

1 Fourier-Reihen

1.1 Reelle Darstellung einer 2π -periodischen Funktion

Es gilt für eine Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π eine Darstellung als Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Die Koeffizienten sind durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) dx, \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) dx, \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

1.2 Symmetrie und Stetigkeit von Funktionen

- Der Wert a_0 ist gleich der Differenz der Flächen von $f(x)$ oberhalb der x -Achse mit denen unterhalb der x -Achse dividiert durch π .
- Ist die Funktion $f(x)$ gerade, also achsensymmetrisch zur y -Achse, gilt also $f(-x) = f(x)$
so treten in der Fourier-Reihe keine Sinus-Glieder auf, es folgt also $b_k = 0$
- Ist die Funktion $f(x)$ ungerade, also punktsymmetrisch zum Ursprung O , gilt also $f(-x) = -f(x)$
so treten in der Fourier-Reihe keine Cosinus-Glieder auf, es folgt also $a_k = 0$
- Ist die Funktion $f(x)$ stetig, macht sie also keinen Sprung, so gilt

$$a_k \sim \frac{1}{k^s}, b_k \sim \frac{1}{k^s} \text{ mit } s \geq 2$$

1.3 Reelle Darstellung einer Funktion der beliebigen Periode p

Es gilt für eine Funktion $f(x)$ mit der beliebigen Periode p eine Darstellung als Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(\frac{2\pi}{p} kx\right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{2\pi}{p} kx\right)$$

Die Koeffizienten sind durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$a_0 = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) dx$$

$$a_k = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{p} kx\right) dx, \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{p} \int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} f(x) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{p} kx\right) dx, \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

1.3.1 Folgende Integrale tauchen immer wieder auf:

$$\int \sin(ax) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

$$\int \cos(ax) dx = \frac{1}{a} \sin(ax)$$

$$\int (bx + c) \cdot \sin(ax) dx = \frac{b}{a^2} \sin(ax) - \frac{1}{a} (bx + c) \cdot \cos(ax)$$

$$\int (bx + c) \cdot \cos(ax) dx = \frac{b}{a^2} \cos(ax) + \frac{1}{a} (bx + c) \cdot \sin(ax)$$

1.4 Komplexe Darstellung einer Funktion der beliebigen Periode p

Es gilt für eine Funktion $f(x)$ mit der beliebigen Periode p eine Darstellung als komplexe Fourier-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{2\pi}{p} kx}$$

Die Koeffizienten sind durch folgende Beziehungen bestimmt:

$$c_k = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) \cdot e^{-i \frac{2\pi}{p} kx} dx, \text{ mit } k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Die komplexe Rechnung ist meist einfacher, jedoch ist die Darstellung im Reellen übersichtlicher, deshalb gilt für die Umrechnung der komplexen Koeffizienten c_k in die zugehörigen reellen Koeffizienten a_0, a_k, b_k :

$$a_0 = 2 \cdot c_0$$

$$a_k = 2 \cdot \operatorname{Re}\{c_k\}$$

$$b_k = -2 \cdot \operatorname{Im}\{c_k\}$$

1.4.1 Folgende komplexe Umrechnungen ins Reelle sind ganz nützlich:

$$\frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) = \sin(kx)$$

$$\frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) = \cos(kx)$$

$$e^{\pm i k 2\pi} = e^0 = 1$$

$$e^{\pm i k \pi} = (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 2, 4, 6, 8, \dots \\ -1 & \text{für } k = 1, 3, 5, 7, 9, \dots \end{cases}$$

$$e^{\pm i k \frac{\pi}{2}} = (-1)^{\frac{k}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0, 4, 8, 12, 16, \dots \\ -1 & \text{für } k = 2, 6, 10, 14, 18, \dots \end{cases}$$

1.4.2 Folgende Integrale tauchen immer wieder auf:

$$\int e^{-ikx} dx = -\frac{1}{ik} e^{-ikx}$$

$$\int (bx + c) \cdot e^{-ikx} dx = -\frac{1}{ik} e^{-ikx} \cdot \left(bx + c + \frac{b}{ik} \right)$$

1.5 Rechenbeispiel

Gegeben ist die 2π -periodische Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq a \\ 0 & \text{für } a \leq x \leq \pi \\ -1 & \text{für } \pi \leq x \leq 2\pi - a \\ 0 & \text{für } 2\pi - a \leq x \leq 2\pi \end{cases} \quad \text{für } 0 \leq a \leq \pi$$

(a) Berechnen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^a 1 \, dx + \int_{\pi}^{2\pi-a} (-1) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} (a - 0 - (2\pi - a - \pi)) = \frac{2a - \pi}{\pi}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^a 1 \cdot \cos(kx) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi-a} (-1) \cdot \cos(kx) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_0^a - \frac{1}{k} \sin(kx) \Big|_{\pi}^{2\pi-a} \right)$$

$$a_k = \frac{1}{k\pi} (\sin(ka) + \sin(ka)) = \frac{2}{k\pi} \sin(ka)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^a 1 \cdot \sin(kx) \, dx + \int_{\pi}^{2\pi-a} (-1) \cdot \sin(kx) \, dx \right) = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_0^a + \frac{1}{k} \cos(kx) \Big|_{\pi}^{2\pi-a} \right)$$

$$b_k = \frac{1}{k\pi} (-\cos(ka) + 1 + \cos(ka) - \cos(k\pi)) = \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

(b) Berechnen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten.

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^a 1 \cdot e^{-ikx} \, dx + \int_{\pi}^{2\pi-a} (-1) \cdot e^{-ikx} \, dx \right) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{-ik} e^{-ikx} \Big|_0^a + \frac{1}{ik} e^{-ikx} \Big|_{\pi}^{2\pi-a} \right)$$

$$c_k = \frac{1}{k2\pi i} \left(- (e^{-ika} - 1) + e^{-ik(2\pi-a)} - e^{-ik\pi} \right) = \frac{1}{k2\pi i} (e^{ika} - e^{-ika} + 1 - (-1)^k)$$

$$c_k = \frac{1}{k\pi} \left(\frac{1}{2i} (e^{ika} - e^{-ika}) + \frac{1}{2i} (1 - (-1)^k) \right) = \frac{1}{k\pi} \left(\sin(ka) - \frac{i}{2} (1 - (-1)^k) \right)$$

Hierbei ist es wichtig die Potenzgesetze zu beherrschen!

Hieraus ergeben sich die reellen Fourier-Koeffizienten zu

$$a_k = 2\operatorname{Re}\{c_k\} = \frac{2}{k\pi} \sin(ka)$$

$$b_k = -2\operatorname{Im}\{c_k\} = \frac{1}{k\pi} (1 - (-1)^k)$$

Dies stimmt mit dem reellen Ergebnis von (a) überein.