1 Komplexe Zahlen

1.1 Definition:

Die Menge $C = \{x + iy \mid x, y \in R; i^2 = -1\}$ heißt Menge der komplexen Zahlen;

i heißt imaginäre Einheit.

Für $y = 0$ erhält man die reellen Zahlen, für $x = 0$ die rein imaginären Zahlen.

Die Menge R der reellen Zahlen läßt sich als Punkt auf der x-Achse (Zahlenstrahl) darstellen. Zur Darstellung der Menge C faßt man komplexe Zahlen auf als reelle Zahlenpaare, die sich als Vektoren (Zeiger) oder als Punkte einer [x,y]-Ebene darstellen lassen.

1.2 Darstellung einer komplexen Zahl z:

Kartesische Form:

$z = x + iy$

x-Achse	**reelle** Achse
y-Achse	**imaginäre** Achse
$x = \mathrm{Re}(z)$	**Realteil** von z
$y = \mathrm{Im}(z)$	**Imaginärteil** von z
$\bar{z} = x - iy$	**Konjugiert komplexe** Zahl von z
$\lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	**Betrag** von z

Polarkoordinaten-Form:

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

r	**Abstand** zum Ursprung
φ	**Winkel** mit der positiven reellen Achse
$\bar{z} = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$	**Konjugiert komplexe** Zahl von z

Exponentialform:

$z = re^{i\varphi}$

Bezeichnungen wie bei der Polarkoordinaten-Form.

$\bar{z} = re^{-i\varphi}$ **Konjugiert komplexe** Zahl von z

Bezeichnungen:

$r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$	**Betrag** der komplexen Zahl z, $r \geq 0$
$\varphi = \arg z$	**Argument** (Winkel) von z, $\varphi \in R$

Beziehungen zwischen den unterschiedlichen Darstellungen:

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \quad (1.\text{ oder } 4.\text{ Quadrant}) \\ \varphi = \arctan\frac{y}{x} \pm \pi & \text{für } x < 0 \quad (2.\text{ oder } 3.\text{ Quadrant}) \end{cases}$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

1.3 Rechnen mit komplexen Zahlen:

$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$

Addition und Subtraktion:

- **Kartesische Form:**
  Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen in kartesischer Form erfolgt wie bei Vektoren koordinatenweise.
  $z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$

Multiplikation und Division:

- **Kartesische Form:**
  Multiplikation: Einfaches Ausmultiplizieren
  $$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{i^2}_{-1} y_1y_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$
  Division: Nenner reell machen $\Rightarrow$ (Erweitern mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners)
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \ldots = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

- **Exponentialform:**
  Multiplikation: Beträge multiplizieren, Argumente addieren
  $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$
  Bei der Multiplikation einer komplexen Zahl z mit der rein imaginären Zahl $w = e^{i\alpha}$ wird der Zeiger von z um den Winkel α gedreht.
  Division: Beträge dividieren, Argumente subtrahieren
  $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Potenzen mit rationalen Hochzahlen:

- **Exponentialform:**
  Potenzierung: Betrag potenzieren, Argument multiplizieren
  $z^k = (re^{i\varphi})^k = r^k e^{ik\varphi}$

Wurzeln aus komplexen Zahlen:

- **Formel von Moivre**
  Für jede komplexe Zahl in Exponentialform $w = re^{i\varphi} \neq 0$ hat die Gleichung $z^n = w = re^{i\varphi}$ genau n verschiedene Lösungen, nämlich die n n-ten Wurzeln aus w. Alle n-ten Wurzeln erhält man durch potenzieren der kleinsten Wurzel – der Wurzel mit dem kleinsten positiven Winkel. Alle n verschiedenen Wurzeln aus w liegen auf einem Kreis um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$. Sie bilden ein regelmäßiges n-Eck.
  Diese n Wurzeln berechnet man wie folgt:
  $$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n})} \quad \text{mit} \quad k = 0, \ldots, n-1$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

© j. gilg 04

1.4 Rechnen mit Beträgen:

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z| = \left|re^{i\varphi}\right| = r \quad \text{mit} \quad \left|e^{i\varphi}\right| = 1$$

Es gilt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \quad \text{mit } z_2 \neq 0, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$|z - w|$ ist der Abstand der Punkte z und w in der Zahlenebene.

$|z - z_0| = r$ Kreis mit Mittelpunkt z_0 und Radius r

1.5 Rechnen mit konjugiert komplexen Zahlen:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad \text{mit } w \neq 0$$

$$\bar{\bar{z}} = z$$

$$z + \bar{z} = 2x = 2\,\mathrm{Re}(z) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$z - \bar{z} = i \cdot 2y = i \cdot 2\,\mathrm{Im}(z) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(z) = -\tfrac{i}{2}(z - \bar{z})$$

$$z\bar{z} = |z|^2 \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

1.6 Polynome mit komplexen Koeffizienten:

"Komplexe Zerlegung"

Fundamentalsatz der Algebra:

Jedes Polynom $f(z)$ mit komplexen Koeffizienten $a_k \in C$, $i = 0,...,n \in N$, $a_n \neq 0$, $z \in C$ der Form $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$

läßt sich als ein Produkt von n Linearfaktoren schreiben:

$$f(z) = a_n (z - b_1)(z - b_2) \cdots (z - b_n)$$

Die komplexen Zahlen $b_k \in C$, $k = 1,...,n \in N$ sind die Nullstellen von $f(z)$.

1.7 Polynome mit reellen Koeffizienten:

"reelle Zerlegung"

Es gilt, da alle Koeffizienten reell sind: $\bar{f}(z) = f(\bar{z})$. Jedes Polynom $f(z)$ mit reellen Koeffizienten $a_k \in R$, $i = 0,...,n \in N$, $a_n \neq 0$, $z \in C$ der Form $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$ läßt sich als ein Produkt von Linearfaktoren und/oder quadratischen Faktoren mit reellen Koeffizienten schreiben, wobei die quadratischen Faktoren keine reellen Nullstellen haben und folglich im Reellen nicht zerlegbar sind.

Hat das Polynom $f(z)$ mit reellen Koeffizienten eine Nullstelle b, so gilt:

$$f(b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{f}(b) = \bar{0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(\bar{b}) = 0,$$

d.h. auch $\bar{b}$ ist Nullstelle und umgekehrt, da $\bar{\bar{b}} = b$ ist. Diese beiden konjugiert komplexen Nullstellen zusammengefaßt ergeben einen quadratischen Term mit reellen Koeffizienten:

$$(z - b)(z - \bar{b}) = z^2 - (b + \bar{b})z + b\bar{b} = z^2 - \underbrace{2 \cdot \mathrm{Re}(b)}_{\in R} \cdot z + \underbrace{|b|^2}_{\in R}$$

© 2004 Jürgen Gilg · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor