1 Laplace-Transformation

1.1 Rechenregeln für Laplace-Transformierte

$$L\{f(t)\} = F(s)$$
$$L\{e^{at} \cdot f(t)\} = F(s-a)$$
$$L\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - f(0)$$
$$L\{f''(t)\} = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$$
$$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - s^{n-3} \cdot f''(0) - \ldots - \frac{df^{(n-1)}(0)}{dt^{n-1}}$$

1.2 Einige Laplace-Transformierte

$$L\{1\} = \frac{1}{s} \qquad L\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$
$$L\{e^{\pm at}\} = \frac{1}{s \mp a} \qquad L\{t^n \cdot e^{\pm at}\} = \frac{n!}{(s \mp a)^{n+1}}$$
$$L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2} \qquad L\{\cos(at)\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

1.3 Anwendung auf eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung

Wie lautet die Laplace-Transformierte Gleichung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und der Störfunktion $f(t)$ und folgender Anfangsbedingung?

$$a\dot{y}(t) + by(t) = f(t) \text{ mit den Anfangsbedingungen } y(0) = y_0$$

Man bildet die Laplace-Transformierte:

$$a \cdot [s \cdot Y(s) - y_0] + b \cdot [Y(s)] = F(s)$$

Algebraisches Auflösen nach $Y(s)$ liefert:

$$Y(s) = \frac{ay_0}{as + b} + \frac{F(s)}{as + b}$$

Es bleibt die Rücktransformierte zu bilden.

1.4 Anwendung auf eine Schwingungsdifferentialgleichung

Wie lautet die Laplace-Transformierte Gleichung einer allgemeinen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten und der Störfunktion $f(t)$ und folgenden Anfangsbedingungen?

$$a\ddot{y}(t)+b\dot{y}(t)+cy(t)=f(t) \text{ mit den Anfangsbedingungen } y(0)=y_0,\ \dot{y}(0)=\dot{y}_0$$

Man bildet die Laplace-Transformierte:

$$a\cdot[s^2\cdot Y(s)-s\cdot y_0-\dot{y}_0]+b\cdot[s\cdot Y(s)-y_0]+c\cdot[Y(s)]=F(s)$$

Algebraisches Auflösen nach $Y(s)$ liefert:

$$Y(s)=\frac{(as+b)y_0}{as^2+bs+c}+\frac{a\dot{y}_0}{as^2+bs+c}+\frac{F(s)}{as^2+bs+c}$$

Dieses Resultat (wenn möglich) in Partialbrüche zerlegen und die Rücktransformierte bilden.

1.5 Anwendung auf eine Differentialgleichungssysteme

$$\dot{\vec{x}}(t)=\underline{A}\cdot\vec{x}(t)+\vec{f}(t) \text{ mit den Anfangsbedingungen } \vec{x}(0)=\vec{x}_0$$

Man bildet die Laplace-Transformierte:

$$s\cdot\vec{x}(s)-\vec{x}_0=\underline{A}\cdot\vec{x}(s)+\vec{F}(s)$$

Algebraisches Auflösen nach der Matrixgleichung $\vec{x}(s)$ liefert:

$$\left(s\cdot\underline{E}-\underline{A}\right)\cdot\vec{x}(s)=\vec{x}_0+\vec{F}(s)$$
$$\vec{x}(s)=\left(s\cdot\underline{E}-\underline{A}\right)^{-1}\cdot\vec{x}_0+\left(s\cdot\underline{E}-\underline{A}\right)^{-1}\cdot\vec{F}(s)$$

Hierzu ist es nötig lineare Gleichungssysteme zu lösen und/oder inverse Matrizen zu bilden.

1.5.1 Hilfreich

Bilden der Inversen einer 2×2-Matrix

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \underline{A}^{-1}=\frac{1}{\det\underline{A}}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det\underline{A}=ad-cb$$

1.6 Rechenbeispiel für eine Schwingungsdifferentialgleichung

Gegeben ist folgendes Anfangswertproblem:

$$\ddot{y}(t) - 3\dot{y}(t) + 2y(t) = e^{3t} \text{ mit } y(0) = y_0 = 1 \text{ und } \dot{y}(0) = \dot{y}_0 = 0$$

Führt man die Laplace-Transformation durch, so erhält man:

$$s^2 \cdot Y(s) - s - 3(s \cdot Y(s) - 1) + 2Y(s) = \frac{1}{s-3}$$

Hieraus folgt durch relativ einfache Rechnung

$$Y(s) \cdot (s^2 - 3s + 2) = s - 3 + \frac{1}{s-3}$$

die rechte Seite auf einen Nenner gebracht

$$Y(s) \cdot (s^2 - 3s + 2) = \frac{s^2 - 6s + 10}{s-3}$$

Linearfaktorzerlegung für den quadratischen Term auf der linken Seite liefert

$$s^2 - 3s + 2 = (s-1)(s-2)$$

Mit dieser Zerlegung ergibt sich

$$Y(s) = \frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)}$$

Die Partialbruchzerlegung von $Y(s)$ sieht folgendermaßen aus:

$$\frac{s^2 - 6s + 10}{(s-1)(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s-3}$$

Die Zuhaltemethode liefert $A = \frac{5}{2}, B = -2, C = \frac{1}{2}$

$$Y(s) = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{s-1} - 2 \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-3}$$

Hierbei muß dieser Ausdruck wieder zurücktransformiert werden (man bildet die inverse Laplace-Transformation), dies liefert

$$L^{-1}\{Y(s)\} = y(t) = \frac{5}{2}e^t - 2e^{2t} + \frac{1}{2}e^{3t}$$

1.7 Rechenbeispiel für ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung

Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{t} \text{ mit dem Anfangswertvektor } \vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilden der Laplace-Transformierten liefert die Matrix-Gleichung

$$s \cdot \vec{x}(s) - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(s) + \frac{1}{s-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Weitere Umformung liefert

$$\begin{pmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{s-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bilden der inversen Matrix

$$\begin{pmatrix} s-1 & -4 \\ -1 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{s^2 - 2s - 3} \begin{pmatrix} s-1 & 4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-3)} \begin{pmatrix} s-1 & 4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$\vec{x}(s) = \frac{1}{(s+1)(s-3)} \begin{pmatrix} s-1 & 4 \\ 1 & s-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 + \dfrac{1}{s-1} \\ 1 + \dfrac{1}{s-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{(s+1)(s-3)} \begin{pmatrix} 2s + \dfrac{4}{s-1} + 3 \\ s + \dfrac{1}{s-1} + 2 \end{pmatrix}$$

Erweitern auf den Hauptnenner und Zerlegen in Partialbrüche mit Hilfe der Zuhaltemethode liefert

$$\vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{2s^2 + s + 1}{(s+1)(s-3)(s-1)} \\ \dfrac{s^2 + s - 1}{(s+1)(s-3)(s-1)} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(s) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{11}{4} \cdot \dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{s-1} \\ -\dfrac{1}{8} \cdot \dfrac{1}{s+1} + \dfrac{11}{8} \cdot \dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{s-1} \end{pmatrix}$$

Rücktransformation liefert dann

$$L^{-1}\{\vec{x}(s)\} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{4} e^{-t} + \dfrac{11}{4} e^{3t} - e^{t} \\ -\dfrac{1}{8} e^{-t} + \dfrac{11}{8} e^{3t} - \dfrac{1}{4} e^{t} \end{pmatrix}$$

1.8 Beispiele für die Rücktransformation einiger Standardfunktionen

$$L^{-1}\left\{c\cdot\frac{1}{s-a}\right\} = ce^{at}$$

$$L^{-1}\left\{c\cdot\frac{1}{(s-a)^2}\right\} = cte^{at}$$

$$L^{-1}\left\{c\cdot\frac{b}{(s-a)^2+b^2}\right\} = ce^{at}\sin(bt)$$

$$L^{-1}\left\{c\cdot\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}\right\} = ce^{at}\cos(bt)$$

1.9 Praktische Anwendung

$$Y(s) = \frac{s}{s^2-4s+9} = \frac{s}{(s-2)^2+5} = \frac{(s-2)+2}{(s-2)^2+5} = \frac{s-2}{(s-2)^2+5} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{(s-2)^2+5}$$

$$Y(s) = \frac{s-2}{(s-2)^2+5} + \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{(s-2)^2+5}$$

Nach langen strategischen Umformungen erkennt man die Funktionen

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-4s+9}\right\} = e^{2t}\cos(\sqrt{5}t) + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{2t}\sin(\sqrt{5}t)$$

1.9.1 Strategie

Bei quadratischem Nenner erst prüfen ob Nennernullstellen vorhanden sind.

- existieren Nennernullstellen
  macht man Linearfaktorzerlegung und anschließend Partialbruchzerlegung

- existieren keine Nennernullstellen (obiger Fall)
  so ergänzt man den Nenner quadratisch und sortiert geschickt