$



c) Für den Flächeninhalt des Dreiecks gilt:

$$A(u) = \frac{1}{2}2u(1 - f_1(u)) = u - \frac{u^3}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1} \text{ mit } u > 0$$

Von dieser Flächeninhaltsfunktion sucht man das absolute Maximum

$$A'(u) = -\frac{u^2-1}{(u^2+1)^2}$$

$$A''(u) = 2\frac{u(u^2-3)}{(u^2+1)^3}$$

Notwendige Bedingung: $A'(u) = 0$

$u^2 - 1 = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \pm 1$

Laut Definitionsmenge kommt nur $u_1 = 1$ in Frage

Hinreichende Bedingung:

$A''(u_1) = A''(1) = -\frac{1}{2} < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum

$A(u_1) = A(1) = \frac{1}{2}$

Untersuchung der Definitionsränder: $u \in]0; +\infty[$

$\lim\limits_{u \to 0^-} A(u) = 0$

$\lim\limits_{u \to +\infty} A(u) = 0$

Es handelt sich hierbei um ein absolutes Maximum für $u_1 = 1$ und der maximale Flächeninhalt ist

$A_{\max} = A(1) = \frac{1}{2}$

d) Die Funktionenschar ist achsensymmetrisch zur y-Achse, deshalb reicht es die Wendetangente im 1. Quadranten zu berechnen:

$W_1(\sqrt{\frac{a}{3}}/\frac{1}{4})$

Die Steigung der Wendetangente erhält man mit der 1. Ableitung:

$m = f_a'(\sqrt{\frac{a}{3}}) = \frac{9}{8a}\sqrt{\frac{a}{3}}$

Mit der Punkt-Steigungsform erhält man die Gleichung der Wendetangente:

$$\frac{y - \frac{1}{4}}{x - \sqrt{\frac{a}{3}}} = \frac{9}{8a}\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Dies nach y aufgelöst ergibt die Tangentengleichung:

$$\Rightarrow y = \frac{9}{8a}\sqrt{\frac{a}{3}} \cdot x - \frac{1}{8}$$

Man sieht hier leicht, daß der y-Achsenabschnitt unabhängig von a ist und somit gehen alle Wendetangenten durch den Punkt $S(0/-\frac{1}{8})$

4.2 Aufgaben zu gebrochenrationalen Funktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x^2}{x^2 + 2x - 3}$

a) Welche Asymptoten besitzt das Schaubild?

b) Zeigen Sie, daß sich das Schaubild der Funktion $f(x)$ und die Gerade $y = x+3$ schneiden. Bestimmen Sie den Schnittpunkt.

c) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funkton $f(x)$.

d) Skizzieren Sie das Schaubild von $f(x)$.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Kurvenschar $f_a(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + a}$ mit $a \neq 0$

a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Parameter a den Definitionsbereich, Asymptoten, Symmetrie, Achsenschnittpunkte und Extremwerte der Funktionenschar.

b) Es sei $a = 3$
Geben Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a) die Asymptoten und Extremwerte der Funktion $f_3(x)$ an und skizzieren Sie die Kurve für $-5 \leq x \leq 5$.

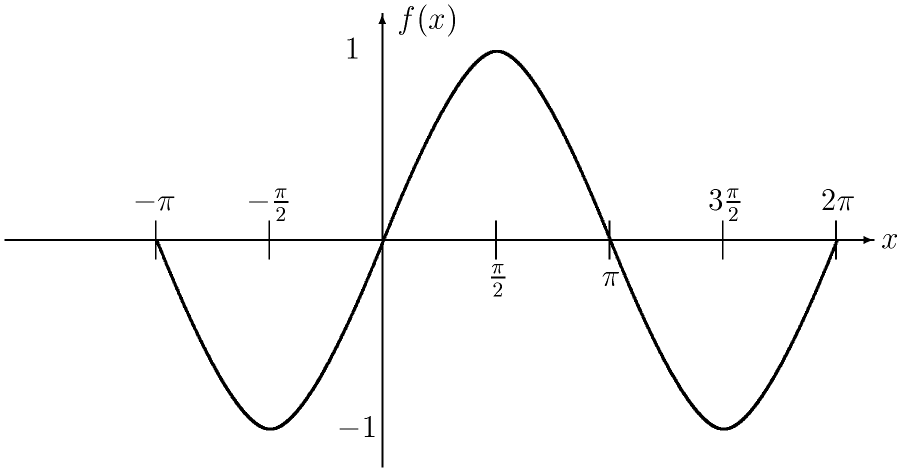
c) Es sei $a = -3$
Geben Sie mit Hilfe der Ergebnisse aus a) die Asymptoten (falls vorhanden), Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $f_{-3}(x)$ an und skizzieren Sie die Kurve für $-5 \leq x \leq 5$.

d) Es sei $u > 0$. Die Funktionskurve $f_{-3}(x)$ und die Geraden $y = x$ und $x = u$ schließen im 1. Quadranten eine endliche Fläche $A(u)$ ein. Berechnen Sie $A(u)$. Für welchen Wert von u wird $A(u) = 3 \cdot \ln 3$?

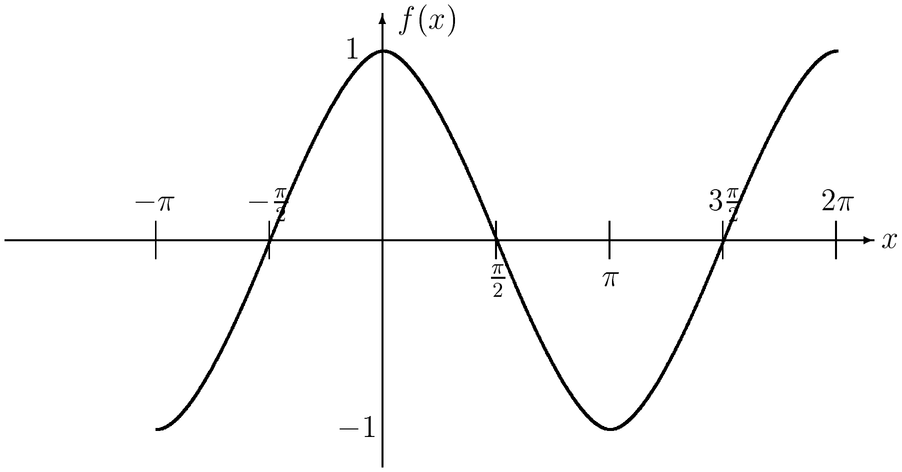
5 Trigonometrische Funktionen

5.1 Die trigonometrischen Standard-Funktionen

- Die Standard-Sinus-Funktion $f(x) = \sin x$ hat die Periode 2π, geht durch den Punkt $O(0/0)$ und fängt von dort an nach oben zu schwingen.



- Die Standard-Cosinus-Funktion $f(x) = \cos x$ hat die Periode 2π, geht durch den Punkt $O(0/1)$ und fängt von dort an nach unten zu schwingen.



5.2 Symmetrie der trigonometrischen Standard-Funktionen

- Die Standard-Sinus-Funktion $f(x) = \sin x$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
  Es gilt also:
  $\sin(-x) = -\sin x$ ferner gilt auch $\sin(-bx) = -\sin(bx)$

- Die Standard-Cosinus-Funktion $f(x) = \cos x$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.
  Es gilt also:
  $\cos(-x) = \cos x$ ferner gilt auch $\cos(-bx) = \cos(bx)$

5.3 Kompliziertere trigonometrische Funktionen

Die folgenden trigonometrischen Funktionen in Norm-Darstellung ($b > 0$)
$f(x) = a\sin[b(x+c)] + d$
und
$f(x) = a\cos[b(x+c)] + d$ sind für alle $x \in R$ definiert.

Die Parameter $|a|$, $b > 0$, c, d haben folgende Bedeutungen:

$\lvert a \rvert$	**Amplitude** der Funktion $a > 0$: Erhalten der Richtung der Standard-Funktion $a < 0$: Zusätzliche Spiegelung der Standard-Funktion an der x-Achse Streckung/Stauchung in y-Richtung
$p = \frac{2\pi}{b}$	**Periode** der Funktion ($f(x+p) = f(x)$) Streckung/Stauchung in x-Richtung
c	**Verschiebung in x-Richtung** Ist $c > 0$: Verschiebung nach links ('Plus' im Argument) Ist $c < 0$: Verschiebung nach rechts ('Minus' im Argument)
d	**Verschiebung in y-Richtung** Ist $d > 0$: Verschiebung nach oben Ist $d < 0$: Verschiebung nach unten

Anmerkung
Ist eine trigonometrische Funktion nicht in Norm-Darstellung ($b < 0$) gegeben, so ist diese in Norm-Darstellung ($b > 0$) zu bringen. Dies geschieht durch Ausklammern des Faktors b im Argument und Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften der jeweiligen Standard-Funktion. Hat man die Norm-Darstellung erreicht, so beschreiben die Parameter, wie diese Funktion aus der jeweiligen Standard-Funktion entsteht.

Zwei rechnerische Beispiele, wie man trigonometrische Funktionen in Norm-Darstellung bringt:

- $f(x) = -2\sin(-2x+\pi) + 3$
  Ausklammern des Faktors b

  $f(x) = -2\sin\left[-2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 3$
  Ausnutzung der Symmetrie der Sinus-Funktion

  $f(x) = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] + 3 \qquad \Rightarrow a = +2,\ p = \pi,\ c = -\frac{\pi}{2},\ d = +3$

- $f(x) = -3\cos(-4x-\pi) - 2$
  Ausklammern des Faktors b

  $f(x) = -3\cos\left[-4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 2$
  Ausnutzung der Symmetrie der Cosinus-Funktion

  $f(x) = -3\cos\left[4\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right] - 2 \qquad \Rightarrow a = -3,\ p = \frac{\pi}{2},\ c = +\frac{\pi}{4},\ d = -2$

5.4 Nullstellen trigonometrischer Funktionen

$\sin x = 0$

$x_k = k\pi$, mit $k \in Z$

$a\sin(bx+c) = 0$

$x_k = -\frac{c}{b} + k\frac{\pi}{b}$, mit $k \in Z$

Ferner gilt für $k \in Z$:

$\sin(k\pi) = 0$

$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-(-1)^k)(-1)^{\frac{k-1}{2}}$

$\cos x = 0$

$x_k = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, mit $k \in Z$

$a\cos(bx+c) = 0$

$x_k = -\frac{c}{b} + (2k+1)\frac{\pi}{2b}$, mit $k \in Z$

Ferner gilt für $k \in Z$:

$\cos(k\pi) = (-1)^k$

$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-(-1)^{k+1})(-1)^{\frac{k}{2}}$

5.5 Einfache trigonometrische Gleichungen

Im Folgenden sei $-1 \leq e \leq 1$ mit $e \in R$, sonst sind die Gleichungen unlösbar.

$\sin x = e$

Taschenrechner liefert $x_1 = \arcsin e$

$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$

$x_{1k} = x_1 + 2k\pi$

$x_{2k} = \pi - x_1 + 2k\pi = -x_1 + (2k+1)\pi$

jeweils mit $k \in Z$

$\cos x = e$

Taschenrechner liefert $x_1 = \arccos e$

$0 \leq x_1 \leq \pi$

$x_{1k} = x_1 + 2k\pi$

$x_{2k} = 2\pi - x_1 + 2k\pi = -x_1 + (2k+2)\pi$

jeweils mit $k \in Z$

5.6 Kompliziertere trigonometrische Gleichungen

Im Folgenden sei $-1 \leq e \leq 1$ mit $e \in R$, sonst sind die Gleichungen unlösbar.

$\sin(bx+c) = e$

Substitution $z = bx + c$ liefert:

$\sin z = e$

Taschenrechner liefert $z_1 = \arcsin e$

$-\frac{\pi}{2} \leq z_1 \leq \frac{\pi}{2}$

$z_{1k} = z_1 + 2k\pi$

$z_{2k} = \pi - z_1 + 2k\pi = -z_1 + (2k+1)\pi$

Rücksubstitution liefert:

$bx_{1k} + c = z_{1k}$

$x_{1k} = \frac{z_1 - c}{b} + 2k\frac{\pi}{b}$

$bx_{2k} + c = z_{2k}$

$x_{2k} = \frac{-z_1 - c}{b} + (2k+1)\frac{\pi}{b}$

jeweils mit $k \in Z$

$\cos(bx+c) = e$

Substitution $z = bx + c$ liefert:

$\cos z = e$

Taschenrechner liefert $z_1 = \arccos e$

$0 \leq z_1 \leq \pi$

$z_{1k} = z_1 + 2k\pi$

$z_{2k} = 2\pi - z_1 + 2k\pi = -z_1 + (2k+2)\pi$

Rücksubstitution liefert:

$bx_{1k} + c = z_{1k}$

$x_{1k} = \frac{z_1 - c}{b} + 2k\frac{\pi}{b}$

$bx_{2k} + c = z_{2k}$

$x_{2k} = \frac{-z_1 - c}{b} + (2k+2)\frac{\pi}{b}$

jeweils mit $k \in Z$

5.7 Der Zusammenhang zwischen Sinus- und Cosinus-Funktion

- **Darstellung einer Sinus-Funktion durch eine Cosinus-Funktion**
  Der Sinus ist ein um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschobener Cosinus
  Es gilt also:
  $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
- **Darstellung einer Cosinus-Funktion durch eine Sinus-Funktion**
  Der Cosinus ist ein um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobener Sinus
  Es gilt also:
  $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- **Weitere Zusammenhänge**

  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, mit $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, mit $k \in Z$
- **Additionstheoreme**
  - **Summe/Differenz von Winkeln der trigonometrischen Standard-Funktionen**

    $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

    $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

    $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
  - **Doppelter Winkel der trigonometrischen Standard-Funktionen**

    $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$

    $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$

    $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
  - **Halber Winkel der trigonometrischen Standard-Funktionen**

    $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}$

    $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$

    $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

- **Summe/Differenz der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$
$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x-y)\cos\frac{1}{2}(x+y)$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)$$
$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$
$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

- **Produkt der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right]$$
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\sin(x-y) + \sin(x+y)\right]$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}\left[\cos(x-y) + \cos(x+y)\right]$$

- **Potenz der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}[1-\cos(2x)]$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}[1+\cos(2x)]$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{1+\cos(2x)}$$

5.8 Einige Werte der trigonometrischen Standard-Funktionen

- **Die gängigsten Winkel und die zugehörigen Werte der trigonometrischen Standard-Funktionen**

α in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

- **Kleine Merkregel für die Sinus-Werte**

α in Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
x in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}=0$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}=\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}=1$

Die Cosinus-Werte laufen gerade anders herum - die Tangens-Werte erhält man durch Division der Sinus-Werte durch die Cosinus-Werte.

- **Umrechnung von rad in Grad und umgekehrt**
  α ist ein Winkel in Grad
  x ist ein Winkel in rad

  Es gilt:
  $\frac{\alpha}{360°} = \frac{x}{2\pi}$ oder $\alpha = \frac{180°}{\pi}x$ oder $x = \frac{\pi}{180°}\alpha$

Zusammengesetzte Sinus- und Cosinus-Funktionen
Treten Sinus- und Cosinus-Funktionen additiv gemischt auf, so ist es meist geschickter (nicht immer) für die Rechnung der Gleichungen (nicht für die Ableitung) alles auf eine Winkelfunktion mit derselben Periode umzuschreiben. Hierzu benutzt man die Zusammenhänge zwischen Sinus und Cosinus, sowie die Zusammenhänge der einzelnen Winkelfunktionen mit deren vielfachen Perioden.

5.9 Musteraufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2\cos x + \cos 2x + 1$

a) Bestimmen Sie die Periode p dieser Funktion.

b) Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion im Intervall $0 \leq x \leq p$.

c) Bestimmen Sie die x-Koordinaten aller Punkte, die im Intervall $0 \leq x \leq p$ eine waagrechte Tangente besitzen.

d) Berechnen Sie das Integral $I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx$ für $a = \frac{\pi}{2}$.

Lösung

a) Bestimmung der einzelnen Perioden der Teilfunktionen $f_1(x) = 2\cos x$ und $f_2(x) = \cos 2x$
Die Periode p_1 der Teilfunktion $f_1(x)$ ist: $p_1 = 2\pi$
Die Periode p_2 der Teilfunktion $f_2(x)$ ist: $p_2 = \pi$

Die Gesamtperiode p ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von den einzelnen Perioden p_1 und p_2
$p = \text{kgV}(p_1;\, p_2) = \text{kgV}(2\pi;\, \pi) = 2\pi$

b) Mit dem Additionstheorem $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ folgt für die Funktion $f(x)$
$f(x) = 2\cos x + 2\cos^2 x = 2\cos x(1 + \cos x)$

Die Nullstellen berechnen sich: $f(x) = 0$
$2\cos x(1 + \cos x) = 0 \iff \cos x = 0$ oder $1 + \cos x = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$\cos x = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{3\pi}{2}$
$\cos x = -1 \Rightarrow x_3 = \pi$

c) Um die Punkte mit waagrechter Tangente zu bestimmen, benötigt man die Nullstellen der 1. Ableitung
$f'(x) = -2\sin x - 2\sin 2x$
Mit dem Additionstheorem $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ folgt für die Funktion $f'(x)$
$f'(x) = -2\sin x - 4\sin x\cos x = -2\sin x(1 + 2\cos x)$

Die Punkte mit waagrechter Tangente findet man mit: $f'(x) = 0$
$-2\sin x(1 + 2\cos x) = 0 \iff \sin x = 0$ oder $1 + 2\cos x = 0$ (Satz vom Nullprodukt)
$\sin x = 0 \Rightarrow x_4 = 0,\ x_5 = \pi,\ x_6 = 2\pi$
$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x_7 = \frac{2\pi}{3},\ x_8 = \frac{4\pi}{3}$

d) Die Stammfunktion $F(x)$ von der Funktion $f(x)$ erhält man durch Integration
$F(x) = 2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + x$

$\Rightarrow I = \int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = [2\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + x]_{-a}^{a}$

$I = 2(\sin a - \underbrace{\sin(-a)}_{=-\sin a}) + \frac{1}{2}(\sin 2a - \underbrace{\sin(-2a)}_{=-\sin 2a}) + a - (-a) = 2(2\sin a) + \frac{1}{2}(2\sin 2a) + 2a$

$I = 4\sin a + \sin 2a + 2a$
mit $a = \frac{\pi}{2}$ folgt
$I = 4\sin(\frac{\pi}{2}) + \sin(2\frac{\pi}{2}) + 2\frac{\pi}{2} = 4 + \pi$

5.10 Aufgaben zu trigonometrischen Funktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 1 + \cos(x)$

a) Bestimmen Sie für die Funktion $f(x)$ den Definitions- und Wertebereich, Symmetrieeigenschaften sowie Maxima und Minima im Intervall $[-2\pi;\ 2\pi]$.

b) Betrachtet wird nun die Funktion $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{1+\cos(x)}$

Bestimmen Sie
Definitions- und Wertemenge von $g(x)$,
Symmetrieeigenschaften,
1. und 2. Ableitung,
Extrema und Wendepunkte.
Skizzieren Sie die Funktion $g(x)$ im Intervall $[-2\pi;\ 2\pi]$.

c) Ermitteln Sie die Schnittpunkte der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.

d) Berechnen Sie die Fläche zwischen den Funktionskurven von $f(x)$ und $g(x)$ in folgendem Bereich $[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}]$.

Hinweis: $\int \frac{1}{1+\cos(x)}\, dx = \tan(\frac{x}{2})$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\sin(2x - \frac{\pi}{3})$

a) Bestimmen Sie Amplitude und Periode dieser Funktion.

b) Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse.

c) Wo liegt die kleinste positive Nullstelle?

d) Geben Sie alle Extremwerte im Intervall $[0;\ \pi]$ an.

e) Welche Steigung besitzt die Kurve für $x = \frac{\pi}{2}$?

f) Skizzieren Sie das Schaubild der Funktion $f(x)$.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$

a) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf der Funktion $f(x)$ im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ und geben Sie ohne Differentialrechnung die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte an.

b) Skizzieren Sie im Intervall $-\pi \leq x \leq 2\pi$ die Funktionskurve von
$g(x) = f(x) - 1$.
Welche kleinste positive Nullstelle hat $g(x)$?

c) Es sei $h(x) = g(x) + 2\sin x - \sin 2x$
Welche Periode p besitzt $h(x)$?
Zeigen Sie, daß sich $h(x)$ in der Form
$h(x) = 2 \cdot (1 - \sin x) \cdot \sin x$
darstellen läßt. (Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen)

d) Untersuchen Sie $h(x)$ im Intervall $0 \leq x \leq 2\pi$ auf Nullstellen und Extremstellen (keine Wendepunkte) und skizzieren Sie $h(x)$.

e) Die Funktionskurve von $h(x)$ und die x-Achse begrenzen im Bereich $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ein endliches Flächenstück A. Berechnen Sie den Flächeninhalt von A.

6 Exponentialfunktionen

Einfache Exponentialfunktionen sind Funktionen, die die unabhängige Variable x im Exponent stehen haben. Ihre Darstellung sieht wie folgt aus:
$f(x) = a \cdot b^x$
Man nennt a konstanten Faktor und b die Basis der Exponentialfunktion f.

i) Für $a > 0$
Ist $0 < b < 1$, so ist die zugehörige Exponentialfunktion streng monoton fallend,
ist $b > 1$, so ist sie streng monoton steigend.

ii) Für $a < 0$
Ist $0 < b < 1$, so ist die zugehörige Exponentialfunktion streng monoton steigend,
ist $b > 1$, so ist sie streng monoton fallend.

Potenzgesetze
$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$
$\frac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$
$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$
$b^{-n} = \frac{1}{b^n}$

Man kommt auch nicht um den Logarithmus herum. Wie löst man also folgende Exponentialgleichung?

$b^x = c \quad | \ln$ (das nennt man durchlogarithmieren)
$x \cdot \ln b = \ln c$
$x = \frac{\ln c}{\ln b}$

ln bedeutet Logarithmus naturalis, das ist der Logarithmus zur Basis e

Die oben genannten einfachen Exponentialfunktionen f liegen alle oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse, das hängt jeweils vom konstanten Faktor a ab:

i) f liegt oberhalb der x-Achse
$f(x) > 0$ für alle $x \in R$ und alle $a > 0$

ii) f liegt unterhalb der x-Achse
$f(x) < 0$ für alle $x \in R$ und alle $a < 0$

Setzt man $a = 1$ und $b = e$, so erhält man die einfachste aller Exponentialfunktionen nämlich die sogenannte e-Funktion. Die Zahl e nennt man Eulersche Zahl und man erhält sie, wie folgt:

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e \approx 2,71828\ldots$$

Wenngleich dies auf den ersten Blick doch recht kompliziert erscheint, so hat die Funktion

$f(x) = e^x$ doch einige Vorteile:
Ihre Ableitung geht nämlich in sich selbst über

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x$ usw.

Bei anderen, komplizierteren Exponentialfunktionen ist dies nicht mehr der Fall

$$f(x) = a \cdot b^x \qquad f'(x) = a(\ln b) \cdot b^x$$
$$f(x) = a \cdot b^{g(x)} \qquad f'(x) = a(\ln b) \cdot g'(x) \cdot b^{g(x)}$$

Diskussion der einfachsten Exponentialfunktion, der e-Funktion

i) Definitionsbereich
Die Funktion $f(x) = e^x$ ist für alle Werte von x definiert: $x \in R$

ii) Symmetrie
Es liegt keine der bekannten Symmetrien vor, die e-Funktion ist also weder achsensymmetrisch noch punktsymmetrisch.

iii) Asymptoten
Man unterscheidet folgende vier einfachste Typen von Funktionen:

- $f(x) = e^x$, wobei gilt:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $f(x) = -e^x$, wobei gilt:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \to -\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- $f(x) = e^{-x}$, wobei gilt:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to +\infty$
- $f(x) = -e^{-x}$, wobei gilt:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$

iv) Nullstellen
Die Funktion f besitzt keine Nullstellen.

6.1 Musteraufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4\,\dfrac{3-2e^{-x}}{3+2e^{-x}}$ für $x \in \Re$

a) Bestimmen Sie das Verhalten für $x \to \pm\infty$ und die Achsenschnittpunkte.

b) Für welches x ist $f(x) = 2$?

c) Zeigen Sie, daß $f(x)$ eine streng monotone Funktion im gesamten Definitionsbereich ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion $\bar{f}(x)$.

d) Skizzieren Sie das Schaubild von $f(x)$.

Lösung

a) Bestimmung der Grenzwerte für $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} 4\,\frac{3-2\overbrace{e^{-x}}^{\to 0}}{3+2\underbrace{e^{-x}}_{\to 0}} = 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} 4\,\frac{3-2e^{-x}}{3+2e^{-x}} = \lim_{x\to-\infty} 4\,\frac{e^{-x}(\overbrace{\frac{3}{e^{-x}}}^{\to 0}-2)}{e^{-x}(\underbrace{\frac{3}{e^{-x}}}_{\to 0}+2)} = \lim_{x\to-\infty} 4\,\frac{\overbrace{\frac{3}{e^{-x}}}^{\to 0}-2}{\underbrace{\frac{3}{e^{-x}}}_{\to 0}+2} = -4$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $x = 0$
$f(0) = \frac{4}{5} \Rightarrow S_y(0/\frac{4}{5})$

Schnittpunkt mit der x-Achse: $f(x) = 0$

$$4\,\frac{3-2e^{-x}}{3+2e^{-x}} = 0 \Longleftrightarrow 3-2e^{-x} = 0$$

$$e^{-x} = \frac{3}{2} \Longleftrightarrow e^{x} = \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 = \ln\frac{2}{3} \Rightarrow N(\ln\frac{2}{3}/0)$$

b) Folgende Gleichung soll gelten: $f(x) = 2$

$$4\,\frac{3-2e^{-x}}{3+2e^{-x}} = 2 \Longleftrightarrow 2\,\frac{3-2e^{-x}}{3+2e^{-x}} = 1$$

$$6-4e^{-x} = 3+2e^{-x} \Longleftrightarrow 6e^{-x} = 3$$

$$\frac{6}{e^{x}} = 3 \Longleftrightarrow e^{x} = 2$$

$$x_2 = \ln 2 \Rightarrow P(\ln 2/2)$$

c) Um zu zeigen, daß die Funktion $f(x)$ streng monoton ist benötigt man die 1. Ableitung:

$$f'(x) = 4\,\frac{2e^{-x}(3+2e^{-x}) + 2e^{-x}(3-2e^{-x})}{(3+2e^{-x})^2} = 8\,\frac{6e^{-x}}{(3+2e^{-x})^2} = 48\,\frac{e^{-x}}{(3+2e^{-x})^2}$$

$$f'(x) = \overbrace{48}^{>0}\,\frac{\overbrace{e^{-x}}^{>0}}{\underbrace{(3+2e^{-x})^2}_{>0}} > 0$$

Somit ist $f(x)$ streng monoton steigend und es existiert die Umkehrfunktion $\bar{f}(x)$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion vertauscht man in der Funktionsgleichung x mit y und löst diese nach y auf

$$y = 4\,\frac{3-2e^{-x}}{3+2e^{-x}}$$

Vertauschen von x und y

$x = 4\,\dfrac{3-2e^{-y}}{3+2e^{-y}}$ mit der Substitution $z = e^{-y}$ folgt $x = 4\,\dfrac{3-2z}{3+2z}$

Auflösen nach z

$$3x + 2xz = 12 - 8z \iff z(2x+8) = 12 - 3x$$

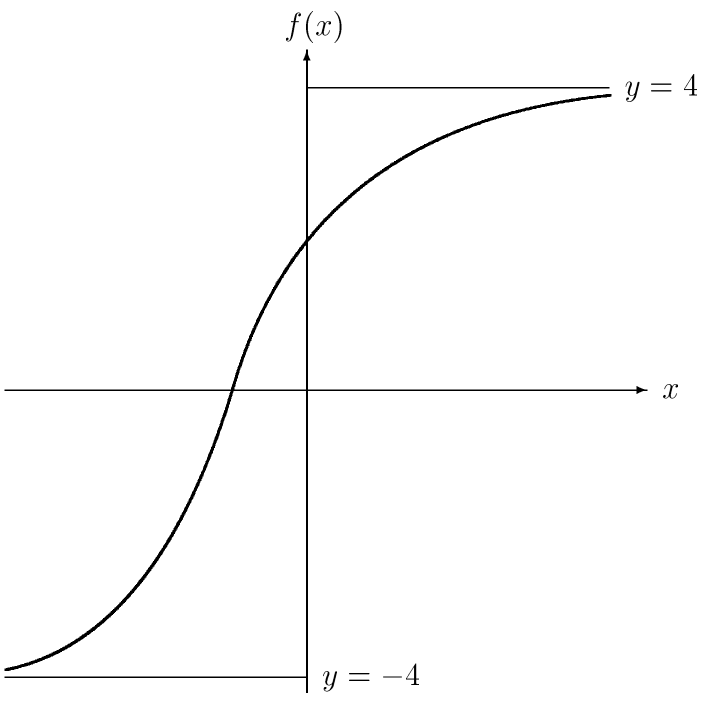
$$z = \frac{12-3x}{2x+8}$$

Rücksubstitution ergibt

$$e^{-y} = \frac{12-3x}{2x+8}$$

$$y = \bar{f}(x) = \ln\frac{2x+8}{12-3x}$$

d) Skizze



6.2 Aufgaben zu Exponentialfunktionen

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4 - e^{-x}) \cdot e^{-x}$

a) Untersuchen Sie das Verhalten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$.

b) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der Funktion $f(x)$ mit den Koordinatenachsen.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Extremwerts und begründen Sie, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt handelt.

d) Bestimmen Sie den Wendepunkt der Funktion $f(x)$.

e) Skizzieren Sie das Schaubild von $f(x)$.

f) Das Schaubild von $f(x)$, die x-Achse schließen im Bereich $-2 \cdot \ln 2 \leq x \leq a$ eine Fläche mit dem Inhalt $A(a)$ ein. Bestimmen Sie $A(a)$ und $\lim\limits_{a \to +\infty} A(a)$.

Gegeben ist zusätzlich die Funktionenschar $g_k(x) = k \cdot e^{-x}$ mit $k \in \Re$

g) Für welche Werte von k gibt es Schnittpunkte der Funktionskurven von $f(x)$ und $g_k(x)$?

h) Berechnen Sie den Schnittpunkt S der Funktionskurven $f(x)$ und $g_2(x) = 2 \cdot e^{-x}$ und skizzieren Sie das Schaubild von $g_2(x)$ in dasselbe Koordinatensystem wie $f(x)$.

i) Die Funktionskurve $g_k(x)$ für $0 < k < 3$, die Parallele zur y-Achse mit der Gleichung $x = -\ln(4 - k)$, die x-Achse und die y-Achse schließen eine Fläche $I(k)$ ein. Berechnen Sie $I(k)$. Für welchen Wert von k hat das Flächenstück $I(k)$ maximalen Inhalt?