

Komplexe Darstellung von Schwingungen

Komplexe Darstellung der trigonometrischen Funktionen:

$\cos \alpha = \operatorname{Re}[e^{i\alpha}]$ und $\sin \alpha = \operatorname{Im}[e^{i\alpha}]$, da per Definition $e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha$

Definition bezogen auf Schwingungen:

$\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{x}e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}$ hierbei ist

$\hat{x}e^{i\varphi}$ die komplexe Amplitude

$e^{i\omega t}$ die Zeitabhängigkeit der Schwingung

Hat man eine Schwingung in der Darstellung

$$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

so kann man diese in die eulersche Darstellung transformieren und nimmt nur den Realteil

$$x = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

Hat man eine Schwingung in der Darstellung

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

so kann man diese in die eulersche Darstellung transformieren und nimmt nur den Imaginärteil

$$x = \operatorname{Im}[\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Im}[\hat{x}e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

Hat man eine Schwingung in der Darstellung

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

so kann man diese in die eulersche Darstellung transformieren und nimmt nur den Realteil

$$x = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}] = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{i\omega t}]$$

Herleitung der einfachen trigonometrischen Additionstheoreme über komplexe Rechnung

Die polare Darstellung einer komplexen Zahl lautet:

$$\hat{x}e^{\pm i\varphi} = \hat{x}[\cos \varphi \pm i \sin \varphi]$$

Summe oder Differenz von Winkeln

$$e^{i(\alpha \pm \beta)} = e^{i\alpha} \cdot e^{\pm i\beta}$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) + i \sin(\alpha \pm \beta) = (\cos \alpha \pm i \sin \alpha)(\cos \beta \pm i \sin \beta)$$

$$[\cos(\alpha \pm \beta)] + i[\sin(\alpha \pm \beta)] = [\cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta] + i[\sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha]$$

Vergleich der Real- und Imaginärteile der jeweils linken und rechten Seite liefert:

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

Schwingungen in Sinus-Darstellung

Reelle Rechnung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

Mit dem Additionstheorem $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$

$$\hat{x}_1 [\sin(\omega t) \cos \varphi_1 + \cos(\omega t) \sin \varphi_1] + \hat{x}_2 [\sin(\omega t) \cos \varphi_2 + \cos(\omega t) \sin \varphi_2]$$

$$= \hat{x} [\sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi]$$

$$[\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2] \cos(\omega t) + [\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2] \sin(\omega t)$$

$$= [\hat{x} \cos \varphi] \sin(\omega t) + [\hat{x} \sin \varphi] \cos(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich liefert die folgenden zwei Gleichungen

$$[1] \quad \hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin \varphi$$

$$[2] \quad \hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi$$

$$[1]^2 + [2]^2$$

$$[\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2]^2 + [\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2]^2 = \hat{x}^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi]}_{=1}$$

Mit der 1. binomischen Formel folgt

$$[\hat{x}_1 \sin \varphi_1]^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + [\hat{x}_2 \sin \varphi_2]^2 + [\hat{x}_1 \cos \varphi_1]^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + [\hat{x}_2 \cos \varphi_2]^2 = \hat{x}^2$$

Mit dem Additionstheorem

$$\hat{x}_1^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1]}_{=1} + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \underbrace{[\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2]}_{=\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$+ \hat{x}_2^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2]}_{=1} = \hat{x}^2$$

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

[2] : [1] liefert

$$\tan \varphi = \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2}{\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2}{\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2} \quad (\text{Quadranten beachten!})$$

Komplexe Rechnung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \text{Im}[\hat{x}_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}] = \text{Im}[\hat{x}_1 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \text{Im}[\hat{x}_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}] = \text{Im}[\hat{x}_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = \text{Im}[\hat{x} e^{i(\omega t + \varphi)}] = \text{Im}[\hat{x} e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

$$\hat{x}_1 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t} + \hat{x}_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t} = \hat{x} e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{Zeitabhängigkeit abdividieren}$$

$$\hat{x}_1 e^{i\varphi_1} + \hat{x}_2 e^{i\varphi_2} = \hat{x} e^{i\varphi}$$

$$\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + i\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 + i\hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi + i\hat{x} \sin \varphi$$

Separieren nach Real- und Imaginärteil liefert die Gleichungen

$$[1] \quad \hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin \varphi$$

$$[2] \quad \hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi$$

Schwingungen in Cosinus-Darstellung

Reelle Rechnung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

Mit dem Additionstheorem $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$

$$\hat{x}_1 [\cos(\omega t) \cos \varphi_1 - \sin(\omega t) \sin \varphi_1] + \hat{x}_2 [\cos(\omega t) \cos \varphi_2 - \sin(\omega t) \sin \varphi_2]$$

$$= \hat{x} [\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi]$$

$$[\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2] \cos(\omega t) - [\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2] \sin(\omega t)$$

$$= [\hat{x} \cos \varphi] \cos(\omega t) - [\hat{x} \sin \varphi] \sin(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich liefert die folgenden zwei Gleichungen

$$[1] \quad \hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi$$

$$[2] \quad \hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin \varphi$$

$$[1]^2 + [2]^2$$

$$[\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2]^2 + [\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2]^2 = \hat{x}^2 \underbrace{[\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]}_{=1}$$

Mit der 1. binomischen Formel folgt

$$[\hat{x}_1 \cos \varphi_1]^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + [\hat{x}_2 \cos \varphi_2]^2 + [\hat{x}_1 \sin \varphi_1]^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + [\hat{x}_2 \sin \varphi_2]^2 = \hat{x}^2$$

Mit dem Additionstheorem

$$\hat{x}_1^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1]}_{=1} + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \underbrace{[\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2]}_{=\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$+ \hat{x}_2^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2]}_{=1} = \hat{x}^2$$

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

[1] : [2] liefert

$$\tan \varphi = \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2}{\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2}{\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2} \quad (\text{Quadranten beachten!})$$

Komplexe Rechnung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \operatorname{Re}[\hat{x}_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)}] = \operatorname{Re}[\hat{x}_1 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re}[\hat{x}_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}] = \operatorname{Re}[\hat{x}_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\hat{x} e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[\hat{x} e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

$$\hat{x}_1 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\omega t} + \hat{x}_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t} = \hat{x} e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{Zeitabhängigkeit abdividieren}$$

$$\hat{x}_1 e^{i\varphi_1} + \hat{x}_2 e^{i\varphi_2} = \hat{x} e^{i\varphi}$$

$$\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + i\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 + i\hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi + i\hat{x} \sin \varphi$$

Separieren nach Real- und Imaginärteil liefert die Gleichungen

$$[1] \quad \hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin \varphi$$

$$[2] \quad \hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi$$

Schwingungen in Sinus- und Cosinus-Darstellung

Reelle Rechnung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2})$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

Mit den Additionstheoremen

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \text{ und } \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\hat{x}_1 [\sin(\omega t) \cos \varphi_1 + \cos(\omega t) \sin \varphi_1] + \hat{x}_2 [\cos(\omega t) \cos \varphi_2 - \sin(\omega t) \sin \varphi_2]$$

$$= \hat{x} [\cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi]$$

$$[\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2] \cos(\omega t) - [-\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2] \sin(\omega t)$$

$$= [\hat{x} \cos \varphi] \cos(\omega t) - [\hat{x} \sin \varphi] \sin(\omega t)$$

Koeffizientenvergleich liefert die folgenden zwei Gleichungen

$$[1] \quad \hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi$$

$$[2] \quad -\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin \varphi$$

$$[1]^2 + [2]^2$$

$$[\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2]^2 + [-\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2]^2 = \hat{x}^2 \underbrace{[\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi]}_{=1}$$

Mit der 1. binomischen Formel folgt

$$[\hat{x}_1 \sin \varphi_1]^2 + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + [\hat{x}_2 \cos \varphi_2]^2 + [\hat{x}_1 \cos \varphi_1]^2 - 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + [\hat{x}_2 \sin \varphi_2]^2 = \hat{x}^2$$

Mit dem Additionstheorem

$$\hat{x}_1^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1]}_{=1} + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \underbrace{[\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1]}_{=\sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$+ \hat{x}_2^2 \underbrace{[\sin^2 \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2]}_{=1} = \hat{x}^2$$

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1 \hat{x}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

[2] : [1] liefert

$$\tan \varphi = \frac{\hat{x}_2 \sin \varphi_2 - \hat{x}_1 \cos \varphi_1}{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{x}_2 \sin \varphi_2 - \hat{x}_1 \cos \varphi_1}{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2} \text{ (Quadranten beachten!)}$$

Komplexe Rechnung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{Re}[\hat{x}_1 e^{i(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2})}] = \operatorname{Re}[\hat{x}_1 e^{i(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \operatorname{Re}[\hat{x}_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}] = \operatorname{Re}[\hat{x}_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi) = \operatorname{Re}[\hat{x} e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[\hat{x} e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

$$x_1(t) + x_2(t) = x(t)$$

$$\hat{x}_1 e^{i(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{i\omega t} + \hat{x}_2 e^{i\varphi_2} \cdot e^{i\omega t} = \hat{x} e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} \text{ Zeitabhängigkeit abdividieren}$$

$$\hat{x}_1 e^{i(\varphi_1 - \frac{\pi}{2})} + \hat{x}_2 e^{i\varphi_2} = \hat{x} e^{i\varphi}$$

$$\hat{x}_1 \cos(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}) + i\hat{x}_1 \sin(\varphi_1 - \frac{\pi}{2}) + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 + i\hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi + i\hat{x} \sin \varphi$$

$$\hat{x}_1 \sin(\varphi_1) - i\hat{x}_1 \cos(\varphi_1) + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 + i\hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi + i\hat{x} \sin \varphi$$

Separieren nach Real- und Imaginärteil liefert die Gleichungen

$$[1] \quad \hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2 = \hat{x} \cos \varphi$$

$$[2] \quad -\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2 = \hat{x} \sin \varphi$$

Grafische Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz

Vektorielle Addition der zugehörigen Zeiger

Die Standard-Cosinus-Funktion zeigt in Richtung der positiven Realteil-Achse.
Die Standard-Sinus-Schwingung zeigt in Richtung der negativen Imaginärteil-Achse.

Hieraus ergibt sich:

$\hat{x}e^{j(\omega t)}$ ist ein Zeiger der Länge \hat{x} und zeigt in Richtung der positiven Realteil-Achse, also definiert als der Standard-Cosinus.

$\hat{x}e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ ist ein Zeiger der Länge \hat{x} und zeigt in Richtung der negativen Imaginärteil-Achse, also definiert als der Standard-Sinus.

Denn:

Ein Sinus-Zeiger ist ein um $\frac{\pi}{2}$ im Uhrzeigersinn (mathematisch negativer Drehsinn) verschobener Cosinus-Zeiger.

Der Sinus-Zeiger weist also in die negative Imaginärteil-Achse, da der Cosinus-Zeiger in positive Realteil-Achse weist.

Strategie zur grafischen Superposition von Schwingungen gleicher Frequenz

Es ist am einfachsten, alle an der Überlagerung beteiligten trigonometrischen Funktionen in Cosinus-Form zu bringen (da die Cosinus-Form auf die positive Realteil-Achse bezogen wird). Alle einzelnen Zeiger starten der Einfachheit halber im Ursprung. Die Superposition erhält man durch Vektoraddition der einzelnen Zeiger (Parallelogramm- oder Polygon-Regel) und ist dann auch in der Cosinus-Form zu deuten und startet somit ebenfalls im Ursprung.

Was tun, wenn nach einer Differenz gefragt ist?

Vektoriell bedeutet dies die Addition des zugehörigen Gegen-Zeigers.

$-\hat{x}e^{j(\omega t + \varphi)}$ ist der zugehörige Gegen-Zeiger zu $\hat{x}e^{j(\omega t + \varphi)}$, er weist also exakt in die Gegenrichtung (Punktspiegelung des Zeigers am Ursprung).

Beispiele:

$$2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) = 2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Zeiger der Länge 2 vom Ursprung und bezüglich der positiven Realteil-Achse um 45° im Uhrzeigersinn gedreht.

$$-2 \sin(\omega t + \frac{\pi}{4}) = -2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = -2 \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Zeiger der Länge 2 vom Ursprung und bezüglich der positiven Realteil-Achse um 45° im Uhrzeigersinn gedreht und anschließend am Ursprung punktspiegelt.

Musteraufgabe mit Lösung

Die harmonische Schwingung $y(t) = 3 \cos(\omega t) + a \sin(\omega t)$ lässt sich in der Form $y(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ darstellen.

Wie muss $a > 0$ gewählt werden, damit sich als Phasenwinkel $\varphi = -30^\circ$ ergibt?
Welche Amplitude $A > 0$ besitzt dann diese Schwingung?

Lösung

Rechnerisch

Phasenwinkel in Bogenmaß eingesetzt: $\varphi = -30^\circ = -\frac{\pi}{6}$

$$A \cos(\omega t - \frac{\pi}{6}) = 3 \cos(\omega t) + a \sin(\omega t)$$

Alles in Cosinus-Form gebracht und danach in komplexe Schreibweise umgewandelt

$$A e^{i(\omega t - \frac{\pi}{6})} = 3 e^{i\omega t} + a e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$$

Potenzgesetze anwenden

$$A e^{-i\frac{\pi}{6}} \cdot e^{i\omega t} = 3 \cdot e^{i\omega t} + a e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{i\omega t} \quad \text{Zeitabhängigkeit abdividieren}$$

$$A e^{-i\frac{\pi}{6}} = 3 + a e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad \text{umschreiben in polare Darstellung}$$

$$A \cos \frac{\pi}{6} - iA \sin \frac{\pi}{6} = 3 + a \cos \frac{\pi}{2} - ia \sin \frac{\pi}{2}$$

Hierbei ist eine Tabelle über die wichtigsten Winkel sehr nützlich

α	x	sin	cos	tan
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	-
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
180°	π	0	-1	0

α	x	sin	cos	tan
180°	π	0	-1	0
210°	$\frac{7}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$
225°	$\frac{5}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1
240°	$\frac{4}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
270°	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	-
300°	$\frac{5}{3}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
315°	$\frac{7}{4}\pi$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1
330°	$\frac{11}{6}\pi$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
360°	2π	0	1	0

Für die zugehörigen negativen Werte gilt: $\sin(-x) = -\sin(x)$ und $\cos(-x) = \cos(x)$

Diese Werte in obige Gleichung eingesetzt

$$A \frac{1}{2}\sqrt{3} - iA \frac{1}{2} = 3 + a \cdot 0 - ia \cdot 1$$

$$[\frac{1}{2}\sqrt{3}A] - i[\frac{1}{2}A] = [3] - i[a]$$

Vergleich der jeweiligen Real- und Imaginärteilen der linken und rechten Seite

$$[1] \quad \frac{1}{2}\sqrt{3}A = 3$$

$$[2] \quad \frac{1}{2}A = a$$

Aus [1] folgt

$$A = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Aus [2] folgt damit

$$a = \frac{1}{2}A = \sqrt{3}$$