

# 1 Kegelschnitte

Gegeben ist folgender allgemeinsten Kegelschnitt:

$$K: ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0, \text{ mit } a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$$

Um ihn in Matrixform zu bringen, definieren wir folgende Vektoren und Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Somit geht der Kegelschnitt in folgende Form über:

$$K: \vec{x}^T A \vec{x} + \vec{x}^T \vec{a} + f = 0$$

Nun berechnet man die Eigenwerte der Matrix A und die dazugehörigen Eigenvektoren. Da A eine **symmetrische Matrix** ist, was aus ihrer Konstruktion leicht ersichtlich ist, gilt:

$$A^T = A$$

Bei symmetrischen Matrizen sind die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets orthogonal. Außerdem ist die Dimension des Eigenraums zu einem Eigenwert gleich der algebraischen Vielfachheit des Eigenwerts.

## 1.1 Berechnung der Eigenwerte:

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \underbrace{(a+c)}_{\text{SpA}} \lambda + \underbrace{ac - \frac{b^2}{4}}_{\det A} = 0$$

Diese quadratische Gleichung liefert die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ .

## 1.2 Berechnung der Eigenvektoren zu den zugehörigen Eigenwerten:

$$A \vec{v}_i = \lambda \vec{v}_i \text{ mit } i = 1, 2 \Rightarrow \text{Eigenvektoren } \vec{v}_1 \text{ und } \vec{v}_2$$

Die dann normierten, orthogonalen Eigenvektoren  $\frac{\vec{v}_1}{|\vec{v}_1|}$  und  $\frac{\vec{v}_2}{|\vec{v}_2|}$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1$  und

$\lambda_2$  schreiben wir als Spalten in die Transformationsmatrix T, so dass zusätzlich noch gilt:  
 $\det T = +1$

Eine solche Matrix T ist eine **orthogonale Matrix**, die eine Drehung um den

Koordinatenursprung von  $[x_1; x_2]$  beschreibt. Bei orthogonalen Matrizen gilt:  $T^{-1} = T^T$

Wir suchen ein bezüglich  $[x_1; x_2]$  gedrehtes Koordinatensystem  $[y_1; y_2]$ , so dass keine gemischten Glieder  $x_1x_2$  mehr vorkommen. Dies erreichen wir mit der orthonormalen Eigenvektormatrix T:

## 1.3 Transformation:

$$\vec{x} = T \vec{y} \text{ und somit } \vec{x}^T = \vec{y}^T T^T \text{ mit } \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Der Kegelschnitt transformiert sich auf folgende Form:

$$K: \vec{y}^T \underbrace{T^T A T}_{=D} \vec{y} + \vec{y}^T \underbrace{T^T \vec{a}}_{=\vec{d}} + f = 0, \text{ mit } T^T = T^{-1} \text{ wegen Orthogonalität und } \vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

Ferner gilt:  $T^{-1} A T = D$  ist eine **Diagonalmatrix**, in der nur die Eigenwerte stehen:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$K: \vec{y}^T D \vec{y} + \vec{y}^T \vec{d} + f = 0$$

$$K: \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d_1 y_1 + d_2 y_2 + f = 0$$

## 1.4 Man unterscheidet nun folgende Fälle:

### 1. Fall:

**Beide Eigenwerte sind von Null verschieden**, also  $\det A \neq 0$

(Es existieren zwei quadratische Glieder im gedrehten Koordinatensystem  $[y_1; y_2]$ )

Man kann nun die linearen Glieder durch quadratisches Ergänzen eliminieren, dies entspricht einer **Verschiebung** des Koordinatensystems  $[y_1; y_2]$  aus dessen Ursprung:

**Verschiebung:**

$$y_1 = z_1 - \frac{d_1}{2\lambda_1} \text{ und } y_2 = z_2 - \frac{d_2}{2\lambda_2}$$

Der Kegelschnitt sieht dann wie folgt aus:

$$K: \lambda_1 \left( y_1 + \frac{d_1}{2\lambda_1} \right)^2 + \lambda_2 \left( y_2 + \frac{d_2}{2\lambda_2} \right)^2 = \underbrace{\frac{d_1^2}{4\lambda_1} + \frac{d_2^2}{4\lambda_2} - f}_{=\alpha}$$

$$K: \lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = \alpha$$

Dies ist die **Normalform** eines Kegelschnitts mit  $\det A \neq 0$

Hierbei unterscheidet man folgende zwei Unterfälle:

(a)  $\alpha \neq 0$  und damit kann der Kegelschnitt in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{\lambda_1}{\alpha} z_1^2 + \frac{\lambda_2}{\alpha} z_2^2 = 1$$

i)  $\frac{\lambda_1}{\alpha} > 0$  und  $\frac{\lambda_2}{\alpha} > 0$

Mit  $\frac{\lambda_1}{\alpha} = \frac{1}{a^2}$  und  $\frac{\lambda_2}{\alpha} = \frac{1}{b^2}$  erhält man die **Ellipsengleichung**:  $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$

ii) O. B. d. A.  $\frac{\lambda_1}{\alpha} > 0$  und  $\frac{\lambda_2}{\alpha} < 0$

Mit  $\frac{\lambda_1}{\alpha} = \frac{1}{a^2}$  und  $\frac{\lambda_2}{\alpha} = -\frac{1}{b^2}$  erhält man die **Hyperbelgleichung**:  $\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$

iii)  $\frac{\lambda_1}{\alpha} < 0$  und  $\frac{\lambda_2}{\alpha} < 0$

Mit  $\frac{\lambda_1}{\alpha} = -\frac{1}{a^2}$  und  $\frac{\lambda_2}{\alpha} = -\frac{1}{b^2}$  erhält man:  $-\frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$

Dieser Kegelschnitt enthält **keinen reellen Kurvenpunkt**.

(b)  $\alpha = 0$  und damit kann der Kegelschnitt in folgender Form geschrieben werden:

$$\lambda_1 z_1^2 + \lambda_2 z_2^2 = 0$$

i)  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} < 0$

Mit  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -a^2$  erhält man die **Gleichung eines Geradenpaares**:

$$(z_1 + az_2)(z_1 - az_2) = 0,$$

das sich im Ursprung des  $[z_1; z_2]$ -Koordinatensystems schneidet.

ii)  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} > 0$

Mit  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = a^2$  erhält man:  $z_1^2 + a^2 z_2^2 = 0$ , dieser Kegelschnitt enthält als

**einzigen reellen Kurvenpunkt** den Ursprung des  $[z_1; z_2]$ -Koordinatensystems:

$$z_1 = 0 \text{ und } z_2 = 0.$$

## 2. Fall:

**Mindestens ein Eigenwert ist Null**, also  $\det A = 0$

O. B. d. A. setzen wir  $\lambda_1 \neq 0$  und  $\lambda_2 = 0$

(Es existiert nur ein quadratisches Glied im gedrehten Koordinatensystem  $[y_1; y_2]$ )

Man erhält so die **Normalform** des Kegelschnitts mit  $\det A = 0$ :

$$K: \lambda_1 z_1^2 + d_2 z_2 + f = 0$$

Hierbei unterscheidet man folgende zwei Unterfälle:

(a)  $d_2 \neq 0$

Man erhält die **Parabelgleichung**:  $z_2 = -\frac{\lambda_1}{d_2} z_1^2 - \frac{f}{d_2}$

(b)  $d_2 = 0$

Man erhält die Gleichung:  $z_1^2 = -\frac{f}{\lambda_1}$

i)  $-\frac{f}{\lambda_1} > 0$

Mit  $-\frac{f}{\lambda_1} = a^2$  erhält man die Gleichung eines **parallelen Geradenpaares**:

$$(z_1 + a)(z_1 - a) = 0$$

ii)  $-\frac{f}{\lambda_1} < 0$

Mit  $-\frac{f}{\lambda_1} = -a^2$  erhält man die Gleichung:  $z_1^2 + a^2 = 0$ , also **kein reeller Kurvenpunkt**.

iii)  $f = 0$

Man erhält die Gleichung eines **zusammenfallenden Geradenpaares**:  $z_1^2 = 0$

## 1.5 Die Ellipse

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die **Summe** der Entfernungen zweier fester Punkte  $F_1$  und  $F_2$  (Brennpunkte) konstant ist, heißt **Ellipse**.

Die **Ellipse** ist eine **geschlossene Kurve** mit **vier Scheiteln**  $S_1, S_2, S_3, S_4$ ; sie ist symmetrisch zur **Hauptachse**  $\overline{F_1F_2}$  und zur **Nebenachse**, der Mittelsenkrechten von  $\overline{F_1F_2}$ . Ihre Gleichung lautet:

$$E: \frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

$a$  und  $b$  nennt man **große** bzw. **kleine Halbachse**.

Sie messen die Entfernung vom Mittelpunkt zu den Scheiteln.

$e$  nennt man die **Brennweite**.

Sie mißt die Entfernung vom Mittelpunkt zum Brennpunkt.

Ellipsen entstehen durch Dehnung bzw. Pressung eines Kreises; Ellipsen sind affine Bilder eines Kreises.

Für  $a = b = r$  ergibt sich jeweils eine **Kreisgleichung**.

Der Flächeninhalt einer Ellipse beträgt:  $A = \pi ab$

## 1.6 Die Hyperbel

Der geometrische Ort aller Punkte, für welche die **Differenz** der Entfernungen zweier fester Punkte  $F_1$  und  $F_2$  (Brennpunkte) konstant ist, heißt **Hyperbel**.

Die **Hyperbel** ist eine symmetrische Kurve aus **zwei Ästen** mit **zwei Scheiteln**  $S_1, S_2$ ; sie ist symmetrisch zur **Hauptachse**  $\overline{S_1S_2}$  und zur **Nebenachse**, der Mittelsenkrechten zu  $\overline{S_1S_2}$ . Ihre Gleichung lautet:

$$H_1: \frac{z_1^2}{a^2} - \frac{z_2^2}{b^2} = 1$$

Für große  $|z_1|$  und  $|z_2|$  nähert sich die Hyperbel den **Asymptoten** mit der Gleichung:

$$As: z_2 = \pm \frac{b}{a} z_1$$

Die Hyperbel mit der Gleichung  $H_2: -\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$  heißt **konjugiert** zur obigen Hyperbel  $H_1$ .

Ihre Hauptachse ist die  $z_2$ -Achse; sie ist in  $z_2$ -Richtung geöffnet.

Eine Hyperbel  $H_1$  und die zu ihr konjugierte Hyperbel  $H_2$  haben die gleichen Asymptoten.

Für  $a = b$  ergeben sich orthogonale Asymptoten mit der Gleichung:  $As: z_2 = \pm z_1$  (Winkelhalbierende). Solche Hyperbeln heißen **rechtwinklig** oder **gleichseitig**.

## 1.7 Die Parabel

Der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von einer festen Geraden  $l$ , der **Leitlinie** und einem festen Punkt  $F$ , dem **Brennpunkt**, gleich sind, heißt **Parabel**.

Die **Parabel** besitzt **einen Scheitel**  $S$  und ist symmetrisch zur **Parabelachse**  $\overline{SF}$ .

Ihre Gleichung lautet:

$$P_1: z_2 = \pm a^2 z_1^2 + b \text{ nach oben (unten) geöffnet; } P_2: z_1 = \pm a^2 z_2^2 + b \text{ nach rechts (links) geöffnet.}$$

## 1.8 Mathematische Hintergründe

### Satz:

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten bei symmetrischen Matrizen sind orthogonal.

### Beweis:

Symmetrische Matrix  $A$  mit  $A = A^T$ , verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2$  mit  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Eigenvektorgleichung

$$\lambda_1 \vec{v}_1 = A \vec{v}_1 \quad \text{Multiplikation von links mit } \vec{v}_2^T$$

$$\vec{v}_2^T \lambda_1 \vec{v}_1 = \vec{v}_2^T A \vec{v}_1 \quad \text{und mit } A = A^T \text{ folgt}$$

$$\vec{v}_2^T \lambda_1 \vec{v}_1 = \underbrace{\vec{v}_2^T A^T}_{(A \vec{v}_2)^T} \vec{v}_1 \quad \text{mit } A \vec{v}_2 = \lambda_2 \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2^T \lambda_1 \vec{v}_1 = \underbrace{(\lambda_2 \vec{v}_2)^T}_{\vec{v}_2^T \lambda_2} \vec{v}_1$$

$$\vec{v}_2^T (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{v}_1 = 0$$

$$\underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2)}_{\neq 0} \vec{v}_2^T \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2^T \vec{v}_1 = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 \perp \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_2 \perp \vec{v}_1 \quad \text{q. e. d.}$$

### Satz:

Orthogonale Matrizen  $T$  (für die gilt:  $T^{-1} = T^T$ ) im  $\mathfrak{R}^2$ , mit zusätzlich  $\det T = +1$ , beschreiben Drehungen um den Ursprung mit dem Winkel  $\alpha$ .

### Beweis:

Eine solche Matrix hat die Gestalt:  $T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$

Für eine beliebige Matrix  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  im  $\mathfrak{R}^2$ , für die gilt:  $\det A \neq 0$ ,

berechnet sich die Inverse wie folgt:  $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Auf unsere Fragestellung angewandt, ergibt sich:

$$\det T = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = +1$$

$$T^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det T}_{=+1}} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$T^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow T^{-1} = T^T$$

Hieraus sieht man, dass alle Kriterien für eine Drehung im  $\mathfrak{R}^2$  erfüllt sind. Somit ist  $T$  Drehmatrix um den Ursprung mit dem Winkel  $\alpha$ .