1 Differentialgleichungen

1.1 Exakte Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ heißt **exakt**,
wenn gilt: $p_y(x,y) = q_x(x,y)$

Eine **Stammfunktion** $F(x,y)$ gewinnt man durch Integration aus

$$F_x(x,y) = p(x,y) \text{ oder } F_y(x,y) = q(x,y)$$

O. B. d. A. errechnet man die Stammfunktion

$$F(x,y) = \int p(x,y)dx + c(y)$$

Differenziert man die Stammfunktion nach y, so ergibt sich:

$$F_y(x,y) + c'(y) = q(x,y)$$

Ein Vergleich liefert dann $c'(y)$. Diesen integriert man nach y und erhält $c(y) = \int c'(y)dy$
Eingesetzt in die Stammfunktion erhält man die Lösung implizit zu:

$$F(x,y) = c$$

1.1.1 Integrierender Faktor

$\mu(x,y)$ heißt **integrierender Faktor** von $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$,
wenn gilt: $(p(x,y)\cdot\mu(x,y))dx + (q(x,y)\cdot\mu(x,y))dy = 0$ ist eine exakte Differentialgleichung.

Also, wenn gilt: $p_y \cdot \mu + p \cdot \mu_y = q_x \cdot \mu + q \cdot \mu_x$

Man macht die Differentialgleichung durch Einsetzen von $\mu(x,y)$ exakt und verfährt wie oben.

1.1.2 Ansätze für den integrierenden Faktor:

- Der integrierende Faktor hängt nur von x ab $\mu = \mu(x)$:
  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{p_y - q_x}{q}$
- Der integrierende Faktor hängt nur von y ab $\mu = \mu(y)$:
  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{p}$
- Der integrierende Faktor hängt von $x \cdot y$ ab $\mu = \mu(x \cdot y)$:
  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{xp - yq}$
- Der integrierende Faktor hängt von $x + y$ ab $\mu = \mu(x + y)$:
  $\frac{\mu'}{\mu} = \frac{q_x - p_y}{p - q}$

1.2 Differentialgleichung mit getrennten Variablen

Eine Differentialgleichung der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ nennt man **Differentialgleichung mit getrennten Variablen**.
Ihre Lösungen erhält man mit der Methode „Trennung der Veränderlichen“.

Die Lösungsgesamtheit besteht aus

(a) allen **Geraden** $y = y_0$, falls $g(y_0) = 0$, also y_0 eine Nullstelle der Funktion $g(y)$ ist.

(b) **Funktionen** $y = y(x)$, die sich aus $\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx, \quad g(y) \neq 0$ in impliziter Form ergeben.

1.3 Ähnlichkeits-Differentialgleichung

(a) Differentialgleichungen der Form $y' = f(\frac{x}{y})$ lassen sich mit dem Ansatz

$z(x) = \frac{y(x)}{x}$ und somit $y' = z'x + x$ auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückführen.

(b) Differentialgleichungen der Form $y' = f(ax + by + c)$ lassen sich mit dem Ansatz

$z(x) = ax + by(x) + c$ und somit $y' = \frac{z' - a}{b}$ auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückführen.

1.4 Lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Eine Differentialgleichung der Form $y' + a(x) \cdot y = r(x)$ heißt **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**.

Die Gesamtlösung ist $y = y_h + y_s$, wobei

y_h die **Lösung der homogenen Differentialgleichung** $y' + a(x) \cdot y = 0$ ist und
y_s eine **spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung** $y' + a(x) \cdot y = r(x)$ ist.

Mit $A(x) = \int a(x)dx$ ergeben sich die Lösungen zu:

$$y(x) = \underbrace{ce^{-A(x)}}_{y_h} + \underbrace{e^{-A(x)} \cdot \int (r(x) \cdot e^{A(x)})dx}_{y_s}$$

Die Integrationskonstante c läßt sich durch eine gegebene Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ bestimmen.

1.5 Bernoulli-Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $y' + f(x) \cdot y = r(x) \cdot y^a$ mit $a \neq 0,1$ heißt **Bernoulli-Differentialgleichung**.

Der Ansatz $u = y^{1-a}$ und somit $u' = \frac{(1-a)y'}{y^a}$ führt auf folgende

lineare Differentialgleichung 1. Ordnung: $u' + (1-a)f(x) \cdot u = (1-a)r(x)$

1.6 Riccati-Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $y' + f(x) \cdot y = r(x) + g(x) \cdot y^2$ heißt **Riccati-Differentialgleichung**.

Unter der Voraussetzung, dass eine Lösung $v(x)$ bekannt ist, führt der Ansatz $y = v + \frac{1}{u}$ und somit $y' = v' - \frac{u'}{u^2}$ auf folgende lineare Differentialgleichung 1. Ordnung: $u' + (2vg - f) \cdot u = -g$

1.7 Clairautsche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $y = x \cdot y' + g(y')$ heißt **Clairautsche Differentialgleichung**.

Die Lösungsgesamtheit besteht aus

(a) der **Geradenschar** $y = cx + g(c)$ mit $c \in \Re$ und

(b) der **Einhüllenden der Geradenschar** $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -g'(t) \\ -tg'(t) + g(t) \end{pmatrix}$

1.8 D´Alembertsche Differentialgleichung

Eine Differentialgleichung der Form $y = x \cdot f(y') + g(y')$ heißt **d´Alembertsche Differentialgleichung**.
Die Lösungsgesamtheit besteht aus

(a) den **Lösungsgeraden** $y = f(c)x + g(c)$, wobei man mit $f(c) = c$ die Zahlen c bestimmt.

(b) Setzt man $y' = t$ und differenziert die Gleichung, so erhält man eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für $x(t)$, die folgendermaßen aussieht:

$$\dot{x} + \frac{f'(t)}{f(t) - t} \cdot x = -\frac{g'(t)}{f(t) - t}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ f(t) \cdot x(t) + g(t) \end{pmatrix}$$

1.9 Lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Die **homogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** ist von folgender Gestalt:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0 \text{ mit } a_i \in \Re,\ i = 0, 1, \dots, n-1$$

Der Ansatz $y = e^{\lambda x}$ führt zum **charakteristischen Polynom**:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0 \text{ mit } \lambda \in C$$

Jede k-fache Lösung dieses Polynoms liefert k linear unabhängige Fundamentallösungen der gegebenen Differentialgleichung.

Lösungen des charakteristischen Polynoms		Fundamentallösungen der Differentialgleichung
λ	1-fach reell	$e^{\lambda x}$
λ	k-fach reell	$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}e^{\lambda x}$
$\lambda = a \pm ib$	1-fach komplex	$e^{ax}\cos bx$ $e^{ax}\sin bx$
$\lambda = a \pm ib$	k-fach komplex	$e^{ax}\cos bx,\ xe^{ax}\cos bx,\ \dots,\ x^{k-1}e^{ax}\cos bx$ $e^{ax}\sin bx,\ xe^{ax}\sin bx,\ \dots,\ x^{k-1}e^{ax}\sin bx$

Man erhält so n linear unabhängige Fundamentallösungen $y_1, y_2, \dots, y_n$, die eine Lösungsbasis bilden und deren Linearkombination die homogene Lösung der Differentialgleichung bildet.

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n \text{ mit } c_i \in \Re,\ i = 1, 2, \dots, n$$

Die **inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten** ist von folgender Gestalt:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x) \text{ mit } a_i \in \Re,\ i = 0, 1, \dots, n-1$$

Man bestimmt zunächst die Lösungen y_h der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und berechnet durch Variation der Konstanten oder durch einen speziellen Ansatz eine spezielle Lösung y_s der inhomogenen Differentialgleichung. Die Gesamtlösung ergibt sich zu:

$$y = y_h + y_s$$

Spezielle Ansätze:
Ist die Störfunktion vom Typ:

$r(x) = p(x) \cdot e^{ax}\cos bx$ oder $r(x) = p(x) \cdot e^{ax}\sin bx$,

mit $a, b \in \Re$ und $p(x)$ sei ein ganzrationales Polynom

(a) **Normalfall** ($a \pm ib$ sind **keine Lösungen** des charakteristischen Polynoms)

Normalansatz: $y_s = q_1(x)e^{ax}\cos bx + q_2(x)e^{ax}\sin bx$

Hierbei sind $q_1(x)$ und $q_2(x)$ Polynome mit unbestimmten Koeffizienten vom gleichen Grad wie das Polynom $p(x)$ in der Störfunktion.

(b) **Resonanz** ($a \pm ib$ sind **k-fache Lösungen** des charakteristischen Polynoms)

Hier multipliziert man den Normalansatz mit x^k