Das Skalarprodukt

Definition

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$$

Rechenregeln

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und die reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1)	$\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$	Positive Definitheit
(2)	$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$	
(3)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	Kommutativität
(4)	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	Distributivität
(5)	$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$	
(6)	$(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$	

Anwendung

Gegeben sind die zwei Punkte A und B mit ihren zugehörigen Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

1. Orthogonalität (Senkrechtstehen) zweier Vektoren:
   $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
2. Betrag (Länge) eines Vektors:
   $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

   also: $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$
3. Winkel zwischen zwei Vektoren:
   $$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$
4. Abstand zweier Punkte:
   $$d_{A,B} = |\vec{b} - \vec{a}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$
5. Winkel mit den Koordinatenachsen (Richtungscosinus):
   $$\cos\measuredangle(\vec{a}\,;\vec{e}_i) = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$
   mit $i = 1, 2, 3$ und $\vec{e}_1 = (1\,;0\,;0)$, $\vec{e}_2 = (0\,;1\,;0)$, $\vec{e}_3 = (0\,;0\,;1)$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Das Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Definition

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -(a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$

Rechenregeln

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und die reelle Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$.

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ Antikommutativität

(2) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(3) $\vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = \vec{0}$

(4) $(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

(5) $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$ Distributivität

(6) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

(7) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

(8) $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Anwendung

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und der von ihnen eingeschlossene Winkel α.

1. Flächeninhalt des von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:
   $A = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$
2. Flächeninhalt des von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks:
   $A = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$
3. Normalenvektor von den zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
   $\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$ es gilt: $\vec{n} \perp \vec{a} \wedge \vec{n} \perp \vec{b}$
4. Lineare Abhängigkeit zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
   $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Das Spatprodukt

Definition

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$$

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$ Regel von Sarrus

Rechenregeln

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

(1) $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > = < \vec{b}, \vec{c}, \vec{a} > = < \vec{c}, \vec{a}, \vec{b} >$ zyklische Vertauschung

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}$

Anwendung

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

1. Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats:
   $V = |< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >|$
2. Volumen des von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Tetraeders:
   $V = \frac{1}{6} |< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} >|$
3. Lineare Abhängigkeit von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:
   $< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig
4. Vorzeichen des Spatprodukts von den drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$< \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} > \begin{cases} > 0 & \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ bilden ein Rechtssystem} \\ = 0 & \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind linear abhängig} \\ < 0 & \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ bilden ein Linkssystem} \end{cases}$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Matrizen

Definition

Eine (m, n)-Matrix $\underline{A}$ ist ein rechteckiges Zahlenschema, das aus $m \cdot n$ Zahlen - Elemente genannt - besteht, die in m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$\underline{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ mit } 1 \leq i \leq m \text{ und } 1 \leq j \leq n$$

Das Element a_{ij} steht in der i-ten Zeile und in der j-ten Spalte.
i heißt: Zeilenindex
j heißt: Spaltenindex

Rechenregeln

Sind $\underline{A} = (a_{ij})$ und $\underline{B} = (b_{ij})$ zwei (m, n)-Matrizen, so gilt:

1. Transponierte Matrix:
   $\underline{A}^T = (a_{ji})$
   Zeilen werden mit Spalten vertauscht
2. Gleichheit:
   $\underline{A} = \underline{B} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}$ für alle $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$
3. Multiplikation mit einem Skalar:
   $\lambda\underline{A} = \lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$
   Jedes Element der Matrix wird mit λ multipliziert
4. Addition:
   $\underline{A} + \underline{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$
   Elementeweises Addieren
5. Transponieren einer Matrizensumme:
   $(\underline{A} + \underline{B})^T = \underline{A}^T + \underline{B}^T$

Produkt von Matrizen

Sei $\underline{A} = (a_{ij})$ eine (m, n)-Matrix und $\underline{B} = (b_{jk})$ eine (n, r)-Matrix.

$\underline{A} \cdot \underline{B} = (c_{ik})$ ist die (m, r)-Matrix, mit $c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$ für $i = 1, \ldots, m$ und $k = 1, \ldots, r$

c_{ik} ist also das Skalarprodukt der i-ten Zeile von $\underline{A}$ mit der k-ten Spalte von $\underline{B}$.
Es muss also die Spaltenanzahl von $\underline{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\underline{B}$ übereinstimmen. Die Matrizen müssen zueinander passen!

Rechenregeln

(1) $\underline{A}(\underline{B}\,\underline{C}) = (\underline{A}\,\underline{B})\underline{C} = \underline{A}\,\underline{B}\,\underline{C}$

(2) $(\underline{A}\,\underline{B})^T = \underline{B}^T\underline{A}^T$

(3) $(\underline{A}^T)^T = \underline{A}$

Das Matrizenprodukt ist nicht kommutativ!

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung sowie Vervielfältigung und Verbreitung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Inverse Matrizen

Definition

Ist $\underline{A}$ eine quadratische (n, n)-Matrix und gilt $\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{E}$, wobei $\underline{E}$ die (n, n)-Einheitsmatrix ist, so nennt man $\underline{A}^{-1}$ die inverse Matrix zu $\underline{A}$.

Rechenregeln

(1) $(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$

(2) $(\underline{A}^{-1})^{-1} = \underline{A}$

(3) $(\underline{A}^{-1})^{T} = (\underline{A}^{T})^{-1}$

Die Inverse einer (2, 2)-Matrix berechnet sich wie folgt:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |\underline{A}| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = \det \underline{A}$$

$$\underline{A}^{-1} = \frac{1}{|\underline{A}|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

In Worten:
Die Inverse einer (2, 2)-Matrix $\underline{A}^{-1}$ erhält man aus $\underline{A}$, in dem man die Hauptdiagonalenglieder vertauscht und die Nebendiagonalenglieder negiert und alle Glieder durch die Determinante $\det \underline{A}$ dividiert.

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Determinanten

Definition der Determinante

Jeder quadratischen (n, n)-Matrix $\underline{A}_{n,n}$ ist eine Zahl - ihre Determinante - zugeordnet. Man schreibt $\det \underline{A}_{n,n}$ oder $|\underline{A}_{n,n}|$. Man definiert sie zunächst für $n = 2$ und $n = 3$ und entwickelt damit ein Verfahren für $n > 3$.

1. $n = 2 : \underline{A}_{2,2} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det \underline{A}_{2,2} = |\underline{A}_{2,2}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$

2. $n = 3 : \underline{A}_{3,3} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$

   $$\det \underline{A}_{3,3} = |\underline{A}_{3,3}| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1$$

3. $n > 3$: Man entwickelt die Determinante nach einer Spalte j oder nach einer Zeile i. Man definiert die ($n - 1$, $n - 1$)-Matrix $\underline{A}_{ij}$ als diejenige Matrix, die entsteht, wenn man von der ursprünglichen Matrix $\underline{A}_{n,n}$ die i-te Zeile und die j-te Spalte streicht.

   a) Es gilt somit für die Entwicklung nach der i-ten Zeile:

   $$\det \underline{A}_{n,n} = |\underline{A}_{n,n}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\underline{A}_{ij}|$$

   b) Es gilt somit für die Entwicklung nach der j-ten Spalte:

   $$\det \underline{A}_{n,n} = |\underline{A}_{n,n}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\underline{A}_{ij}|$$

Eigenschaften und Rechenregeln für Determinanten

1. Vertauscht man zwei Zeilen (Spalten), so ändert sich das Vorzeichen der Determinante.
2. Multipliziert man eine Zeile (Spalte) mit der reellen Zahl a, so multipliziert sich die Determinante mit der Zahl a.
3. Addition eines Vielfachen einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) ändert den Wert der Determinante nicht.
4. Rechenregeln:

   (1) $\det \underline{A}^{T}_{n,n} = \det \underline{A}_{n,n}$

   (2) $\det(\underline{A}_{n,n} \cdot \underline{B}_{n,n}) = \det \underline{A}_{n,n} \cdot \det \underline{B}_{n,n}$

   (3) $\det \underline{A}^{-1}_{n,n} = \dfrac{1}{\det \underline{A}_{n,n}}$

   (4) $\det(\lambda \cdot \underline{A}_{n,n}) = \lambda^n \cdot \det \underline{A}_{n,n}$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Aufgaben

Aufgabe 1

a) Für welche Zahlen $k \in \mathbb{R}$ stehen die beiden Vektoren $\vec{a} = (1;\, 2k;\, 3)$ und $\vec{b} = (1;\, k;\, k)$ aufeinander senkrecht?

b) Es sei $\vec{a} = (1;\, -2;\, 2)$ und $\vec{b} = (3k;\, 0;\, 4k)$ mit $k \in \mathbb{R}$
Wie muss $k \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen?

c) Gegeben sind zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Bestimmen Sie den Vektor $\vec{u}$ so, dass er den gleichen Betrag hat wie $\vec{a}$ und gleichsinnig parallel zu $\vec{b}$ ist.

Lösung zu Aufgabe 1

a) Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2k \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k \end{pmatrix} = 1 + 2k^2 + 3k$$

Also muss gelten

$$2k^2 + 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow k_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{4}$$

$k_1 = -\frac{1}{2}$, $k_2 = -1$

b) Die Vektoren $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ sind damit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 3k+1 \\ -2 \\ 4k+2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{v} = \begin{pmatrix} -3k+1 \\ -2 \\ -4k+2 \end{pmatrix}$$

Damit die beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen muss gelten

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3k+1 \\ -2 \\ 4k+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3k+1 \\ -2 \\ -4k+2 \end{pmatrix} = 1 - 9k^2 + 4 + 4 - 16k^2 = 0$$

$25k^2 = 9$

$k_{1,2} = \pm\frac{3}{5}$

c) Bestimmen des Einheitsvektors $\vec{b}_0$

$\vec{b}_0 = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ (Dieser zeigt in Richtung $\vec{b}$ und hat die Länge 1)

Er soll aber die Länge von $\vec{a}$ besitzen, muss also $|\vec{a}|$ lang sein

$$\vec{u} = |\vec{a}| \cdot \vec{b}_0 = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Aufgabe 2

a) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ schließen einen Winkel von 30° ein.
Berechnen Sie $|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})|$.

b) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ durch
$|\vec{a}| = \sqrt{2}$ und $|\vec{b}| = 4$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$
Berechnen Sie $|4\vec{a} - \vec{b}|$.

c) Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben:
$\vec{a} = (1;\ -1;\ 1)$ und $|\vec{b}| = 4$ und ihr eingeschlossener Winkel ist $\alpha = 60^\circ$.
Berechnen Sie das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

d) Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = (a;\ 2a;\ b)$ und $\vec{v} = (a;\ b;\ b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
Berechnen Sie $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{v}}$.

e) Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben:
$\vec{a} = (1;\ -2;\ 2)$ und $|\vec{b}| = 4$ und $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$
Berechnen Sie $2\vec{a} \cdot \vec{b}$.

f) Die beiden Einsvektoren $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ schließen den Winkel $\alpha = 30^\circ$ ein.
Bestimmen Sie den Betrag des Vektors $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$.

g) Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben:
$\vec{a} = (1;\ -2;\ 3)$ und $|\vec{b}| = 1$ und ihr eingeschlossener Winkel ist $\alpha = 30^\circ$.
Berechnen Sie $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

h) Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind gegeben mit $|\vec{a}| = 3$ und $|\vec{b}| = 4$
Bestimmen Sie $\cos\alpha$ so, dass die Vektoren $(2\vec{a} - \vec{b})$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander stehen.

i) Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben:
$|\vec{a}| = 2$ und $|\vec{b}| = 3$ und ihr eingeschlossener Winkel ist $\alpha = 30^\circ$
Berechnen Sie $|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})|$.

j) Von zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist gegeben:
$|\vec{a}| = |\vec{b}| \neq 0$
Wie groß ist der Winkel α zwischen den Vektoren
$\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$?

k) Gegeben sei $|\vec{u} \times \vec{v}| = 45$ und $\vec{v} = (4;\ -2;\ -4)$ und $\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = 30^\circ$
Bestimmen Sie $|\vec{u}|$.

Lösung zu Aufgabe 2

a) $\left|(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})\right| = \left|\vec{a}^2 - \vec{b}^2\right| = \left||\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2\right| = |4 - 9| = 5$
Die Angabe des Winkels war in der Aufgabenstellung überflüssig.

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

b) $|4\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(4\vec{a}-\vec{b})^2} = \sqrt{16\vec{a}^2 - 8\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2} = \sqrt{16|\vec{a}|^2 - 8|\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 45° + \left|\vec{b}\right|^2}$

$|4\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{16\cdot 2 - 8\cdot\sqrt{2}\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}+16} = 4$

c) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60° = \sqrt{3}\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$

d) $\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{v}} = \sqrt{\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \\ b \end{pmatrix}} = \sqrt{a^2+2ab+b^2} = \sqrt{(a+b)^2} = |a+b|$

e) $2\vec{a}\cdot\vec{b} = 2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60° = 2\cdot 3\cdot 4\cdot\frac{1}{2} = 12$

f) $|\vec{a}| = |3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2| = \sqrt{(3\vec{e}_1-2\vec{e}_2)^2} = \sqrt{9|\vec{e}_1|^2 - 12\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 + 4|\vec{e}_2|^2}$

$|\vec{a}| = \sqrt{9|\vec{e}_1|^2 - 12|\vec{e}_1|\cdot|\vec{e}_2|\cdot\cos 30° + 4|\vec{e}_2|^2} = \sqrt{13-6\sqrt{3}}$

g) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{14}$

h) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{b}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\alpha - 2\left|\vec{b}\right|^2 = 0$

$\cos\alpha = \dfrac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

i) $|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})| = |\vec{a}\times\vec{a} - \vec{a}\times\vec{b} + \vec{b}\times\vec{a} - \vec{b}\times\vec{b}| = |-\vec{a}\times\vec{b} - \vec{a}\times\vec{b}|$

$= 2|\vec{a}\times\vec{b}| = 2|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\sin 30° = 6$

j) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2(\vec{a}-\vec{b})^2}} = \dfrac{|\vec{a}|^2 - \left|\vec{b}\right|^2}{\sqrt{[(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})]^2}} = 0$

$\alpha = 90°$

k) $|\vec{u}| = \dfrac{|\vec{u}\times\vec{v}|}{|\vec{v}|\cdot\sin 30°} = \dfrac{45}{6\cdot\frac{1}{2}} = 15$

Aufgabe 3

a) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a} = (1;\ -1;\ 1)$, $\vec{b} = (1;\ t;\ 1)$ und $\vec{c} = (5;\ 0;\ t+3)$ linear abhängig?

b) Für welche $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\vec{a} = (0;\ 1;\ t)$, $\vec{b} = (2;\ -1;\ 1)$ und $\vec{c} = (-1;\ t;\ 1)$ linear abhängig?

Lösung zu Aufgabe 3

a) Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt Null wird.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ -1 & t & 0 \\ 1 & 1 & t+3 \end{vmatrix} = t^2 - t - 2$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

$t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$

$t_1 = -1,\ t_2 = 2$

b) Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt Null wird.

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & t \\ t & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2t^2 - t - 3$$

$2t^2 - t - 3 = 0 \Leftrightarrow t_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4}$

$t_1 = -1,\ t_2 = \frac{3}{2}$

Aufgabe 4

a) Für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sei $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 1$
Berechnen Sie $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$ für $\vec{u} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ und $\vec{w} = 3\vec{c}$.

b) Für die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sei $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = -2$
Berechnen Sie $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lösung zu Aufgabe 4

a) $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = [(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b})] \cdot 3\vec{c} = 2(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot 3\vec{c} = 6(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 6$

b) $(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = \underbrace{(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{a}}_{=0} + \underbrace{(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}}_{=0} + (\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2$

Aufgabe 5

Geben Sie die Zerlegung des Vektors $\vec{c} = (0;\ -4;\ 3)$ in Komponenten nach den Vektoren $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2)$ und $\vec{b} = (2;\ 2;\ 1)$ an.

Lösung zu Aufgabe 5

$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{c}$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$x_2 = -1,\ x_1 = 2$

$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

Aufgabe 6

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1;\ 2;\ -1)$ und $\vec{b} = (k;\ 0;\ 1)$

a) Es sei $k = 2$
Für welche Vektoren $\vec{c} = (x;\ y;\ z)$ gilt dann:
$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a}$?

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Hinweis: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{b} \cdot \vec{c}$ sind Skalarprodukte.

b) Für welche Werte des reellen Parameters $k \in \mathbb{R}$ hat das von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannte Dreieck den Flächeninhalt $A = \sqrt{2}$?

Lösung zu Aufgabe 6

a) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$(\vec{b} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2x + z) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + z \\ 4x + 2z \\ -2x - z \end{pmatrix}$

Koeffizientenvergleich liefert

$0 = x + z$

$y = 4x + 2z$

$z = -x$

Dies liefert ein LGS

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow z = t,\ y = -2t,\ x = -t$$

$\vec{c} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Der Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Dreiecks ist

$A = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$

Bestimmung des Vektorprodukts

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - k \\ -2k \end{pmatrix}$

Bestimmen des Betrags

$\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -1 - k \\ -2k \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4 + (-1 - k)^2 + 4k^2} = \sqrt{5k^2 + 2k + 5}$

Forderung für den Flächeninhalt

$\frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{5k^2 + 2k + 5} = \sqrt{2}$

$5k^2 + 2k + 5 = 8 \Leftrightarrow 5k^2 + 2k - 3 = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10}$

$k_1 = -1,\ k_2 = \frac{3}{5}$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Aufgabe 7

Gegeben sind die kartesischen Basiseinheitsvektoren $\vec{i} = (1;0;0)$, $\vec{j} = (0;1;0)$ und $\vec{k} = (0;0;1)$.

a) Geben Sie die Komponenten des folgenden Vektors $\vec{v}$ an:
$\vec{v} = (\vec{i}+\vec{j}) \times (\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})$

b) Berechnen Sie den Ausdruck $A = (\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) \bullet (\vec{i} \times (\vec{i}-\vec{j}))$.

c) Zwei Seiten eines Parallelogramms werden gebildet von den Vektoren $\vec{j}+\vec{k}$ und $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$
Wie groß ist der Flächeninhalt des Parallelogramms?

d) Berechnen Sie den Ausdruck $\vec{v} = (\vec{i} \times \vec{j}) \times (\vec{k}+\vec{i}) + (\vec{i}+\vec{j}) \times (\vec{k} \times \vec{i})$.

e) Vereinfachen Sie den Ausdruck
$(\vec{i}+2\vec{j}) \times (\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k})$.

f) Bestimmen Sie den Parameter $b \in \mathbb{R}$ so, dass gilt:
$|\vec{j} \times (b\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})| = \sqrt{5}$

Lösung zu Aufgabe 7

a) $\vec{v} = (\vec{i}+\vec{j}) \times (\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $A = (\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}) \bullet (\vec{i} \times (\vec{i}-\vec{j})) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1$

c) $A = \left|(\vec{j}+\vec{k}) \times (\vec{i}+\vec{j}-\vec{k})\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$

d) $\vec{v} = (\vec{i} \times \vec{j}) \times (\vec{k}+\vec{i}) + (\vec{i}+\vec{j}) \times (\vec{k} \times \vec{i})$

$\vec{v} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e) $(\vec{i} + 2\vec{j}) \times (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -4\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$

f) $|\vec{j} \times (b\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k})| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5}$

$$\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -b \end{pmatrix} \right| = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{1 + b^2} = \sqrt{5} \Leftrightarrow b^2 = 4$$

$b_{1,2} = \pm 2$

Aufgabe 8

Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (1;\ -1;\ 2)$ und $\vec{b} = (2;\ p;\ -1)$:
Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ parallel zur x, y-Ebene verläuft.

Lösung zu Aufgabe 8

Der Vektor $\vec{c}$ verläuft parallel zur x, y-Ebene, wenn seine z-Komponente Null ist

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2p \\ 5 \\ p + 2 \end{pmatrix}$$

Forderung für die z-Komponente

$p + 2 = 0$

$p = -2$

Aufgabe 9

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = (1;\ 1;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ -1;\ 1)$ und $\vec{c} = (0;\ 3;\ 3)$:
Zerlegen Sie den Vektor $\vec{c}$ in Komponenten nach den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Lösung zu Aufgabe 9

$x_1\vec{a} + x_2\vec{b} = \vec{c}$

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right.$$

$x_2 = -1,\ x_1 = 2$

$\vec{c} = 2\vec{a} - \vec{b}$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Aufgabe 10

a) Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (2p\,;\,2p\,;\,-pq)$ mit $p \neq 0$ und $\vec{b} = (-2\,;\,1\,;\,2)$. Wie müssen die reellen Parameter p und q gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Quadrat aufspannen?

b) Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (2p\,;\,p\,;\,2p)$ mit $p \neq 0$ und $\vec{b} = (2\,;\,4\,;\,q)$. Wie müssen die reellen Parameter p und q gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Quadrat aufspannen?

c) Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a} = (2\,;\,1\,;\,2)$ und $\vec{b} = (1\,;\,2\,;\,p)$.
Wie muss der reelle Parameter p gewählt werden, damit die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Quadrat aufspannen?

Lösung zu Aufgabe 10

a) Für ein Quadrat muss gelten: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \wedge |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow -2p(1+q) = 0 \Rightarrow q = -1$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow |p|\sqrt{8+q^2} = 3$

mit $q = -1$ folgt

$|p| = 1,\ q = -1$

b) Für ein Quadrat muss gelten: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \wedge |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2p(4+q) = 0 \Rightarrow q = -4$

$|\vec{a}| = |\vec{b}| \Leftrightarrow 3|p| = \sqrt{20+q^2}$

mit $q = -4$ folgt

$|p| = 2,\ q = -4$

c) Für ein Quadrat muss gelten: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \wedge |\vec{a}| = |\vec{b}|$

$p = -2$

Aufgabe 11

Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$. Bestimmen Sie $p \in \mathbb{R}$ so, dass der Vektor $\vec{a} + p\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{c}$ steht.

Lösung zu Aufgabe 11

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt.
$(\vec{a} + p\vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$
Mit den Rechenregeln des Skalarprodukts folgt
$\vec{a} \cdot \vec{c} + p(\vec{b} \cdot \vec{c}) = 0$
$p = -\dfrac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\vec{b} \cdot \vec{c}}$

Aufgabe 12

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Gegeben ist die Matrix $\underline{A}_m = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$ mit $m \in \mathbb{R}$.

a) Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\underline{A}_m$.
Für welche Werte von $m \in \mathbb{R}$ ist die Determinante von 0 verschieden?

b) Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\underline{A}_m \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen Sie das lineare Gleichungssystem in Abhängigkeit des Parameters m.

c) Im Folgenden sei $m = 2$
Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ hat das System

$$\underline{A}_2 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

nichttriviale Lösungen?

Lösung zu Aufgabe 12

a) Berechnung der Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = -m^2$$

Die Determinante ist von Null verschieden für $m \neq 0$

b) Lösen des gegebenen LGS für $m \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & m & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & m & 0 \end{array}\right.$$

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0$

Lösen des gegebenen LGS für $m = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$x_3 = t,\ x_2 = s,\ x_1 = 1 - s - t$

c) Umschreiben des gegebenen LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein homogenes LGS. Dieses besitzt nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante Null wird.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda - 4 = -(\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 4)$$

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = 1 \pm \sqrt{5}$$

Aufgabe 13

Durch die Matrix

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 9-a \\ 2 & -3-a & -1 \\ 3-a & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

ist das homogene lineare Gleichungssystem $\underline{A}_a \cdot \vec{x} = \vec{0}$ gegeben.
Zeigen Sie, dass das LGS genau dann nichttriviale Lösungen besitzt, wenn gilt:
$a^3 - 9a^2 - 30a + 88 = 0$
Bestimmen Sie die Lösungen dieser Gleichung (eine Lösung ist $a_1 = 2$).

Lösung zu Aufgabe 13

Ein homogenes LGS besitzt genau dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante Null ist.
Mit der Regel von Sarrus ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 9-a \\ 2 & -3-a & -1 \\ 3-a & 2 & 4 \end{vmatrix} = a^3 - 9a^2 - 30a + 88$$

Faktorisieren (Polynomdivision mit $(a-2)$) liefert
$a^3 - 9a^2 - 30a + 88 = (a-2)(a-11)(a+4)$
Diese Gleichung muss Null werden
$(a-2)(a-11)(a+4) = 0$
$a_1 = 2,\ a_2 = 11,\ a_3 = -4$

Aufgabe 14

Durch die Matrix

$$\underline{A}_p = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & p-1 & 2 \\ 1 & -3 & p+2 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}_p = \begin{pmatrix} 1-p \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R}$$

ist das inhomogene lineare Gleichungssystem $\underline{A}_p \cdot \vec{x} = \vec{b}_p$ gegeben.
Für welche Werte von p ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar?
Geben Sie in diesem Fall nur die Lösung x_1 in Abhängigkeit von p an.
Hinweis: Verwenden Sie hierfür aus strategischen Gründen die Cramersche Regel

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 14
Ein inhomogenes LGS ist dann eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & p-1 & 2 \\ 1 & -3 & p+2 \end{vmatrix} = p^2 - 2p$$

$p^2 - 2p \neq 0 \Leftrightarrow p \neq 0 \wedge p \neq 2$
Die Cramersche Regel für x_1 ist

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1-p & -2 & 1 \\ 2 & p-1 & 2 \\ 0 & -3 & p+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & p-1 & 2 \\ 1 & -3 & p+2 \end{vmatrix}} = \frac{-p^3 + p + 6}{p^2 - 2p} = \frac{-(p-2)(p^2 + 2p + 3)}{p(p-2)}$$

$$x_1 = -\frac{p^2 + 2p + 3}{p}$$

Aufgabe 15
Bestimmen Sie die Matrix $\underline{A}_{(2,3)}$ mit den Elementen

$$a_{ik} = \begin{cases} (-1)^{i+k} & \text{für } i < k \\ i^k & \text{für } i \geq k \end{cases} \quad \text{mit } i = 1, 2 \text{ und } k = 1, 2, 3$$

Lösung zu Aufgabe 15
Alle möglichen Indices durchchecken.
i bezeichnet die Zeilennummer.
k bezeichnet die Spaltennummer.
Wenn $i < k$ ist ,dann befindet man sich oberhalb der Hauptdiagonalen.
Wenn $i = k$ ist ,dann befindet man sich auf der Hauptdiagonalen.
Wenn $i > k$ ist ,dann befindet man sich unterhalb der Hauptdiagonalen.

$$\underline{A}_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 16
Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A}_{p,q} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die reellen Parameter p und q so, dass gilt:
$\underline{A}_{p,q} \cdot \underline{A}_{p,q}^T = \underline{B}$

Lösung zu Aufgabe 16
Einfache Matrizenmultiplikation und anschließender Koeffizientenvergleich

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

$\underline{A}_{p,q} \cdot \underline{A}_{p,q}^T$

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & q & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2+1 & -q+2 \\ 0 & -q+2 & 5 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenvergleich $\underline{A}_{p,q} \cdot \underline{A}_{p,q}^T = \underline{B}$

$$\begin{pmatrix} p^2 & 0 & 0 \\ 0 & q^2+1 & -q+2 \\ 0 & -q+2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$p_{1,2} = \pm 2,\ q = -1$

Aufgabe 17

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}$$

Welchen Wert besitzen die jeweiligen Determinanten?
Anmerkung: Verlangt ist entweder eine Berechnung oder eine Begründung für den Wert.

Lösung zu Aufgabe 17

det $\underline{A} = 2$

Entwicklung nach der 1. Spalte, dann Entwicklung nach der 1. Zeile

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2$$

det $\underline{B} = 0$

Zeile 2 und Zeile 4 sind l.a., damit ist die Determinante notwendigerweise Null.

Aufgabe 18

Gegeben sind die Matrizen

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -a & 0 & -a \end{pmatrix} \text{ und } \underline{B}_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & a \\ -1 & 1 \\ -a & a \end{pmatrix}, \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Berechnen Sie $\underline{B}_a^T \cdot \underline{A}_a$.

Lösung zu Aufgabe 18

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

$$\underline{B}_a^T \cdot \underline{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 & -a \\ 1 & a & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+a & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & 0 \\ -1 & 1 & 0 & a \\ 1 & -a & 0 & -a \end{pmatrix}$$

$$\underline{B}_a^T \cdot \underline{A}_a = \begin{pmatrix} a+2 & a^2-a & a^2-1 & a^2-a-1 \\ 3a & -a^2-a+2 & a^2-1 & -a^2+a-1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 19

Gegeben ist die Matrix

$$\underline{A}_a = \begin{pmatrix} 1-a & 2a & a-3 \\ 1 & 2a & 2+2a \\ a & -a & 5 \end{pmatrix}, \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Für welche Werte von a verschwindet die Determinante?
Berechnen Sie $\underline{A}_1^{-1}$ für $a = 1$ und lösen Sie damit das LGS

$$\underline{A}_1 \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 19

Die Determinante ist mit der Regel von Sarrus

$$\begin{vmatrix} 1-a & 2a & a-3 \\ 1 & 2a & 2+2a \\ a & -a & 5 \end{vmatrix} = -a^2 + 5a$$

Damit die Determinante Null wird muss gelten

$-a^2 + 5a = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 5$

Berechnung der inversen Matrix

$$\underline{A}_1^{-1} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & -8 & 12 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Lösen des gegebenen Gleichungssystems mit Hilfe der inversen Matrix

$$\vec{x} = \underline{A}_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 14 & -8 & 12 \\ -1 & 2 & -2 \\ -3 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -\tfrac{1}{2} \\ -\tfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor