Aufgabe 1:
Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch und bestimmen Sie den Typ dieser Gleichung.
Erklären Sie jeden Schritt geometrisch und notieren Sie jede Art von Transformation in Matrixschreibweise.
$2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 = 1$

Lösung zu Aufgabe 1
$2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 = 1$
Umschreiben in Matrixschreibweise

$$\vec{x}^T \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x} - 1 = 0$$

Bestimmung der Eigenwerte und normierten orthogonalen Eigenvektoren der symmetrischen Matrix

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 2-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 24\lambda + 28 = -(\lambda - 7)(\lambda + 2)^2$$

Die Eigenwerte sind $\lambda_{1,2} = -2$ und $\lambda_3 = 7$
Die Eigenvektoren zu den Eigenwerten
$\lambda_{1,2} = -2$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow v_1 = s,\ v_2 = t,\ v_3 = 2s + 2t$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda_3 = 7$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & -5 & -2 & 0 \\ -2 & -2 & -8 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \\ 0 & -9 & -18 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} -5 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right. \Rightarrow v_3 = t,\ v_2 = -2t,$$

$v_1 = -2t$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der zweite Eigenvektor zu $\lambda_{1,2} = -2,$ der orthogonal ist erhält man mit dem Vektorprodukt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ Normiert: } \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die Transformationsmatrix ist

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Die Hauptachsentransformation liefert nun die Normalform

$$\vec{u}^T \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{u} - 1 = 0$$

$-2u^2 + 7v^2 - 2w^2 - 1 = 0$ oder

$2u^2 - 7v^2 + 2w^2 + 1 = 0$

Dies ist ein zweischaliges Rotationshyperboloid.

Aufgabe 2:

Für welche Werte von k hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & k-2 \\ k & 2 & 2 \\ 1 & k+1 & 2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k+4 \\ k^2+2k+1 \\ 2(k+1) \end{pmatrix}$$

(a) eine eindeutige Lösung,

(b) eine Lösungsschar (unendlich viele Lösungen),

(c) keine Lösung?

Im Fall (b) sind die Lösungen anzugeben.

Lösung zu Aufgabe 2

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & k-2 \\ k & 2 & 2 \\ 1 & k+1 & 2k \end{vmatrix} = k^3 + k^2 - 2k = k(k+2)(k-1)$$

(a) Das LGS besitzt eine eindeutige Lösung, wenn die Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist

$k \in \mathbb{R} \backslash \{-2, 0, 1\}$

(b) Für den Fall, dass die Koeffizientendeterminante Null wird, muss untersucht werden, ob es unendlich viele Lösungen gibt oder das LGS unlösbar ist.

$k = -2$

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -4 & -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow x_3 = \frac{1}{2},\ x_2 = t,\ x_1 = t$

$k = 0$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ unlösbar

$k = 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x_3 = t,\ x_2 = -1 - t,\ x_1 = 6$

Aufgabe 3:
In der untenstehenden linearen Transformation sind die x_i durch die y_i auszudrücken. (Bildung der inversen Matrix). Was ist Voraussetzung, dass eine inverse Matrix existiert und was bedeutet dies geometrisch für die Zeilen- bzw. Spaltenvektoren der Matrix?

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 3
Bestimmen der inversen Matrix

$$\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 6 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -11 & 12 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 27 & -30 & 0 & 7 & -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 24 & 19 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -11 & 12 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 27 & -30 & 0 & 7 & -4 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 24 & 19 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 54 & -4 & -44 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 24 & 0 & 0 & 192 & -16 & -152 \\ 0 & -1 & 0 & 10 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & -6 & 54 & -4 & -44 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 24 & -2 & -19 \\ 0 & 3 & 0 & -30 & 3 & 24 \\ 0 & 0 & 3 & -27 & 2 & 22 \end{array}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 24 & -2 & -19 \\ -30 & 3 & 24 \\ -27 & 2 & 22 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4:
Gegeben sei die Ebene $E:\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = 1$.

Längs der Geraden $g\,:\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ falle ein Lichtstrahl auf E und werde reflektiert.
Längs welcher Geraden h verläuft der reflektierte Strahl ?

Lösung zu Aufgabe 4
Bestimmung des Schnittpunkts von g mit E :
$2(2 + t) + 6 + 2t - 5(2 + t) = 1 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow S(1/4/1)$
Bestimmung des Spiegelpunkts A^* des Aufpunkts $A(2/6/2)$ der Geraden g bezüglich der Ebene E.
Erstellen einer orthogonalen Gerden k zu E durch A :

$$k\,:\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Bestimmung des Schnittpunkts (Lotfußpunkts) F von k mit E :
$2(2 + 2t) + 6 + t - 5(2 - 5t) = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{30} \Rightarrow F(\frac{31}{15}/\frac{181}{30}/\frac{11}{6})$
Bestimmung des Spiegelpunkts A^* von A bezüglich F
$\vec{f} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{a}^*) \Rightarrow A^*(\frac{32}{15}/\frac{91}{15}/\frac{5}{3})$
Die reflektierte Gerade h verläuft durch die Punkte A^* und S

$$h\,:\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{17}{15} \\ \frac{31}{15} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t^* \begin{pmatrix} 17 \\ 31 \\ 10 \end{pmatrix} \text{ mit } t, t^* \in \mathbb{R}$$

Aufgabe 5:

Ein Lichtstrahl fällt längs der Geraden $g\,:\,\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$, ausgehend vom Punkt $A(2/1/3)$, auf ein System dreier paarweise senkrechter Spiegel und wird an diesen reflektiert. Der Einfachheit halber nimmt man an, dass die Spiegel in drei Koordinatenebenen eines kartesischen Koordinatensystems liegen.

(a) Auf welche Koordinatenebene trifft der Strahl zuerst auf?

(b) Betrachten Sie nur einen Oktanden des kartesischen Koordinatensystems. Welchen und warum?

(c) Warum ist die Reflexionsrichtung einfacher zu berechnen als in der Aufgabe vorher?

(d) Verfolgen Sie den Weg des Lichtstrahls und geben Sie insbesondere an, längs welcher Geraden h der Lichtstrahl nach den drei Spiegelungen das System wieder verläßt.

(e) Welchen Abstand hat der Koordinatenursprung $O(0/0/0)$ von g?

(e) Welchen Abstand haben einfallender und reflektierter Lichtstrahl?

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Schnittpunkt der Geraden g mit den Koordinaten-Ebenen:

Schnittpunkt mit der $[x_1, x_2]$-Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$

Schnittpunkt mit der $[x_1, x_3]$-Ebene: $x_2 = 0 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow S_{1,3}(1/0/1)$

Schnittpunkt mit der $[x_2, x_3]$-Ebene: $x_1 = 0 \Rightarrow t = -2$

Der betragsmäßig kleinste Wert von t liefert den nächstliegendsten Punkt von A auf einer der Koordinaten-Ebene.

(b) Da ideal reflektiert wird und aus dem 1. Oktanden eingestrahlt wird, bleibt der Strahl im 1. Oktanden.

(c) Die Reflexion erfolgt jeweils an einer Koordianten-Ebene, d.h. bei Reflexion an der $[x_1, x_2]$-Ebene wechselt lediglich das Vorzeichen der x_3-Koordinate des RV's der einfallenden Geraden.

$[x_1, x_3]$-Ebene wechselt lediglich das Vorzeichen der x_2-Koordinate des RV's der einfallenden Geraden.

$[x_2, x_3]$-Ebene wechselt lediglich das Vorzeichen der x_1-Koordinate des RV's der einfallenden Geraden.

(d) Reflektierte Gerade von g bezüglich der $[x_1, x_3]$-Ebene:

$$g_{1,3} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Nun ist zu untersuchen, welche der verbleibenden 2 Koordinaten-Ebenen zuerst erreicht wird:

Schnittpunkt von $g_{1,3}$ mit der $[x_1, x_2]$-Ebene: $x_3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_{1,2}(\frac{1}{2}/\frac{1}{2}/0)$

Schnittpunkt von $g_{1,3}$ mit der $[x_2, x_3]$-Ebene: $x_1 = 0 \Rightarrow t = -1$

Der betragsmäßig kleinste Wert von t liefert den nächstliegendsten Punkt von $S_{1,3}$ auf einer der verbleibenden Koordinaten-Ebene.

Reflektierte Gerade von $g_{1,3}$ bezüglich der $[x_1, x_2]$-Ebene:

$$g_{1,2} : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Nun muss noch der Schnittpunkt mit der letzten Koordinaten-Ebene ($[x_2, x_3]$-Ebene) bestimmt werden:

Schnittpunkt von $g_{1,2}$ mit der $[x_2, x_3]$-Ebene: $x_1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow S_{2,3}(0/1/1)$

Die reflektierte Gerade h lautet also:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Der reflektierte Strahl ist parallel zum einfallenden Strahl, wie das bei dreifacher Reflexion an den 3 Koordinaten-Ebenen auch sein muss.

(e) Der Abstand von g zum Ursprung O

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Erstellen einer orthogonalen Ebene E_O zu g durch O

$E_O : x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

Bestimmung des Schnittpunkts von g mit E_O

$2 + t + 1 + t + 2(3 + 2t) = 0 \Rightarrow 6t = -9 \Rightarrow t = -\frac{3}{2} \Rightarrow S(\frac{1}{2}/-\frac{1}{2}/0)$

Der Abstand des Ursprungs ist damit

$d_{O,S} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 0} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

(e) Erstellen einer orthogonalen Ebene E_A zu g durch $A(2/1/3)$

$E_A : x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$

Bestimmen des Schnittpunkts von h mit E_A

$-t + 1 - t + 2(1 - 2t) = 9 \Rightarrow -6t = 6 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow T(1/2/3)$

Der Abstand der Punkte A und T ist gleich dem Abstand der beiden Geraden g und h

$d_{AT} = d_{g,h} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}$

Aufgabe 6:

(a) Für welche Werte von t sind die folgenden Vektoren

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ linear abhängig.}$$

(b) Für welche t sind $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ orthogonal?

(c) Man berechne einen Normalenvektor der von $\vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ aufgespannten Ebene (in Abhängigkeit von t).

Lösung zu Aufgabe 6

(a) Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn ihr Spatprodukt verschwindet.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{vmatrix} = -2t - 2 = -2(t+1)$$

Die Determinante wird Null für

$-2(t+1) = 0 \Rightarrow t_1 = -1$

(b) Zwei Vektoren sind orthogonal, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = -1 - 2 + t = 0 \Rightarrow t_2 = 3$$

(c) Den Normalenvektor erhält man mit dem Vektorprodukt

$$\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t-2 \\ -t-1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7:

Für welche s ist das inhomogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -s^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -s \\ 2 \end{pmatrix}$$

(a) eindeutig lösbar,

(b) unlösbar,

(c) mehrdeutig lösbar?

Für den letzten Fall bestimme man alle Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 7

(a) $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -s^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2s^2 - 2 = 2(s-1)(s+1)$$

Das LGS hat eine eideutige Lösung, wenn die Koeffizientendeterminate von Null verschieden ist.

$s \in \mathbb{R} \backslash \{\pm 1\}$

Wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, dann hat das inhomogene LGS entweder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung.

Für $s = 1$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \text{ unlösbar}$$

Für $s = -1$:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow x_3 = t,\ x_2 = -1 - t,\ x_1 = -1 - 2t$

Aufgabe 8:

In Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$ seien die Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\sin\alpha \end{pmatrix}$ und der Vektor $\vec{b}_\alpha = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 2\pi - 2\alpha \\ \frac{3}{2}\pi - \alpha \end{pmatrix}$ gegeben.

(a) Man berechne den Rang und die Determinante von A_α.

(b) Für welche α ist das homogene Gleichungssystem $A_\alpha \cdot \vec{x} = \vec{0}$
(i) eindeutig lösbar,
(ii) unlösbar,
(iii) mehrdeutig lösbar?

(c) Für welche α ist das inhomogene Gleichungssystem $A_\alpha \cdot \vec{x} = \vec{b}_\alpha$
(i) eindeutig lösbar,
(ii) unlösbar,
(iii) mehrdeutig lösbar?
Man bestimme im letzten Fall die Lösungen.

Lösung zu Aufgabe 8

(a) $\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\sin\alpha \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\sin\alpha \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 - \sin\alpha \end{array}$

Der Rang ist 3 für $1 - \sin\alpha \neq 0$,
Der Rang ist 2 für $1 - \sin\alpha = 0$.

Die Determinante ist $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -\sin\alpha \end{vmatrix} = 1 - \sin\alpha$

(b) Das zugehörige homogene LGS hat unendlich viele Lösungen für, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet

$1 - \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Es hat eine eindeutige Lösung (die triviale Lösung), wenn die Koeffizientendeterminante vonNull verschieden ist.

$\sin\alpha \neq 1$

Ein homogenes LGS ist immer lösbar.

(c) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2\pi \\ 1 & 2 & 1 & 2\pi - 2\alpha \\ 0 & 1 & -\sin\alpha & \frac{3}{2}\pi - \alpha \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2\pi \\ 0 & -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 1 & -\sin\alpha & \frac{3}{2}\pi - \alpha \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2\pi \\ 0 & -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 1 - \sin\alpha & \frac{3}{2}\pi + \alpha \end{array}\right)$$

Eindeutig lösbar, wenn die Koeffizientendeterminante von Null verschieden ist.

$\sin\alpha \neq 1$

Wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet, dann hat das inhomogene LGS entweder unendlich viele Lösungen oder keine Lösung.

$\sin\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Für $k = -1$, also $\alpha = -\frac{3}{2}\pi$ gibt es unendlich viele Lösungen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 2\pi \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2\pi - 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Für $k \neq -1$, also $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$ ist es unlösbar.