Aufgabe 1:

Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x}) = \vec{V}_{\lambda,\mu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ \frac{1}{2}x^2 + y + \lambda z \\ \mu y \end{pmatrix}$, mit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(a) Man berechne die Arbeit (das Arbeitsintegral) längs der Schraubenlinie C, mit $C: x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = ht$ mit $t \in (-\infty;\infty)$ vom Punkt $P(r/0/0)$ zum Punkt $Q(-r/0/h\pi)$.

(b) Weiter bestimme man $\mu = \mu(\lambda)$ so, dass die Arbeit vom Weg unabhängig ist.

Lösung zu Aufgabe 1

Die Rotation ist rot $\vec{V}_{\lambda,\mu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\lambda + \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(a) Das Arbeitsintegral längs der Schraubenlinie $C: x = r\cos t,\ y = r\sin t,\ z = ht$ von $P(r/0/0)$ zu $Q(-r/0/h\pi)$ fordert $t \in [0;\pi]$

$$C: \vec{x} = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ ht \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0;\pi] \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix}$$

Das Arbeitsintegral ist definiert als

$$A = \int_C \vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_C \vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x}(t))\,\mathrm{d}\vec{x}(t) = \int_C \vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}\,(t)\,\mathrm{d}t$$

$$A = \int_{t=0}^{\pi} \begin{pmatrix} r^2\cos^2 t + r^2\cos t\sin t \\ \frac{1}{2}r^2\cos^2 t + r\sin t + \lambda ht \\ \mu r\sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -r\sin t \\ r\cos t \\ h \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$A = \int_{t=0}^{\pi} (-r^3\cos^2 t\sin t - r^3\cos t\sin^2 t + \tfrac{1}{2}r^3\cos^3 t$$
$$+r^2\cos t\sin t + \lambda rht\cos t + \mu rh\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$A = \int_{t=0}^{\pi} (-r^3\cos^2 t\sin t - r^3\cos t\sin^2 t + \tfrac{1}{2}r^3\cos t(1 - \sin^2 t)$$
$$+r^2\cos t\sin t + \lambda rht\cos t + \mu rh\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$A = \int_{t=0}^{\pi} (-r^3\cos^2 t\sin t - \tfrac{3}{2}r^3\cos t\sin^2 t + \tfrac{1}{2}r^3\cos t$$
$$+\tfrac{1}{2}r^2\sin 2t + \lambda rht\cos t + \mu rh\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$A = [\tfrac{1}{3}r^3\cos^3 t - \tfrac{1}{2}r^3\sin^3 t + \tfrac{1}{2}r^3\sin t - \tfrac{1}{4}r^2\cos 2t$$
$$+\lambda rh(t\sin t + \cos t) - \mu rh\cos t]_0^{\pi}$$

$$A = -\tfrac{2}{3}r^3 + \lambda rh(-1-1) - \mu rh(-1-1) = -\tfrac{2}{3}r^3 - 2\lambda rh + 2\mu rh$$

$$A = 2rh(\mu - \lambda) - \tfrac{2}{3}r^3$$

(b) Die Rotation verschwindet für

$-\lambda + \mu = 0 \Leftrightarrow \mu = \lambda$

Aufgabe 2:

Gegeben ist das Kraftfeld

$$\vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x}) = \vec{V}_{\lambda,\mu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} (\lambda^2+\mu+1)x^4z^2\cos y \\ -\lambda x^5 z^2 \sin y \\ (2\mu-4)x^5 z\cos y \end{pmatrix}, \text{ mit } \lambda,\mu \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die Arbeit von $P(0/0/0)$ nach $Q(1/1/1)$ in Abhängigkeit von λ und μ längs folgendes Weges:
C: Polygonzug geknickt bei (0/0/1) und (1/0/1).

(b) Für welche λ und μ ist $\vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x})$ ein Gradientenfeld?

(c) Gibt es eine Potentialfunktion $U(\vec{x}) = U(x,y,z)$ von $\vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x})$ mit $U(x,\frac{\pi}{2},z) = 0$ und $U(1,0,2) = 12$?
Wenn ja, bestimmen Sie sie.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Rotation ist $\operatorname{rot} \vec{V}_{\lambda,\mu}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -2(\mu-\lambda-2)zx^5\sin y \\ 2(\lambda^2-4\mu+11)x^4z\cos y \\ (\mu-5\lambda+\lambda^2+1)x^4z^2\sin y \end{pmatrix}$

(a) Der Weg erstreckt sich

$$C_1 : \vec{x} = t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 1 \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$C_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 1 \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$C_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \text{ für } 0 \le t \le 1 \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Das Arbeitsintegral ist definiert als

$$A = \int_C \vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_C \vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x}(t))\,\mathrm{d}\vec{x}(t) = \int_C \vec{V}_{\lambda,\mu}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\,\mathrm{d}t$$

$$A_1 = \int_{t=0}^{1} \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \mathrm{d}t = 0$$

$$A_2 = \int_{t=0}^{1} \begin{pmatrix} (\lambda^2 + \mu + 1)t^4 \\ 0 \\ (2\mu - 4)t^5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{1} (\lambda^2 + \mu + 1)t^4 \, \mathrm{d}t$$

$$A_2 = \left[\tfrac{1}{5}(\lambda^2 + \mu + 1)t^5\right]_0^1 = \tfrac{1}{5}(\lambda^2 + \mu + 1)$$

$$A_3 = \int_{t=0}^{1} \begin{pmatrix} (\lambda^2 + \mu + 1)\cos t \\ -\lambda \sin t \\ (2\mu - 4)\cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_{t=0}^{1} -\lambda \sin t \, \mathrm{d}t$$

$$A_3 = \lambda[\cos t]_0^1 = \lambda(\cos 1 - 1) = \lambda(\cos 1 - 1)$$

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \tfrac{1}{5}(\lambda^2 + \mu + 1) + \lambda(\cos 1 - 1)$$

$$A = \tfrac{1}{5}\lambda^2 - \lambda + \lambda \cos 1 + \tfrac{1}{5}\mu + \tfrac{1}{5}$$

(b) Die Rotation verschwindet für

[1] $\mu - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow \mu = \lambda + 2$

[2] $\lambda^2 - 4\mu + 11 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4(\lambda + 2) + 11 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3 \Rightarrow \mu_1 = 3,\ \mu_2 = 5$

[3] $\mu - 5\lambda + \lambda^2 + 1 = 0$

Obige Möglichekeiten prüfen mit [3]

$\lambda_1 = 1$ und $\mu_1 = 3$ oder $\lambda_2 = 3$ und $\mu_2 = 5$

(c) Das Vektorfeld für z.B. $\lambda_1 = 1$ und $\mu_1 = 3$ lautet

$$\vec{V}_{\lambda=1,\mu=3}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 5x^4 z^2 \cos y \\ -x^5 z^2 \sin y \\ 2x^5 z \cos y \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt eine Potentialfunktion:

$$U(x, y, z) = \int 5x^4 z^2 \cos y \, \mathrm{d}x = x^5 z^2 \cos y + f(y, z)$$

$$U(x, y, z) = \int -x^5 z^2 \sin y \, \mathrm{d}y = x^5 z^2 \cos y + f(x, z)$$

$$U(x, y, z) = \int 2x^5 z \cos y \, \mathrm{d}z = x^5 z^2 \cos y + f(x, y)$$

Somit ist die Potentialfunktion

$$U(x, y, z) = x^5 z^2 \cos y + C$$

Zusatzforderung $U(x, \frac{\pi}{2}, z) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

$$U(x, y, z) = x^5 z^2 \cos y$$

Zusatzforderung $U(1, 0, 2) = 12 \Leftrightarrow 4 + C = 12 \Rightarrow C = 8$

$$U(x, y, z) = x^5 z^2 \cos y + 8$$

Das Vektorfeld für z.B. $\lambda_2 = 3$ und $\mu_2 = 5$ lautet

$$\vec{V}_{\lambda=3,\mu=5}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 15x^4 z^2 \cos y \\ -3x^5 z^2 \sin y \\ 6x^5 z \cos y \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt eine Potentialfunktion:

$U(x,y,z) = \int 15x^4z^2\cos y\,\mathrm{d}x = 3x^5z^2\cos y + f(y,z)$

$U(x,y,z) = \int -3x^5z^2\sin y\,\mathrm{d}y = 3x^5z^2\cos y + f(x,z)$

$U(x,y,z) = \int 6x^5z\cos y\,\mathrm{d}z = 3x^5z^2\cos y + f(x,y)$

Somit ist die Potentialfunktion

$U(x,y,z) = 3x^5z^2\cos y + C$

Zusatzforderung $U(x,\frac{\pi}{2},z) = 0 \Leftrightarrow C = 0$

$U(x,y,z) = 3x^5z^2\cos y$

Zusatzforderung $U(1,0,2) = 12 \Leftrightarrow 12 + C = 12 \Rightarrow C = 0$

$U(x,y,z) = 3x^5z^2\cos y$

Aufgabe 3:

Gegeben ist das Kraftfeld $\vec{V}(\vec{x}) = \vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2\sin y + 2x \\ x^3\cos y + \sin y \end{pmatrix}$.

(a) Liegt ein Gradientenfeld vor?

(b) Berechnen Sie möglichst einfach die Arbeit vom Punkt $P(0/\pi)$ zum Punkt $Q(1/\frac{\pi}{2})$.

Lösung zu Aufgabe 3

(a) Die Integrabilitätsbedingung

$\frac{\partial}{\partial y}[3x^2\sin y + 2x] = \frac{\partial}{\partial x}[x^3\cos y + \sin y]$

$3x^2\cos y = 3x^2\cos y$

ist erfüllt, somit liegt ein Gradientenfeld vor.

(b) Bestimmung der Potentialfunktion

$U(x,y) = \int 3x^2\sin y + 2x\,\mathrm{d}x = x^3\sin y + x^2 + f(y)$

$U(x,y) = \int x^3\cos y + \sin y\,\mathrm{d}y = x^3\sin y - \cos y + f(x)$

Somit ist die Potentialfunktion

$U(x,y) = x^3\sin y - \cos y + x^2 + C$

Die Arbeit von P nach Q kann man bequem über die Potentialdifferenz bestimmen

$A = U(1,\frac{\pi}{2}) - U(0,\pi) = 2 + C - (-1 + C) = 3$

Aufgabe 4:

Gegeben ist das ebene Vektorfeld $\vec{V}_\lambda(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ v(\vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x\cosh y - \lambda y \\ -\cos x\sinh y + \lambda x \end{pmatrix}$, wobei λ ein reeller Parameter ist.

(a) Für welche λ ist $\vec{V}_\lambda(\vec{x})$ ein Gradientenfeld?
Für diesen Fall berechne man die Potentialfunktion $U(\vec{x})$.

(b) Sei C_1 die geradlinige Verbindung von $O(0/0)$ nach $P(\frac{\pi}{2}/y_0)$.

Man ermittle die Arbeit und zeige, dass diese unabhängig von λ und y_0 ist.

(c) Sei C_2 die positiv orientierte Einheitskreislinie.
Bestimmen Sie $I_2(\lambda) = \int_{C_2} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$.

Lösung zu Aufgabe 4

(a) Die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}[\sin x \cosh y - \lambda y] = \frac{\partial}{\partial x}[-\cos x \sinh y + \lambda x]$$

$$\sin x \sinh y - \lambda = \sin x \sinh y + \lambda$$

ist nur erfüllt für $\lambda = 0$, somit liegt ein Gradientenfeld vor.

Bestimmung der Potentialfunktion

$$U(x,y) = \int \sin x \cosh y\,\mathrm{d}x = -\cosh y \cos x + f(y)$$

$$U(x,y) = \int -\cos x \sinh y\,\mathrm{d}y = -\cosh y \cos x + f(x)$$

Somit ist die Potentialfunktion mit $\cosh y = \frac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})$

$$U(x,y) = -\tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y})\cos x + C$$

(b) Die Arbeit von O nach P kann man bequem über die Potentialdifferenz bestimmen

$$A = U(\tfrac{\pi}{2}, y_0) - U(0,0) = C - (-1 + C) = 1$$

(c) Bestimmung des Arbeitsintegrals

$$C_2 : x = \cos t,\ y = \sin t,\ t \in [0; 2\pi]$$

$$C_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ für } t \in [0; 2\pi] \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$I_2(\lambda) = \int_{C_2} u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y = \int_{C_2} \vec{V}_\lambda(\vec{x}) \bullet \mathrm{d}\vec{x}$$

Zerlegen des Vektorfeldes in einen wirbelfreien Anteil und einen in Abhängigkeit von λ

$$\vec{V}_\lambda(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \sin x \cosh y \\ -\cos x \sinh y \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Der wirbelfreie Teil liefert für das Integral keinen Beitrag (Startpunkt = Endpunkt)

$$A = \int_{C_2} \vec{V}_\lambda(\vec{x}(t)) \bullet \dot{\vec{x}}\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} \lambda \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$

$$A = \int_{t=0}^{2\pi} \lambda(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{2\pi} \lambda\,\mathrm{d}t = 2\pi\lambda$$

Aufgabe 5:

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \\ y - x \end{pmatrix}$.

(a) Für welche stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ist

$$\vec{V}_g(x,y) = g(y) \cdot \vec{V}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \cdot g(y) \\ (y-x) \cdot g(y) \end{pmatrix}$$ wirbelfrei in $\{(x,y) : y > 0\}$?

(b) Man bestimme für diesen Fall eine Potentialfunktion $U(x,y)$.

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial y}[2y \cdot g(y)] = \frac{\partial}{\partial x}[(y-x) \cdot g(y)]$$

$$2g(y) + 2yg'(y) = -g(y) \Leftrightarrow 2yg'(y) = -3g(y)$$

$$\frac{g'(y)}{g(y)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{y} \text{ mit } \{(x,y) : y > 0\}$$

$$\int \frac{g'(y)}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int -\frac{3}{2}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$$

$$\ln(g(y)) = -\frac{3}{2}\ln y + c$$

$$g(y) = Cy^{-\frac{3}{2}} \text{ mit } y > 0$$

(b) Das Vektorfeld lautet nun

$$\vec{V}_g(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \cdot Cy^{-\frac{3}{2}} \\ (y-x) \cdot Cy^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2y^{-\frac{1}{2}} \\ y^{-\frac{1}{2}} - xy^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt eine Potentialfunktion:

$$U(x,y) = C\int 2y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2Cxy^{-\frac{1}{2}} + f(y)$$

$$U(x,y) = C\int (y^{-\frac{1}{2}} - xy^{-\frac{3}{2}})\,\mathrm{d}y = 2Cy^{\frac{1}{2}} + 2Cxy^{-\frac{1}{2}} + f(x)$$

Die Potentialfunktion ist damit

$$U(x,y) = 2C(y^{\frac{1}{2}} + xy^{-\frac{1}{2}}) + A$$

Aufgabe 6:

Im $\mathbb{R}^3$ sei das Vektorfeld $\vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 2(x+y+z) \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Man berechne die Divergenz und die Rotation von $\vec{V}(x,y,z)$

(b) Man berechne das Arbeitsintegral $\int\limits_C \vec{V}(x,y,z)\,\mathrm{d}\vec{x}$, wobei C die Kurve mit der Parametrisierung

$$C : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0;\pi] \text{ ist.}$$

Lösung zu Aufgabe 6

(a) $\operatorname{div} \vec{V}(x,y,z) = 0$

$$\operatorname{rot} \vec{V}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) $A = \int\limits_C \vec{V}(x,y,z)\, d\vec{x} = \int\limits_C \vec{V}(\vec{x}(t))\, \dot{\vec{x}}\, dt$

Für die Kurve gilt

$$C : \vec{x} = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \\ \sin t \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0;\pi] \Rightarrow \dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$A = \int\limits_{t=0}^{\pi} \begin{pmatrix} -\cos t \\ -2 \\ 2\cos t + 4 + 2\sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt = \int\limits_{t=0}^{\pi} 3\sin t \cos t + 2\cos^2 t + 4\cos t\, dt$$

$$A = [\tfrac{3}{2}\sin^2 t + t + \tfrac{1}{2}\sin 2t + 4\sin t]_0^{\pi} = \pi$$

Aufgabe 7:
Es sei die folgende Funktion auf $\mathbb{R}^2$ gegeben.
$f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$

(a) Man bestimme die Bereiche, in denen f null, positiv bzw. negativ ist.
Man veranschauliche dies an einer Zeichnung!

(b) Man berechne sämtliche kritischen Punkte von f (d.h.grad $f(x,y) = \vec{0}$) und charakterisiere sie anhand der Zeichnung (Minimum, Maximum, Sattelpunkt, etc.).

Lösung zu Aufgabe 7

(a) Die Null-Linien sind:

$x = 0 \Rightarrow y$-Achse

$y = 0 \Rightarrow x$-Achse

$1 - x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow$ Kreis um Urspung $O(0/0)$ mit Radius $r = 1$

(b) $$\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} -2x^2y + y(-x^2 - y^2 + 1) \\ -2xy^2 + x(-x^2 - y^2 + 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1 - y^2 - 3x^2) \\ x(1 - 3y^2 - x^2) \end{pmatrix}$$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0}$

$y(1 - y^2 - 3x^2) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $x = \pm 1$

$x(1 - 3y^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $y = \pm 1$

Folgende Punkte ergeben sich:

$E_1(0/0),\ E_{2,3}(0/\pm 1),\ E_{4,5}(0/\pm\sqrt{\frac{1}{3}}),\ E_{6,7}(\pm 1/0),\ E_{8,9}(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}/0)$

Die Hesse-Matrix ist

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} -6xy & -3x^2-3y^2+1 \\ -3x^2-3y^2+1 & -6xy \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist

$D(x,y) = 6(x^2+y^2)+18x^2y^2-9(x^4+y^4)-1$

oder teilweise nach den Variablen faktorisiert

$D(x,y) = x^2(6+18y^2-9x^2)+y^2(6-9y^2)-1$

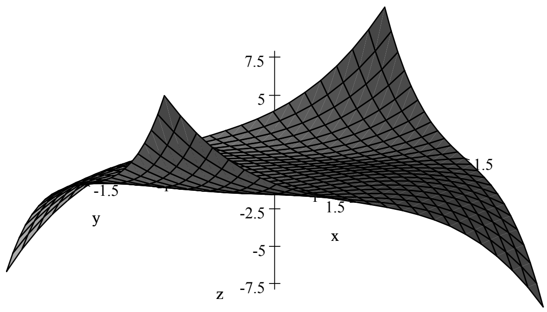
$D_{E_1(0/0)} = -1 < 0$ Sattel

$D_{E_{2,3}(0/\pm 1)} = -4 < 0$ Sattel

$D_{E_{4,5}(0/\pm\sqrt{\frac{1}{3}})} = 2 > 0 \Rightarrow f_{xx}(0,\pm\sqrt{\frac{1}{3}}) = 0$

$D_{E_{6,7}(\pm 1/0)} = -4 < 0$ Sattel

$D_{E_{8,9}(\pm\sqrt{\frac{1}{3}}/0)} = 0$ keine Aussage



Aufgabe 8:
Es sei die Funktion f durch $f(x,y) = x^3+3xy^2-3xy$ gegeben.

(a) Man skizziere die Bereiche von f, in denen die Funktion null, positiv bzw. negativ ist.

(b) Bestimmen Sie die Lage und Größe aller relativen Extrema und charakterisieren Sie sie

(i) über die Skizze aus (a)

(ii) durch Überprüfen der hinreichenden Bedingung (Hesse-Matrix).

Lösung zu Aufgabe 8

(a) $x^3+3xy^2-3xy = x(x^2+3(y^2-y)) = x(x^2+3(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4})$

Die Null-Linien sind:

$x = 0 \Rightarrow y$-Achse

$$4x^2 + 12(y - \tfrac{1}{2})^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{4}} + \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{\frac{1}{12}} = 1 \Rightarrow \text{Ellipse}$$

Ellipse um $M(0/\frac{1}{2})$ mit x-Halbachse $\frac{1}{2}$ und y-Halbachse $\frac{1}{\sqrt{12}}$

(b) $\operatorname{grad} f(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + 3y^2 - 3y \\ -3x + 6xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x^2 + y^2 - y) \\ 3x(2y - 1) \end{pmatrix}$

$\operatorname{grad} f(x,y) = \vec{0}$

$3(x^2 + y^2 - y) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$

$3x(2y - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0,\ y = 1$

Folgende Punkte ergeben sich:

$E_1(0/0),\ E_2(0/1),\ E_3(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}),\ E_4(-\frac{1}{2}/\frac{1}{2})$

Die Hesse-Matrix ist

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y - 3 \\ 6y - 3 & 6x \end{pmatrix}$$

Die Determinante ist

$D(x,y) = 36(x^2 - y^2 + y) - 9$

oder teilweise nach den Variablen faktorisiert

$D(x,y) = 36x^2 + 36(y - y^2) - 9$

$D_{E_1(0/0)} = -9 < 0$ Sattel

$D_{E_2(0/1)} = -9 < 0$ Sattel

$D_{E_3(\frac{1}{2}/\frac{1}{2})} = 9 > 0 \Rightarrow f_{xx} > 0$ Minimum

$D_{E_4(-\frac{1}{2}/\frac{1}{2})} = 9 > 0 \Rightarrow f_{xx} < 0$ Maximum