

Funktionen mit zwei Veränderlichen

Mit der Funktion $z = f(x, y)$ wird im Allgemeinen eine Fläche im Raum (x, y, z) beschrieben.

Schnittkurven der gegebenen Fläche mit speziellen Ebenen sind für eine Skizze sehr hilfreich.

$z = f(x, y) = \text{const.}$ Schnitt der Fläche mit Parallelen zur $[x, y]$ -Ebene (Höhenlinien)

$x = \text{const.}$ Schnitt der Fläche mit Parallelen zur $[y, z]$ -Ebene

$y = \text{const.}$ Schnitt der Fläche mit Parallelen zur $[x, z]$ -Ebene

Schnitt mit den Koordinatenebenen

$z = f(x, y) = 0$ Schnitt der Fläche mit der $[x, y]$ -Ebene

$x = 0$ Schnitt der Fläche mit der $[y, z]$ -Ebene

$y = 0$ Schnitt der Fläche mit der $[x, z]$ -Ebene

Partielle Ableitungen

Partielle Ableitung nach x , wobei y als Konstante behandelt wird.

Partielle Ableitung nach y , wobei x als Konstante behandelt wird.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = z_x = f_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = z_{xy} = f_{xy}$$

Partielle Ableitung nach y , wobei x als Konstante behandelt wird.

Partielle Ableitung nach x , wobei y als Konstante behandelt wird.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = z_y = f_y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = z_{yy} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = z_{yx} = f_{yx}$$

Vertauschungssatz

Es gilt $f_{xy} = f_{yx}$, **nur** wenn jeweils f_{xy} und f_{yx} stetig sind.

Achtung: Dies gilt also nicht immer.

Der Gradient

Der Gradient ist ein Vektor parallel zur $[x, y]$ -Ebene, bei dem die Komponenten die jeweiligen partiellen Ableitungen sind.

Der Gradient $\text{grad } f(\vec{x}_0)$ steht senkrecht auf der Höhenlinie $z = f(x_0, y_0)$.

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Der Vektor des Gradienten weist in die Richtung maximalen Anstiegs im Punkt $P(x_0/y_0/f(x_0, y_0))$ der Fläche $f(x, y)$.

Die Tangentialebene

Die Tangentialebene E an die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle $P(x_0/y_0/f(x_0, y_0))$ hat die Gleichung

$$E : z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Der Normalenvektor

Der Normalenvektor \vec{n}_E der Tangentialebene E an die Funktion $f(x, y)$ an der Stelle $P(x_0/y_0/f(x_0, y_0))$ ist

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}$$

Normalenform der Tangentialebene

$$E : \vec{n}_E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{n}_E \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Parameterform der Tangentialebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \text{ mit } s, t \in \mathbb{R}$$

Das totale Differential

Das totale Differential ist definiert als

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy$$

mit $dx = x - x_0$ und $dy = y - y_0$

$$df = f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

Vektoriell geschrieben

$$df = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$df = df(x, y)$ gibt den Zuwachs der Funktion f an (bei festem (x_0, y_0)), wenn die Fläche im Raum f durch ihre Tangentialebene im Punkt $P(x_0/y_0/f(x_0, y_0))$ ersetzt wird.

Der tatsächliche Zuwachs der Funktion f wird beschrieben durch

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

Ist (x, y) genügend nahe bei (x_0, y_0) , dann gilt in recht guter Näherung

$$\Delta f \approx df$$

Die Richtungsableitung

Die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{x}_0)$ gibt im Punkt $P(x_0/y_0/f(x_0, y_0))$ die Steigung der Schnittkurve S zwischen der Fläche im Raum $z = f(x, y)$ und der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \vec{r} \text{ (mit } s, t \in \mathbb{R} \text{) an.}$$

- Diese Steigung ist maximal, wenn die Richtung in Richtung des Gradienten weist.
- Diese Steigung ist minimal, wenn die Richtung in Gegenrichtung des Gradienten weist.
- Diese Steigung ist Null, wenn die Richtung orthogonal zur Richtung des Gradienten weist.

Die Definition der Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{r}_0$$

Die Richtungsableitung ist das Skalarprodukt aus dem Gradienten $\text{grad } f(\vec{x}_0)$ an der Stelle $P(x_0/y_0/f(x_0, y_0))$ und dem Einheitsvektor $\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ in der vorgegebenen

$$\text{Richtung } \vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}.$$

- Der Einheitsvektor \vec{r}_0 in Richtung \vec{r} ist gegeben durch

$$|\vec{r}| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

$$\vec{r}_0 = \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

- Der Gradient ist gegeben durch

$$\text{grad } f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Das Skalarprodukt angewandt liefert damit für die Richtungsableitung

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{x}_0) = \text{grad } f(\vec{x}_0) \cdot \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}(\vec{x}_0) = \frac{r_1 f_x(x_0, y_0) + r_2 f_y(x_0, y_0)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}$$

Relative Extrema von Funktionen mit zwei Veränderlichen

Voraussetzung für die nachstehende Betrachtung sind stetige und differenzierbare Funktionen $f(x, y)$, also Funktionen, bei denen der Vertauschungssatz $f_{xy} = f_{yx}$ gilt.

Notwendige Bedingung für relative Extrema

Es existieren nur relative Extrema der Funktion $z = f(x, y)$, wenn gilt

$$\text{grad } f(x, y) = \vec{0} \Leftrightarrow f_x(x, y) = 0 \text{ und } f_y(x, y) = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichungen liefern die sogenannten **stationären Punkte**

$P_i(x_i/y_i)$ mit $i = 1, 2, \dots, n$

$P_1(x_1/y_1), P_2(x_2/y_2), \dots, P_n(x_n/y_n)$

Hinreichende Bedingung für relative Extrema

Für jeden einzelnen stationären Punkt $P_i(x_i/y_i)$ berechnet man

$$D_i = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_i, y_i) & f_{xy}(x_i, y_i) \\ f_{yx}(x_i, y_i) & f_{yy}(x_i, y_i) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_i, y_i) \cdot f_{yy}(x_i, y_i) - [f_{xy}(x_i, y_i)]^2$$

- Ist $D_i = 0$, kann keine Aussage gemacht werden.
- Ist $D_i > 0$, so existieren relative Extrema
 - (a) Ist zusätzlich $f_{xx}(x_i, y_i) < 0$ (bzw. $f_{yy}(x_i, y_i) < 0$), so ist dort ein relatives Maximum.
 - (b) Ist zusätzlich $f_{xx}(x_i, y_i) > 0$ (bzw. $f_{yy}(x_i, y_i) > 0$), so ist dort ein relatives Minimum.
- Ist $D_i < 0$, so liegt dort kein Extremum, aber ein Sattelpunkt.