



Elektrizitätslehre

Zusammenfassung

- **Grundgrößen und ihre Einheiten**
- **Das elektrische Feld**
- **Bewegungen im elektrischen Feld**
- **Das magnetische Feld**
- **Wechselstromlehre**

Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.

Inhaltsverzeichnis

1. Wichtige Beobachtungen	4
2. Grundgrößen und ihre Definition	4
2.1. Die Ladung	4
2.2. Die Stromstärke	5
3. Das elektrische Feld	5
3.1. Die elektrische Feldstärke	5
3.2. Elektrische Feldlinien	6
3.2.1. Der Feldlinienverlauf eines radialen Feldes	6
3.2.2. Der Feldlinienverlauf eines homogenen Feldes	6
3.3. Das elektrische Potential	7
3.4. Die elektrische Spannung	7
3.5. Die Flächenladungsdichte	8
3.6. Die Energiedichte	8
3.7. Der Ohmsche Widerstand	8
3.7.1. Reihenschaltung von Widerständen	9
3.7.2. Parallelschaltung von Widerständen	9
3.8. Spannungsquellen mit Innenwiderstand	10
3.9. Kleine Netzwerke und Kirchhoffsche Gesetze	10
3.9.1. Knotenregel	11
3.9.2. Maschenregel	11
3.10. Der Kondensator	12
3.10.1. Die Kapazität eines beliebigen Kondensators	12
3.10.2. Die Kapazität eines Plattenkondensators	12
3.10.3. Die Kapazität eines Kugelkondensators	12
3.10.4. Parallelschaltung von Kondensatoren	12
3.10.5. Reihenschaltung von Kondensatoren	13
3.10.6. Dielektrikum	13
3.10.7. Auswirkungen von Dielektrika auf das elektrische Feld	13
3.10.8. Energie im Kondensator	13
3.10.9. Kraft zwischen den Platten eines Kondensators	13
4. Bewegung von Elektronen im elektrischen Feld	14
4.1. Ablenkung des Elektronenstrahls im elektrischen Feld	14
5. Das Magnetfeld	16
5.1. Die Kraft auf Ströme im Magnetfeld	16

5.2. Das homogene Magnetfeld im Inneren einer langgestreckten Spule	16
5.3. Induktionsvorgänge im Magnetfeld	16
5.3.1. Grundversuch I	16
5.3.2. Grundversuch II	17
5.4. Die Selbstinduktion	18
5.5. Die Energie im Magnetfeld	18
6. Bewegung von Elektronen im Magnetfeld	19
6.1. Die Lorentzkraft	19
6.2. Schraubenbahn von Elektronen im Magnetfeld	19
6.2.1. Ganghöhe der Schraubenlinie	20
6.3. Der Hall-Effekt	20
7. Elektromagnetische Schwingungen	20
7.1. Der elektromagnetische Schwingkreis	20
7.1.1. Energieumsetzung beim Schwingkreis	21
8. Wechselstromlehre	21
8.1. Erzeugung sinusförmiger Wechselspannung	21
8.2. Effektivwerte	22
8.3. Verschiedene R , C und L Schaltungen im Wechselstromkreis	23
8.3.1. Ohmscher Wirkwiderstand R im Wechselstromkreis	23
8.3.2. Kondensator C im Wechselstromkreis	24
8.3.3. C und R in Reihe im Wechselstromkreis	25
8.3.4. Ideale Spule L im Wechselstromkreis	26
8.3.5. L und R in Reihe (reale Spule) im Wechselstromkreis	28
8.3.6. C und L in Reihe im Wechselstromkreis	29
8.3.7. R , C und L in Reihe im Wechselstromkreis (Siebkette)	30
8.3.8. C und L parallel im Wechselstromkreis (Sperrkreis)	32
8.3.9. C parallel zu L und R (diese in Reihe) im Wechselstromkreis	34
8.3.10. R , C und L parallel im Wechselstromkreis	36
8.4. Die Leistung im Wechselstromkreis	37

1. Wichtige Beobachtungen

- Ladung existiert in genau zwei Arten:
Positive Ladung - im Atomkern (Protonen) und negative Ladung - in der Atomhülle (Elektronen).
Diese sind die kleinsten Ladungsmengen und werden somit Elementarladungen e genannt.
- Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.
- Führt man gleiche Mengen entgegengesetzter Ladungen nahe zusammen, so heben sie sich in ihrer Wirkung nach außen hin auf - sie neutralisieren sich.
- Nähert man einen geladenen Körper einem neutralen (zunächst ungeladenen) Leiter, dann werden auf ihm die leicht beweglichen Ladungen getrennt. Diesen Vorgang nennt man elektrische Influenz.
- In einer Spannungsquelle (Batterie) werden Ladungen unter Energieaufwand voneinander getrennt. Diese Energie steht dem angeschlossenen Verbraucher zur Verfügung.
Am Minuspol herrscht Elektronenüberschuß,
am Pluspol herrscht Elektronenmangel.
Zwischen beiden entsteht somit ein elektrisches Feld.
- Fließende (bewegte) Ladung wird als Strom bezeichnet. Dieser ist von einem Magnetfeld umgeben.
Die konventionelle Stromrichtung zeigt im äußeren Stromkreis vom Pluspol der Stromquelle zu deren Minuspol.
- Werden bewegte Ladungen abgebremst, so beobachtet man Erwärmung oder Licht.

2. Grundgrößen und ihre Definition

2.1. Die Ladung

Reibt man ein Wolltuch an einem Kunststoffstab, so stellt man fest, daß diese sich nach der Trennung anziehen. Zwei geriebene Kunststoffstäbe stoßen sich jedoch ab. Die hierbei kraftausübenden Objekte nennt man Ladung Q und wird in Coulomb [C] gemessen.

Ladung existiert in genau zwei Arten: Positive Ladung - im Atomkern (Protonen) und negative Ladung - in der Atomhülle (Elektronen). Diese sind die kleinsten Ladungsmengen und werden somit Elementarladungen e genannt.

Ihre Ladung beträgt $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Jede mögliche Ladungsmenge kann folglich nur ein ganzzahliges Vielfaches dieser Elementarladungen sein.

Elektrische Ladungen sind

Quellen (positive Ladungen - Feldlinien beginnen hier) oder

Senken (negative Ladungen - Feldlinien enden hier)

eines sogenannten elektrischen Feldes.
Gleichnamige Ladungen stoßen sich ab,
ungleichnamige Ladungen ziehen sich an.
Ladung kann nicht erzeugt werden.

2.2. Die Stromstärke

Die Stromstärke I in einem Leiter beliebigen Querschnitts A ist definiert als die Ladung ΔQ , die in der Zeit Δt diese Fläche A durchfließt und wird in Ampere [A] gemessen.

Es gilt also

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Oder wenn der Ladungsfluß zeitlich nicht konstant ist:

$$I = \frac{dQ}{dt} = Q$$

3. Das elektrische Feld

Im Raum um elektrische Ladungen besteht ein elektrisches Feld. In ihm erfahren Ladungen Kräfte. Die Tangenten an die elektrischen Feldlinien geben in jedem Punkt des Feldes die Richtung dieser Feldkräfte an. Die Pfeile an den elektrischen Feldlinien geben die Richtung der Feldkraft an, die eine positive Probeladung erfährt. Elektrische Feldlinien beginnen an positiven und enden an negativen Ladungen; sie beginnen oder enden nie im freien Raum.

3.1. Die elektrische Feldstärke

Die Kraft \vec{F} , die eine Probeladung q im elektrischen Feld erfährt, ist zu q proportional.

Es gilt:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

In einem homogenen elektrischen Feld, z.B. eines Plattenkondensators gilt:

$$E = \frac{U}{d}$$

E ist in jedem Punkt gleich groß.

Für ein radiales elektrische Feld gilt:

Zwei Ladungen Q_1 und Q_2 mit dem Abstand r erfahren die Kraft

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q_1Q_2}{r^2}$$

nach dem Coulomb-Gesetz. Die Kraft F zeigt in Richtung der Verbindungslinie der beiden Ladungsmitten und wirkt abstoßend, wenn Q_1 und Q_2 gleichnamig sind und anziehend, wenn Q_1 und Q_2 ungleichnamig sind.

Die Feldstärke einer Ladung Q im radialen Feld berechnet sich:

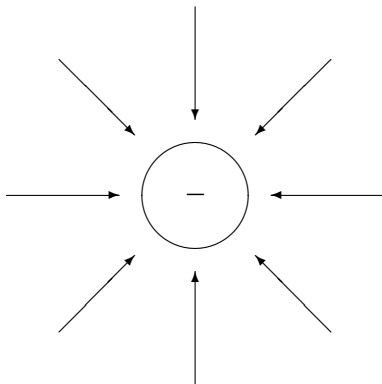
$$E = \frac{F}{Q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

3.2. Elektrische Feldlinien

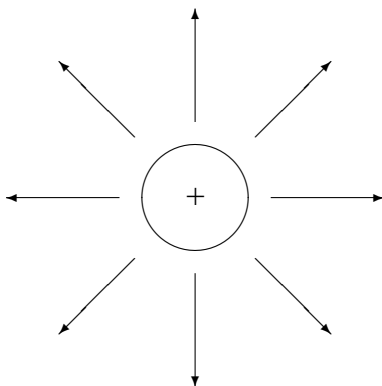
- In jedem Punkt eines Raumes ist die Richtung des elektrischen Feldes \vec{E} in diesem Punkt gegeben durch die Richtung der Tangente an die durch diesen Punkt verlaufenden Feldlinie.
- Die Dichte der Feldlinien ist ein Maß für den Betrag des elektrischen Feldes.
- Feldlinien beginnen an positiven Ladungen und enden an negativen Ladungen.
- Sie stehen senkrecht zur Oberfläche, an der sie austreten oder enden.

3.2.1. Der Feldlinienverlauf eines radialen Feldes

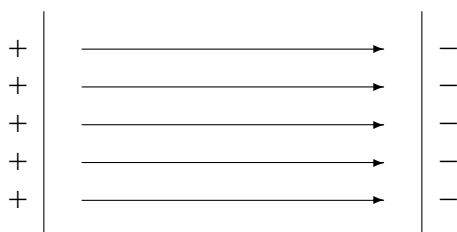
- Der Feldlinienverlauf einer kugelförmigen negativen Ladungsverteilung



- Der Feldlinienverlauf einer kugelförmigen positiven Ladungsverteilung



3.2.2. Der Feldlinienverlauf eines homogenen Feldes



3.3. Das elektrische Potential

Das elektrische Feld wirkt auf eine Ladung als Kraftfeld, also gelten im Prinzip dieselben Aussagen über Arbeit und potentielle Energie wie in mechanischen Kraftfeldern (z. B. Gravitation). Die Arbeit W , die ein elektrisches Feld aufbringen muß um eine Ladung q vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 zu bringen, berechnet sich demnach folgendermaßen:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Das elektrische Potential wird definiert als die Arbeit, die man aufbringen muß, um eine Ladung q aus dem Unendlichen (bzw. von einem definierten Bezugspunkt) an den Punkt P zu bringen, geteilt durch die Ladung q . Somit ist das Potential nur noch vom Feld abhängig und nicht mehr von der Ladung. Seine Einheit ist Volt [V].

$$\varphi(P) = - \int_{\infty}^P \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \frac{W_{\infty \rightarrow P}}{q}$$

Dabei gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Das Feld verrichtet eine positive Arbeit an der Ladung**

Dies bedeutet: Kraft und Weg besitzen parallele Komponenten.

Dies entspricht einer Abnahme der potentiellen Energie $\Delta E_{\text{pot}} < 0$ bzw. einer negativen, nach außen abgeführten Arbeit.

- **Das Feld verrichtet eine negative Arbeit an der Ladung**

Dies bedeutet: Kraft und Weg besitzen antiparallele Komponenten.

Dies entspricht einer Zunahme der potentiellen Energie bzw. einer positiven, von außen zugeführten Arbeit $\Delta E_{\text{pot}} > 0$, einer Arbeit, die von außen aufgewendet werden muß, um die Ladung längs des Wegs zu transportieren.

Die potentielle Energie einer Ladung q im Punkt P eines elektrischen Feldes ist somit:

$$E_{\text{pot}}(P) = q \cdot \varphi(P)$$

3.4. Die elektrische Spannung

Die Spannung ist wie die Arbeit ein Skalar und von der überführten Ladung q unabhängig.

Die elektrische Spannung U_{12} zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ist gleich der Potentialdifferenz zwischen den beiden Punkten:

$$U_{12} = \varphi(P_2) - \varphi(P_1)$$

Ihre Einheit ist Volt [V].

Für ein homogenes elektrisches Feld (parallele Feldlinien, z. B. Kondensator) mit der Feldstärke E_{hom} gilt:

Die elektrische Spannung U_{12} zwischen zwei Punkten ist der Quotient aus der Überführungsarbeit W_{12} , (welche die Feldkräfte eines homogenen elektrischen Feldes an der überführten Ladung q während der parallelen Strecke d verrichten), und der Ladung q - jetzt kann man sie skalar berechnen:

$$U_{12} = \frac{W_{12}}{q} = \frac{F_{12} \cdot d}{q} = \frac{E_{\text{hom}} \cdot q \cdot d}{q} = E_{\text{hom}} \cdot d$$

3.5. Die Flächenladungsdichte

Unter der Flächenladungsdichte σ einer über die Fläche A gleichmäßig verteilten Ladung Q , versteht man den Quotienten:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$$

Die elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}}$ gibt die wichtige Beziehung zwischen der Flächendichte σ der felderzeugenden Ladung Q (Ursache des Feldes) und der durch sie erzeugten Feldstärke E (Wirkung des Feldes) an.

3.6. Die Energiedichte

Die Energiedichte ist der Quotient aus der Energie mit dem Volumen:

$$\rho_{\text{el}} = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon_r E^2$$

3.7. Der Ohmsche Widerstand

Bewegen sich Ladungen in einem elektrischen Leiter, so werden diese aufgrund von Zusammenstößen mit anderen Teilchen dauernd abgebremst und abgelenkt - sie unterliegen einer Reibungskraft. Diese Reibungskraft kann durch eine von einem elektrischen Feld herrührende Kraft überwunden werden.

Man beobachtet einen linearen Zusammenhang zwischen Stromstärke I und Spannung U . Die Proportionalitätskonstante wird als Widerstand R bezeichnet und in Ohm $[\Omega]$ gemessen.

Es gilt: $R = \frac{U}{I}$

Ist der Widerstand ein drahtförmiger Leiter der Länge l und von konstantem Querschnitt A , so findet man experimentell:

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Eine Folge dieser Reibung ist, daß sich der stromdurchflossene Leiter erwärmt. Die Wärmeleistung P , die der Leiter aufnimmt, nennt man Joulesche Wärme. Sie berechnet sich zu:

$$P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

3.7.1. Reihenschaltung von Widerständen

Der Gesamtwiderstand ist gleich der Summe der Einzelwiderstände.

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_n$$

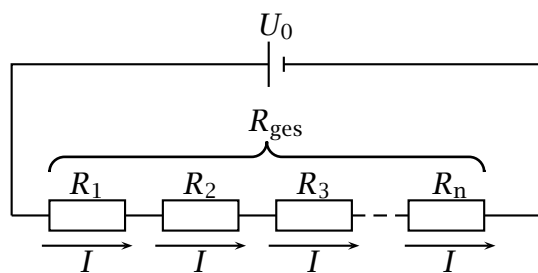
Die KIRCHHOFFSche Maschenregel liefert für einen Gleichstromkreis mit OHMschen Widerständen

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$$

Die Gesamtspannung ist gleich der Summe der Teilspannungen an den Widerständen.

Das OHMschen Gesetz liefert

$$U_1 = R_1 I \quad U_2 = R_2 I \quad U_3 = R_3 I \quad U_n = R_n I$$



Die Teilspannung U_i verhalten sich wie die zugehörigen Widerstände R_i .

$$U_1 : U_2 : U_3 : \dots : U_n = R_1 : R_2 : R_3 : \dots : R_n$$

3.7.2. Parallelschaltung von Widerständen

Die KIRCHHOFFSche Knotenregel liefert

$$I_{\text{ges}} = I_1 + I_2 + I_3 + \dots + I_n$$

Das OHMsche Gesetz ergibt

$$U = I_1 R_1 = I_2 R_2 = I_3 R_3 = \dots = I_n R_n \quad I_1 = \frac{U}{R_1}; I_2 = \frac{U}{R_2}; I_3 = \frac{U}{R_3}; I_n = \frac{U}{R_n}$$

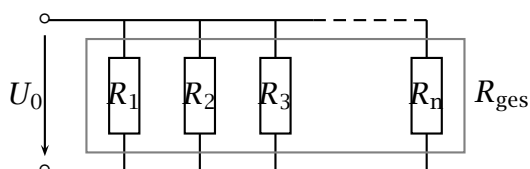
$$I_{\text{ges}} = \frac{U}{R_{\text{ges}}} = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \dots + \frac{U}{R_n} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) \cdot U$$

Der Gesamtstrom I_{ges} verhält sich zu den einzelnen Teilströmen I_i wie der zugehörige Gesamtwiderstand R_{ges} reziprok zu den zugehörigen Teilwiderständen R_i

$$I_{\text{ges}} : I_1 : I_2 : I_3 : \dots : I_n = \frac{1}{R_{\text{ges}}} : \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3} : \dots : \frac{1}{R_n}$$

Der reziproke Wert eines Widerstands heißt 'Leitwert'.

Bei der Parallelschaltung addieren sich die Leitwerte.



3.8. Spannungsquellen mit Innenwiderstand

Unter einer Spannungsquelle versteht man eine Anordnung, bei der zwischen dem Plus- und dem Minuspol eine Potentialdifferenz (Spannung U) auch dann vorhanden ist, wenn daraus ein elektrischer Strom gezogen wird.

- Ist die Spannungsquelle unbelastet, d.h. wird der Quelle kein elektrischer Strom entnommen, so nennt man die dann an den Polen anliegende Spannung **Elektromotorische Kraft** U_{EMK} .
- Wird der Spannungsquelle über einen äußeren Stromkreis ein Strom I entzogen, so fließt dieser auch im Innern über den Innenwiderstand R_i , der für die Quelle spezifisch ist. Die Folge ist, daß in der Quelle die Spannung $R_i \cdot I$ abfällt und somit die Spannung an den Polen (Klemmen) um genau diesen Betrag kleiner wird. Die Klemmenspannung U_{KI} , also die dem äußeren Stromkreis zur Verfügung stehende Spannung, ist somit:

$$U_{KI} = U_{EMK} - R_i \cdot I$$

Man unterscheidet zwei extreme Fälle:

- **Leerlauf**

Fließt also kein Strom im äußeren Stromkreis ($I = 0$), so fällt im Innern der Quelle keine Spannung ab.

Die Klemmenspannung ist gleich der elektromotorischen Kraft

$$U_{KI} = U_{EMK}$$

- **Kurzschluß**

Wächst der Strom I so weit an, daß der Spannungsabfall am Innenwiderstand $R_i \cdot I$ gleich der Elektromotorischen Kraft U_{EMK} ist, so verschwindet die Klemmenspannung ($U_{KI} = 0$). Der Strom hat seinen Maximalwert erreicht. Dieser Fall kann umgesetzt werden, indem man die beiden Pole leitend miteinander verbindet (kurzschließt). Deshalb nennt man den dabei fließenden Strom auch Kurzschlußstrom I_{kurz} und es gilt:

$$U_{EMK} = R_i I_{kurz}$$

Mißt man den Kurzschlußstrom und die Elektromotorische Kraft, so kann man daraus den Innenwiderstand berechnen.

3.9. Kleine Netzwerke und Kirchhoffsche Gesetze

fehlt

3.9.1. Knotenregel

Aufgrund der Ladungserhaltung, muß in einem Verzweigungspunkt (Knoten) eines Netzwerks die Summe der zufließende Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme sein.

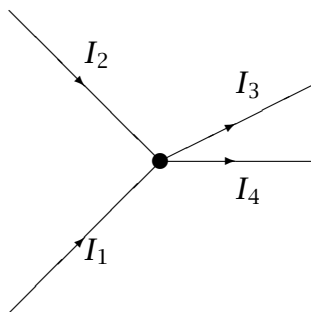
Zufließende Ströme zählen positiv, abfließende Ströme zählen negativ.

$$\sum_i I_i = 0$$

oder anders formuliert

$$\sum_i I_{zu,i} = \sum_j I_{ab,j}$$

Beispiel:



Hieraus folgt mit der Knotenregel:

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

oder anders formuliert

$$I_1 + I_2 = I_3 + I_4$$

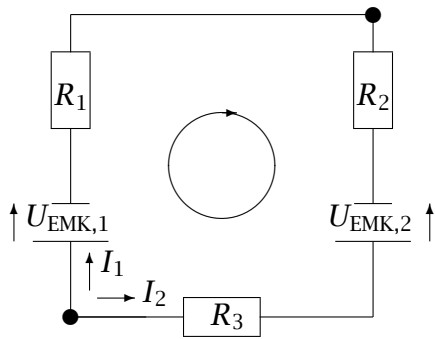
3.9.2. Maschenregel

Diese Regel bezieht sich auf geschlossene Maschen eines Netzwerks. Der Umlaufsinn der jeweiligen Masche darf selbst festgelegt werden und die Vorzeichen beziehen sich auf diesen festgelegten Umlaufsinn. Spannungsquellen und deren Elektromotorischen Kräfte U_{UMK_j} werden von Plus nach Minus orientiert. Diese zählen positiv, wenn sie in Umlaufsinn orientiert sind und negativ, wenn sie entgegen dem Umlaufsinn orientiert sind. Die Stromrichtungen I_i der einzelnen Verzweigungen werden selbst festgelegt. Der Spannungsabfall an einem Widerstand $R_i \cdot I_i$ (egal ob Innenwiderstand einer Spannungsquelle oder Widerstand eines Verbrauchers) zählt positiv, wenn die zugehörige Stromstärke I_i im Umlaufsinn orientiert ist und negativ, wenn diese entgegen dem Umlaufsinn orientiert ist.

Die Maschenregel lautet in dieser Festlegung:

$$\sum_i R_i I_i + \sum_j U_{EMK_j} = 0$$

Beispiel:



Hieraus folgt mit der Maschenregel:

$$U_{\text{EMK},1} - U_{\text{EMK},2} + R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_2 = 0$$

3.10. Der Kondensator

3.10.1. Die Kapazität eines beliebigen Kondensators

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die Einheit der Kapazität ist Farad [F]

3.10.2. Die Kapazität eines Plattenkondensators

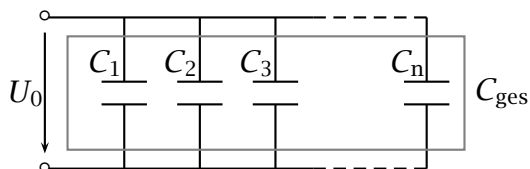
$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{A}{d}$$

3.10.3. Die Kapazität eines Kugelkondensators

Er besteht aus zwei konzentrisch angeordneten Hohlkugeln mit dem Innenradius r_1 und dem Außenradius r_2

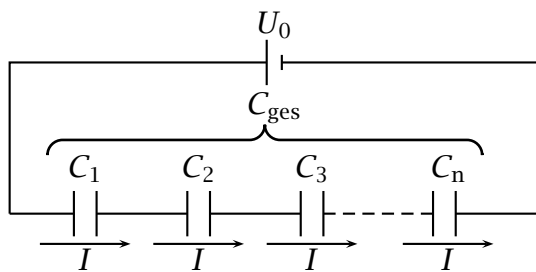
$$C = 4\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}$$

3.10.4. Parallelschaltung von Kondensatoren



$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_n$$

3.10.5. Reihenschaltung von Kondensatoren



$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_n}$$

3.10.6. Dielektikum

Durch Influenz werden die Ladungen $+Q$ und $-Q$ auf die inneren Platten gebracht.

Verschiebungs- und Orientierungspolarisation:

Auf der Oberfläche der Dielektrika entstehen durch Verschiebung (im Festkörper) oder durch Orientierung (in Flüssigkeiten) Polarisationsladungen $+Q_p$ und $-Q_p$. Im Dielektrikum entsteht somit ein Gegenfeld, das das vorhandene Feld schwächt. Das Feld E wird kleiner, also wird auch die Spannung $U = E \cdot d$ kleiner.

3.10.7. Auswirkungen von Dielektrika auf das elektrische Feld

- Bei abgetrennter Spannungsquelle: $Q = \text{const.}$

ϵ_r wird größer $\Rightarrow C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$ wird größer, $\Rightarrow U = \frac{Q}{C}$ sinkt, $\Rightarrow E = \frac{U}{d}$ sinkt

- Bei angeschlossener Spannungsquelle: $U = \text{const.}$

ϵ_r wird größer $\Rightarrow C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$ wird größer, $\Rightarrow Q = CU$ steigt, $\Rightarrow E = \frac{U}{d}$ bleibt gleich

3.10.8. Energie im Kondensator

$$W = \frac{1}{2} CU^2$$

3.10.9. Kraft zwischen den Platten eines Kondensators

Beim Auseinanderziehen der Platten vergrößert sich der Abstand d um Δd . Hierzu muß die Arbeit $\Delta W_1 = F \Delta d$ verrichtet werden. Das felderfüllte Volumen V steigt um $\Delta V = A \Delta d$ an. Deshalb nimmt die Feldenergie um

$$\Delta W_2 = \rho_{el} \Delta V = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 A \Delta d = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r \frac{U^2}{d^2} A \Delta d = \frac{1}{2d} CU^2 \Delta d$$

zu.

Mit $\Delta W_1 = \Delta W_2$ ergibt sich:

$$F \Delta d = \frac{1}{2d} CU^2 \Delta d \quad \Rightarrow \quad F = \frac{1}{2d} CU^2$$

4. Bewegung von Elektronen im elektrischen Feld

Elektronen sind negativ geladenen Teilchen mit der Elementarladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ und der Masse $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$. Für Rechnungen oft benötigt:

$$\frac{e}{m_e} = 1,76 \cdot 10^{11} \frac{\text{C}}{\text{kg}}$$

Die Erzeugung eines Elektronenstrahls wird durch Erhitzen eines Metalldrahtes erreicht. Die Elektronen erhalten hierbei die nötige Energie, um den Draht zu verlassen (glühelektrischer Effekt). Dies wird durch die Spannung U_a erreicht.

Für die kinetische Energie eines Elektrons gilt somit:

$$E_{\text{kin}} = W_{\text{el}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m_e v_x^2 = e U_a$$
$$v_x = \sqrt{2 \frac{e}{m_e} U_a}$$

Die Energieeinheit Elektronvolt [eV]:

1 eV ist die Energie, die ein Teilchen beliebiger Masse mit der Ladung e beim Durchlaufen einer Spannung 1 V im Vakuum gewinnt.

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

4.1. Ablenkung des Elektronenstrahls im elektrischen Feld

Die Kondensatorplatten mit der Spannung U_y , dem Abstand d und der Länge l erzeugen ein elektrisches Feld E der Größe:

$$E = \frac{U_y}{d}$$

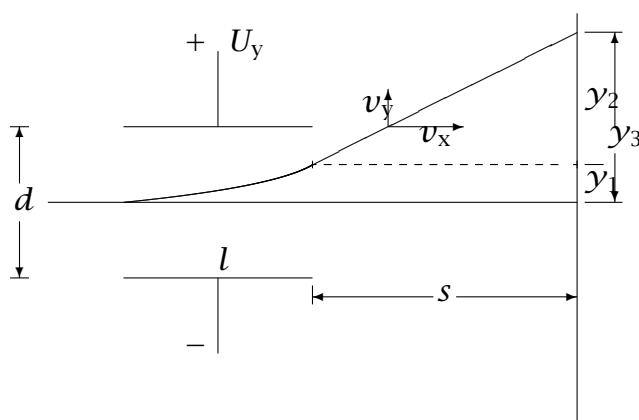
Nach Newton gilt:

$$F = m_e a_y$$

mit der elektrischen Kraft $F_{\text{el}} = eE$

Hieraus ergibt sich die Querbeschleunigung:

$$a_y = \frac{e}{m_e} \frac{U_y}{d}$$



Die Elektronen treten in die Mitte des Kondensators mit der konstanten Geschwindigkeit v_x in x -Richtung ein und werden von einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung in y -Richtung mit der konstanten Beschleunigung a_y überlagert (wie bei einem waagrechten Wurf). Es entsteht eine Parabel als Flugbahn im Innern des Kondensators. Wir nehmen an, daß die Querschleunigung a_y nicht so groß ist, damit die Elektronen den Kondensator am Ende verlassen können und nicht auf der positiven Platte einschlagen.

Die Verweildauer im Kondensator berechnet sich dann zu:

$$t_{\text{verw}} = \frac{l}{v_x}$$

In dieser Zeit wächst die Geschwindigkeit in y -Richtung auf

$$v_y = a_y t_{\text{verw}} = \frac{e U_y l}{m_e d v_x}$$

an.

Die Bahngeschwindigkeit der Elektron beim Verlassen des Kondensators beträgt:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ab hier fliegen die Elektronen mit der konstanten Geschwindigkeit v gleichförmig unter dem Ablenkwinkel φ gegenüber der Horizontalen in Richtung Schirm:

$$\tan \varphi = \frac{v_y}{v_x}$$

Beim Verlassen wurden die Elektronen um die Strecke y_1 von der Mitte des Kondensators in y -Richtung ausgelenkt.

$$y_1 = \frac{1}{2} a_y t_{\text{verw}}^2 = \frac{1}{4} \frac{l^2 U_y}{d U_a}$$

Bis zu einem Schirm im Abstand s vom Kondensator brauchen sie die Zeit

$$t_s = \frac{s}{v_x}$$

Während dieser Zeit erfahren sie eine gleichförmige Auslenkung y_2 in y -Richtung, verursacht von der Geschwindigkeitskomponente v_y . Diese berechnet sich:

$$y_2 = v_y t_s = \frac{1}{2} \frac{l s U_y}{d U_a}$$

Die Gesamtablenkung von der Kondensatormitte auf dem Schirm beträgt:

$$y_3 = y_1 + y_2 = \frac{1}{2} \frac{l}{d} \left(\frac{l}{2} + s \right) \frac{U_y}{U_a}$$

Anmerkung:

Die Gewichtskraft als zusätzliche beschleunigende Kraft kann man vernachlässigen, da diese im Vergleich zur elektrischen Kraft sehr klein ist.

5. Das Magnetfeld

5.1. Die Kraft auf Ströme im Magnetfeld

Ein Strom erfährt in einem fremden Magnetfeld eine Kraft, die senkrecht zu dessen Feldlinien und senkrecht zum Strom steht (3-Finger-Regel). Ein Magnetfeld übt keine Kraft auf einen Strom aus, der parallel zu den magnetischen Feldlinien fließt. Das Magnetfeld im Innern einer Spule ist homogen (parallele Feldlinien). Ein mit der Stromstärke I durchflossener gerader Leiter der Länge s , der senkrecht zu den Feldlinien eines Magnetfelds der Flußdichte B (senkrechte Komponente von B sei B_s) steht, erfährt eine Kraft vom Betrag:

$$F = B_s I s$$

Ihre Richtung gibt die 3-Finger-Regel an.

5.2. Das homogene Magnetfeld im Inneren einer langgestreckten Spule

Die magnetische Flußdichte B , gemessen in Tesla [T], in der Mitte einer langgestreckten Spule der Länge l , in welcher der Erregerstrom I_{err} durch n Windungen fließt, beträgt:

$$B = \mu_0 \mu_r I_{\text{err}} \frac{n}{l}$$

Hierbei ist:

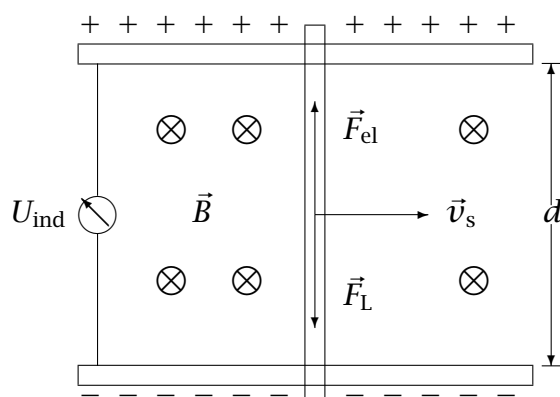
$\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Tm}}{\text{A}}$ die magnetische Feldkonstante und μ_r die dimensionslose Permeabilitätszahl und $H = I_{\text{err}} \frac{n}{l} = \frac{B}{\mu_0 \mu_r}$ die magnetische Feldstärke, gemessen in $\left[\frac{\text{A}}{\text{m}} \right]$.

Die magnetische Flußdichte B im Abstand r von einem geraden Draht, der vom Strom I durchflossen wird, beträgt:

$$B = \mu_0 \mu_r \frac{I}{2\pi r}$$

5.3. Induktionsvorgänge im Magnetfeld

5.3.1. Grundversuch I



Ein Leiter der Länge d bewegt sich mit der Geschwindigkeit \vec{v}_s senkrecht zu einem zeitlich konstanten Magnetfeld der Flußdichte \vec{B} , dann findet man auf ihm getrennte

Ladungen und eine Induktionsspannung an seinen Enden. Auf die durch \vec{v}_s bewegten Elektronen wirkt die Lorentzkraft \vec{F}_L , wodurch Elektronenüberschuß in einem der Leiterstücke entsteht. Hieraus bildet sich ein elektrisches Feld mit der Feldkraft \vec{F}_{el} . Es stellt sich nach kürzester Zeit (etwa 10^{-12} s) ein Gleichgewicht dieser beiden Kräfte ein.

$$F_L = F_{el}$$

$$Bev_s = eE \text{ mit } E = \frac{U_{ind}}{d}$$

$$U_{ind} = Bdv_s$$

5.3.2. Grundversuch II

ändert sich die Stärke des Magnetfeldes, das einen ruhenden Stromkreis - etwa eine Spule - durchsetzt, dann wird in ihm eine Spannung induziert.

Dies liefert das allgemeine Induktionsgesetz:

$$U_{ind}(t) = -n\dot{\Phi}(t) \text{ mit } \Phi(t) = A(t) \cdot B(t)$$

ist der magnetische Fluß

Mit der Produktregel der Differentiation folgt also:

$$U_{ind}(t) = -n[A(t) \cdot \dot{B}(t) + B(t) \cdot \dot{A}(t)]$$

Hierbei ist der erste Summand die zeitliche Flächenänderung bei konstantem magnetischen Feld und der zweite Summand die zeitliche Änderung des magnetischen Feldes bei konstanter durchflossener Fläche. Das Minuszeichen in dieser Formel beinhaltet die Lenzsche Regel nach der die Induktionsspannung so gepolt ist, daß sie durch einen von ihr erzeugten Strom ihrer Ursache des Induktionsvorgangs entgegenwirken kann. Die Spannung selbst erzeugt kein magnetisches Feld und keine Kraft. Die Lenzsche Regel wirkt sich deshalb erst über den Induktionsstrom aus, der durch sein Magnetfeld und durch die damit verbundene Kraft auf den stromdurchflossenen Leiter der Ursache entgegenwirken kann. Hierzu muß ein Induktionsstrom fließen, der Stromkreis muß also geschlossen sein.

Will man die Induktionsspannung berechnen bei

- **konstanter magnetischer Flußdichte** $B(t) = \text{const.}$, so folgt mit $A(t) = d \cdot s(t)$

$$U_{ind} = -nB \frac{dA(t)}{dt} = -nBd \frac{ds(t)}{dt} = -nBdv_s$$

- **konstanter durchflossener Fläche** $A(t) = \text{const.}$, so folgt mit $B(t) = \mu_0 \mu_r \frac{n}{l} I_{err}$

$$U_{ind} = -nA \frac{dB(t)}{dt} = -nA \mu_0 \mu_r \frac{n}{l} \frac{dI_{err}}{dt}$$

Grundversuch II

In einem schon vorhandenen Stromkreis, führt die Änderung des magnetischen Flusses zu einer Abnahme bzw. Zunahme des Stromes. Nach dem Ohmschen Gesetz gilt:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_1(t) + U_{ind}(t)}{R} = \frac{U_1(t) - n\dot{\Phi}(t)}{R}$$

Für $\dot{\Phi}(t) > 0$ nimmt $I(t)$ ab, für $\dot{\Phi}(t) < 0$ nimmt $I(t)$ zu.

5.4. Die Selbstinduktion

Nach dem Induktionsgesetz gilt:

$$U_{\text{ind}}(t) = -n\Phi(t) = -nAB(t) = -nA\mu_0\mu_r \frac{n}{l} I(t) = - \underbrace{\mu_0\mu_r \frac{n^2}{l} A}_{L} I(t)$$

$$U_{\text{ind}}(t) = -LI(t)$$

Wenn sich ein Strom ändert, so induziert er im eigenen Leiterkreis eine Selbstinduktionsspannung. Sie wirkt der Ursache - also der Stromstärkeänderung - entgegen. Die Selbstinduktionsspannung ist der Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke $I(t)$ proportional.

$$L = \mu_0\mu_r \frac{n^2}{l} A$$

heißt Eigeninduktivität und wird in Henry [H] gemessen.

5.5. Die Energie im Magnetfeld

Es gilt:

$$P(t) = U(t)I(t)$$

Hieraus folgt:

$$W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

Ein Magnetfeld nimmt bei seinem Aufbau die Energie aus der Batterie mit der konstanten Spannung U_1 auf. Diese liefert die von der Stromstärke $I(t)$ abhängige Leistung $P_1(t)$.

Am Widerstand R fällt die Spannung $U_R = RI(t)$ ab und liefert dort die Wärmeleistung $P_W(t) = U_R I(t) = RI(t)^2$.

Es gilt folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{U_1 - LI(t)}{R} \quad | \cdot RI(t) \\ \underbrace{RI(t)^2}_{P_W(t)} &= \underbrace{U_1 I(t)}_{P_1(t)} - \underbrace{LI(t)I(t)}_{P_L(t)} \\ U_1 I(t) &= RI(t)^2 + LI(t)I(t) \\ P_1(t) &= P_W(t) + P_L(t) \end{aligned}$$

Die von der Batterie gelieferte Leistung $P_1(t)$ ist also um den Term $P_L(t)$ größer als die in Wärme umgesetzte Leistung. Diesen Term muß die Batterie aufbringen, um den Strom $I(t)$ gegen die vom ansteigenden Magnetfeld induzierte Spannung fließen zu lassen. Beim Zusammenbrechen hat $P_L(t)$ den gleichen Betrag wie beim Aufbauen, nur wird sie dort freigesetzt. Sie wurde also im Magnetfeld als magnetische Energie gespeichert.

Stromstärke zum Zeitpunkt $t_1 = 0$: $I(t_1) = I(0) = I$

Stromstärke zum Zeitpunkt $t = t_2$: $I(t_2) = 0$

Folgender Trick wird beim Integrieren verwendet: $\int f'(x) \cdot f(x) dx = \frac{1}{2}f(x)^2 + c$

$$\begin{aligned}W_{\text{magn}} &= - \int_{t_1}^{t_2} P_L(t) dt = -L \int_{t_1}^{t_2} I(t)I(t) dt = -L \left[\frac{1}{2}I(t)^2 \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= -\frac{1}{2}L(I(t_2)^2 - I(t_1)^2) = \frac{1}{2}LI^2\end{aligned}$$

6. Bewegung von Elektronen im Magnetfeld

6.1. Die Lorentzkraft

Die Lorentzkraft steht senkrecht zu v und senkrecht zu B (3-Finger-Regel). Sie verrichtet somit keine Arbeit (also keine Geschwindigkeitszunahme), sondern lenkt das Elektron nur senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor ab. Der Betrag der Geschwindigkeit ändert sich dabei also nicht, nur ihre Richtung (Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit).

$$F_L = Bev_s, \text{ mit } v_s$$

als Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Magnetfeld.

Die Lorentzkraft F_L ist Null, wenn das Elektron ruht oder wenn es sich parallel zu den magnetischen Feldlinien bewegt.

Im elektrischen Feld ist die Feldkraft $F_{el} = eE$ unabhängig von der Geschwindigkeit der Elektronen.

6.2. Schraubenbahn von Elektronen im Magnetfeld

Zerlegung der Einschußgeschwindigkeit v in Komponenten parallel und senkrecht zu den magnetischen Feldlinien:

$$v_p = v \sin \varphi$$

$$v_s = v \cos \varphi$$

mit φ als Einschußwinkel bzgl. der Senkrechten zu den magnetischen Feldlinien. Die senkrechte Geschwindigkeitskomponente v_s ist für die erforderliche Zentripetalkraft F_Z einer Kreisbahn zuständig:

$$\begin{aligned}F_Z &= F_L \\ m_e \frac{v_s^2}{r} &= Bev_s \\ r &= \frac{v_s}{\frac{e}{m_e}B} = \frac{v \cos \varphi}{\frac{e}{m_e}B}\end{aligned}$$

Die Umlaufdauer T ergibt sich zu

$$T = \frac{2\pi r}{v_s} = \frac{2\pi}{\frac{e}{m_e}B}$$

und ist unabhängig von der Einschußgeschwindigkeit.

6.2.1. Ganghöhe der Schraubenlinie

Aufgrund der parallelen Geschwindigkeitskomponente v_p fliegen die Elektronen während eines vollen Umlaufs in der Zeit T um die Strecke h (Ganghöhe) gleichförmig parallel zu den Feldlinien weiter:

$$h = v_p T = \frac{2\pi}{\frac{e}{m_e} B} v_p = \frac{2\pi v \sin \varphi}{\frac{e}{m_e} B}$$

Anmerkung:

Bei senkrechtem (zu den magnetischen Feldlinien senkrechtem) Einschluß, also bei $\varphi = 0$ und $v_s = v$, entsteht eine reine Kreisbahn, da es keine zu den Feldlinien parallele Geschwindigkeitskomponente gibt.

6.3. Der Hall-Effekt

Durch den Strom I durch das Blättchen senkrecht zum Magnetfeld wird ein elektrisches Feld E an den Enden mit dem Abstand d erzeugt. Die Lorentzkraft hält der elektrischen Kraft das Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} F_L &= F_{el} \\ Bev &= U_{Hall} \frac{e}{d} \\ U_{Hall} &= Bdv \end{aligned}$$

Sei b die Dicke des Blättchens und $n = \frac{N}{V}$ die Anzahldichte (Konzentration) der Elektronen, so ergibt sich die Hall-Spannung zu:

$$U_{Hall} = \frac{B \cdot I}{n \cdot b \cdot e}$$

7. Elektromagnetische Schwingungen

7.1. Der elektromagnetische Schwingkreis

Parallelschaltung von idealer Spule und Kondensator.

Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung:

Steckt die gesamte Energie im elektrischen Feld, dann ist maximale Spannung am Kondensator und der Strom ist Null.

Steckt die gesamte Energie im magnetischen Feld, dann ist maximale Stromstärke in der Spule und die Spannung am Kondensator ist Null.

Spannung am Kondensator:

$$U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

Induzierte Spannung an der Spule:

$$U_L(t) = U_{ind}(t) = -LI(t)$$

Parallelschaltung liefert:

$$U_C(t) = U_{ind}(t)$$

Mit $I(t) = Q(t)$ folgt folgende homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$Q(t) = -\frac{1}{LC}Q(t)$$

diese hat als Lösungsfunktionen:

$$Q(t) = \hat{Q} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Diese Funktion eingesetzt liefert:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ oder } T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Beginnt die Schwingung bei aufgeladenem Kondensator, gilt also:

$$U(t = 0) = \hat{U} \text{ und somit } U(t) = \hat{U} \cos \omega t$$

was dann

$$I(t) = -\hat{I} \sin \omega t$$

liefert mit

$$\hat{I} = \omega \hat{Q} = \hat{U} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

7.1.1. Energieumsetzung beim Schwingkreis

Annahme wie oben:

$$W_{\text{el}}(t) = \frac{1}{2}CU(t)^2 = \frac{1}{2}C\hat{U}^2 \cos^2 \omega t$$

$$W_{\text{magn}}(t) = \frac{1}{2}LI(t)^2 = \frac{1}{2}L(-\hat{I} \sin \omega t)^2 = \frac{1}{2}L\hat{I}^2 \sin^2 \omega t \text{ mit } \hat{I} = \omega \hat{Q} = \hat{U} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{ges}} &= W_{\text{el}} + W_{\text{magn}} = \frac{1}{2}C\hat{U}^2 \cos^2 \omega t + \frac{1}{2}L\hat{U}^2 \frac{C}{L} \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2}C\hat{U}^2 (\underbrace{\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t}_{=1}) = \frac{1}{2}C\hat{U}^2 \end{aligned}$$

Die Gesamtenergie ist zeitunabhängig und konstant und gleich der anfänglich in den Schwingkreis gegebenen Energie. Bei anderem Ansatz kommt man zu $W_{\text{ges}} = \frac{1}{2}L\hat{I}^2$. Die Energien wandeln sich ineinander um und sind in ihren Scheitelwerten gleich groß.

8. Wechselstromlehre

8.1. Erzeugung sinusförmiger Wechselspannung

Für den Phasenwinkel α gilt:

$$\frac{t}{T} = \frac{\alpha}{2\pi} \text{ oder } \alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t = 2\pi f \cdot t = \omega t$$

Die Drehspule sei aus n rechteckigen Leiterschleifen der wirksamen Länge d . Der Faktor $2n$ berücksichtigt, daß jede der n Leiterschleifen zwei Leiterstücke der wirksamen Länge d hat. Für die erzeugte induzierte Spannung gilt:

$$U_{\text{ind}}(t) = B \cdot (2n)d \cdot v_s(t) = \underbrace{2nBdv}_{\hat{U}} \sin(\omega t)$$

Wenn die Leiterschleife eine beliebige Gestalt hat, also nicht rechteckig ist, gilt für die induzierte Spannung bei konstantem Magnetfeld $B(t) = \text{const.} = B$ allgemein:

$$U_{\text{ind}}(t) = -n\dot{\Phi}(t) = -nBA_s(t)$$

Für die senkrecht durchsetzte Fläche gilt:

$$A_s(t) = A \cos(\omega t)$$

$$\dot{A}_s(t) = -\omega A \sin(\omega t)$$

Für diesen Fall beträgt die induzierte Spannung:

$$U_{\text{ind}}(t) = -n\dot{\Phi}(t) = +nBA\omega \sin(\omega t)$$

8.2. Effektivwerte

Der Effektivwert U_{eff} (bzw. I_{eff}) einer Wechselspannung $U(t)$ (bzw. Wechselstrom $I(t)$) gibt die Gleichspannung U_{eff} (bzw. den Gleichstrom I_{eff}) an, die über volle Perioden im selben Widerstand die gleiche mittlere Leistung hervorbringt. Es gilt rein mathematisch:

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T (U(t))^2 dt}$$

Bei sinusförmiger Wechselspannung ergibt sich mit folgendem Trick: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

$$U(t) = \hat{U} \sin \omega t$$

$$(U(t))^2 = \hat{U}^2 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} \hat{U}^2 (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\int_0^T (U(t))^2 dt = \frac{1}{2} \hat{U}^2 \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{1}{2} \hat{U}^2 \left[t - \frac{1}{2} \sin 2\omega t \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2} \hat{U}^2 (T - 0 - (0 - 0)) = \frac{1}{2} \hat{U}^2 T$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \frac{1}{2} \hat{U}^2 T} = \hat{U} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$$

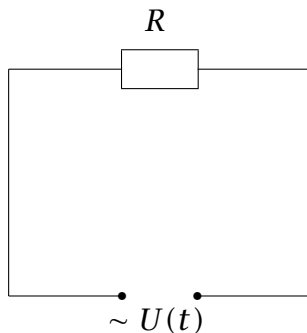
Analog gilt für den Effektivwert der Stromstärke bei Sinusform:

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$$

8.3. Verschiedene R , C und L Schaltungen im Wechselstromkreis

8.3.1. Ohmscher Wirkwiderstand R im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Der Strom $I(t)$ ist wie die angelegte Spannung $U(t)$ sinusförmig und in Phase.
- $U(t)$ und $I(t)$ sind in Phase ($\varphi = 0$). Bei einer angelegten Spannung von $U(t) = \hat{U} \sin \omega t$ folgt direkt:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \underbrace{\left(\frac{\hat{U}}{R}\right)}_{\hat{I}} \sin \omega t \text{ mit } \hat{I} = \frac{\hat{U}}{R}$$

oder

$$I_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{eff}}}{R}$$

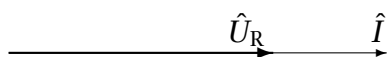
- Der Widerstand $R(\omega)$ dieser Anordnung ist:

$$R(\omega) = R$$

und heißt **Ohmscher Wirkwiderstand**

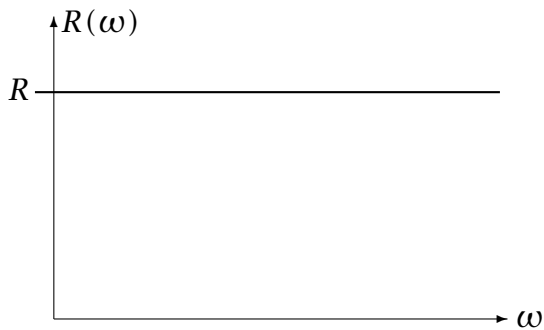
Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße



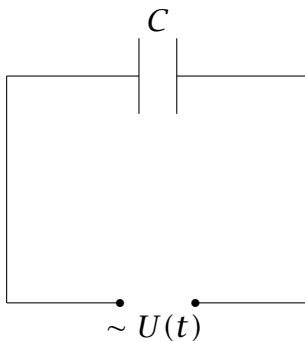
Es gelten für die Momentan-, Scheitel- und Effektivwerte eines Wechselstroms die gleichen Gesetze wie für Gleichstrom.

Abhängigkeit des Ohmschen Wirkwiderstands $R(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.2. Kondensator C im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Unterliegt ein Kondensator einem sinusförmigen Wechselstromkreis, so ist der Auf- und Entladestrom ebenfalls sinusförmig. Der Auf- und Entladestrom $I(t)$ eilt jedoch der Spannung $U(t)$ um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ voraus.

$U(t)$ und $Q(t) = C \cdot U(t)$ sind immer in Phase.

Beträgt die angelegte Spannung $U(t) = \hat{U} \sin \omega t$,

so gilt für die Ladung $Q(t) = C\hat{U} \sin \omega t = \hat{Q} \sin \omega t$.

Hieraus folgt für die Stromstärke:

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \hat{Q}\omega \cos \omega t = C\hat{U}\omega \cos \omega t$$

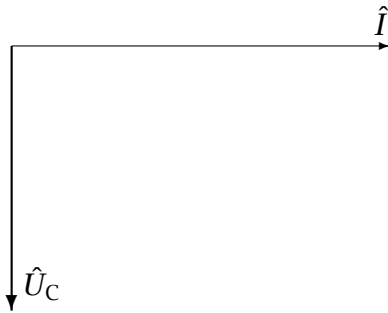
Man sieht, daß sowohl $U(t)$ als auch $I(t)$ sinusförmig sind, jedoch um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ phasenverschoben.

Merke: Cosinus eilt Sinus um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ voraus.

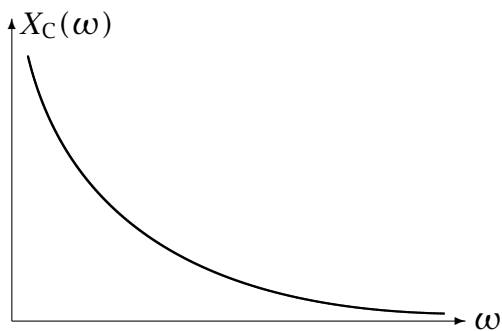
- Der Quotient $X_C(\omega) = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{\omega C}$ heißt **kapazitiver Blindwiderstand**, weil im Gegensatz zum Ohmschen Wirkwiderstand R keine Wärme entsteht. Das Ohmsche Gesetz gilt für die Effektiv- und Scheitelwerte, nicht aber für die Momentanwerte $U(t)$ und $I(t)$.

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße

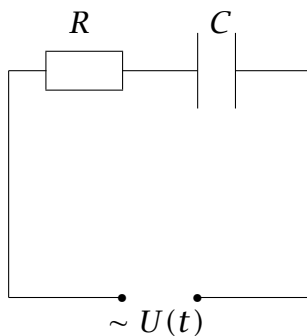


Abhängigkeit des rein kapazitiven Blindwiderstands $X_C(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.3. C und R in Reihe im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Der Strom $I(t)$ ist wie die angelegte Spannung $U(t)$ sinusförmig, wenn auch phasenverschoben.
- Die beiden Teilspannungen $U_R(t)$ und $U_C(t)$ mit den Scheitelwerten $\hat{U}_R = R\hat{I}$ und $\hat{U}_C = \frac{1}{\omega C}\hat{I}$ haben die gleiche Frequenz wie die angelegte Spannung $U(t)$.
- Für \hat{U} gilt nach dem Zeigerdiagramm:

$$\hat{U} = \sqrt{(R\hat{I})^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\hat{I}\right)^2} = \hat{I}\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \hat{I}\sqrt{R^2 + X_C^2}$$

- Für den Scheinwiderstand $Z(\omega)$ der realen Spule gilt:

$$Z(\omega) = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + X_C^2}$$

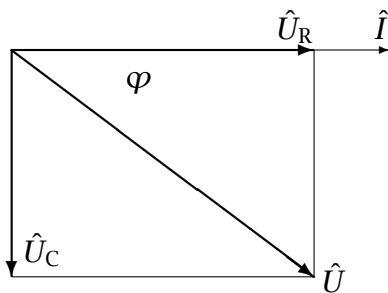
- Der Winkel φ gibt an um wieviel die angelegte Spannung $U(t)$ dem Strom $I(t)$ hinterherhinkt.

Für diese Phasenverschiebung gilt:

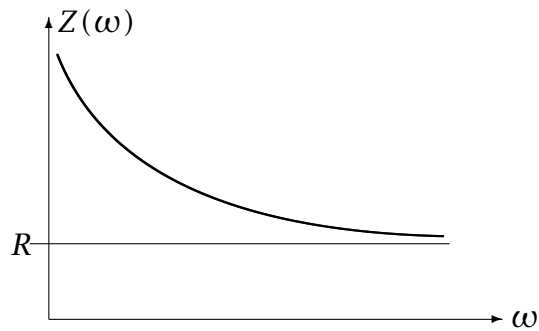
$$\tan \varphi = \frac{\hat{U}_C}{\hat{U}_R} = \frac{1}{\omega CR}$$

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße

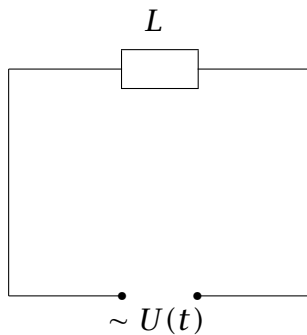


Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.4. Ideale Spule L im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Unterliegt eine Spule (bei vernachlässigbarem Ohmschen Widerstand spricht man von einer idealen Spule) einem sinusförmigen Wechselstromkreis, so ist der Strom ebenfalls sinusförmig. Der Strom $I(t)$ hinkt jedoch der Spannung $U(t)$ um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ hinterher.

Zu jedem Zeitpunkt gilt für den Strom:

$$I(t) = \frac{U(t) - LI(t)}{R} \Rightarrow RI(t) = U(t) - LI(t)$$

- Für eine ideale Spule ist $R = 0$ und man erhält:

$$0 = U(t) - LI(t) \Rightarrow I(t) = \frac{U(t)}{L}$$

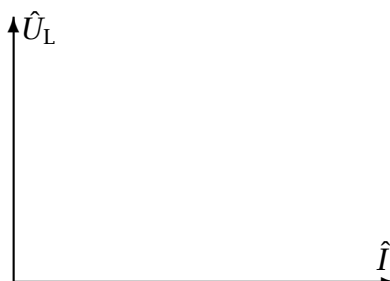
$$I(t) = \frac{1}{L} \int U(t) dt = \frac{1}{L} \int \hat{U} \sin \omega t dt = \frac{\hat{U}}{\omega L} (-\cos \omega t) + c$$

Die Integrationskonstante c gibt einen Stromstoß an, der beim Einschalten der Wechselspannung entstehen kann. Er klingt auch bei sehr kleinem Ohmschen Widerstand so rasch ab, daß man ihn nur als sehr kurzen Einschwingvorgang sehen kann.

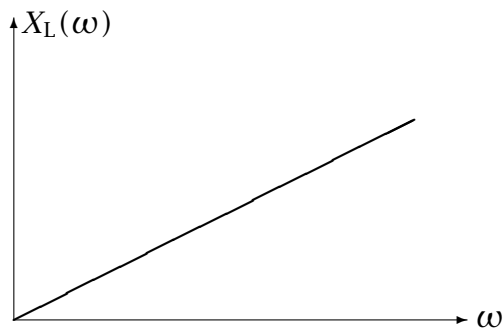
- Der Quotient $X_L(\omega) = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \omega L$ heißt **induktiver Blindwiderstand**, weil im Gegensatz zum Ohmschen Wirkwiderstand R keine Wärme entsteht. Er entsteht durch Selbstinduktion. Das Ohmsche Gesetz gilt für die Effektiv- und Scheitelwerte, nicht aber für die Momentanwerte $U(t)$ und $I(t)$.

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße



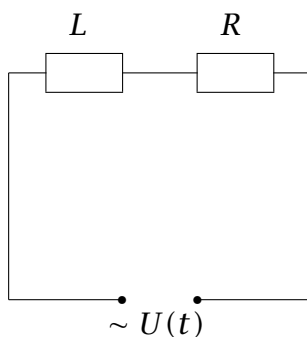
Abhängigkeit des rein induktiven Blindwiderstands $X_L(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.5. L und R in Reihe (reale Spule) im Wechselstromkreis

Hintereinanderschaltung einer idealen Spule und einem Ohmschen Wirkwiderstand

Zugehörige Schaltungsskizze



- Der Strom $I(t)$ ist wie die angelegte Spannung $U(t)$ sinusförmig, wenn auch phasenverschoben.
- Die beiden Teilspannungen $U_R(t)$ und $U_L(t)$ mit den Scheitelwerten $\hat{U}_R = R\hat{I}$ und $\hat{U}_L = \omega L\hat{I}$ haben die gleiche Frequenz wie die angelegte Spannung $U(t)$.
- Für \hat{U} gilt nach dem Zeigerdiagramm:

$$\hat{U} = \sqrt{(R\hat{I})^2 + (\omega L\hat{I})^2} = \hat{I}\sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \hat{I}\sqrt{R^2 + X_L^2}$$

- Für den Scheinwiderstand Z der realen Spule gilt:

$$Z(\omega) = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

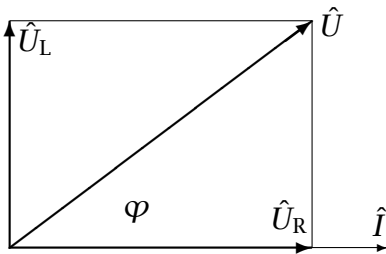
- Der Winkel φ gibt an um wieviel die angelegte Spannung $U(t)$ dem Strom $I(t)$ vorausseilt.

Für diese Phasenverschiebung gilt:

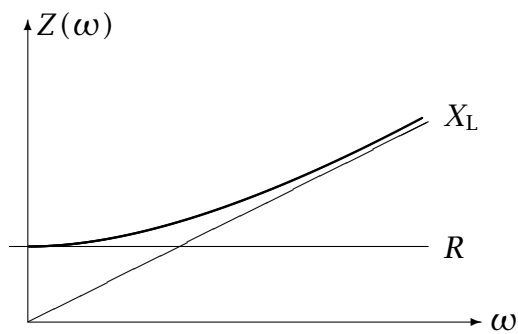
$$\tan \varphi = \frac{\hat{U}_L}{\hat{U}_R} = \frac{\omega L}{R}$$

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße

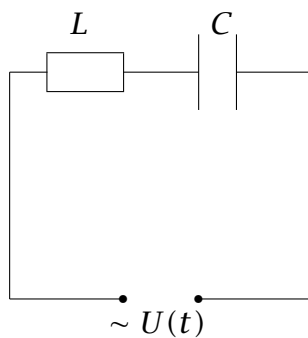


Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.6. C und L in Reihe im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Der Strom $I(t)$ ist wie die angelegte Spannung $U(t)$ sinusförmig, wenn auch phasenverschoben.
- Die Spannung an der Spule $U_L(t)$ ist um $+\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Stromstärke $I(t)$ phasenverschoben, die Spannung am Kondensator $U_C(t)$ ist um $-\frac{\pi}{2}$ gegenüber der Stromstärke I phasenverschoben

- Für den Scheinwiderstand Z dieser Anordnung gilt:

$$Z(\omega) = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|$$

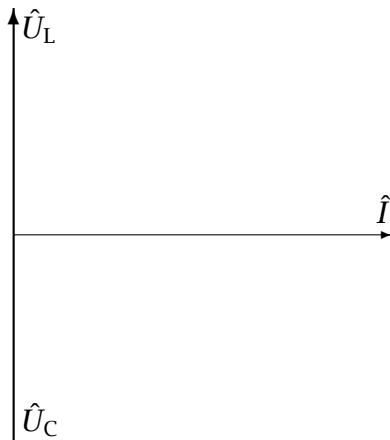
- Im Resonanzfall $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ haben Kondensatorspannung und Spulenspannung (bei vernachlässigbarem ohmschen Wirkwiderstand $R = 0$) die Phasenverschiebung $\varphi = \pi$, d. h. $U(t) = 0$ für $U_L(t) = U_C(t)$.

Bei dieser Resonanzfrequenz ist der Scheinwiderstand Z minimal, sogar Null.

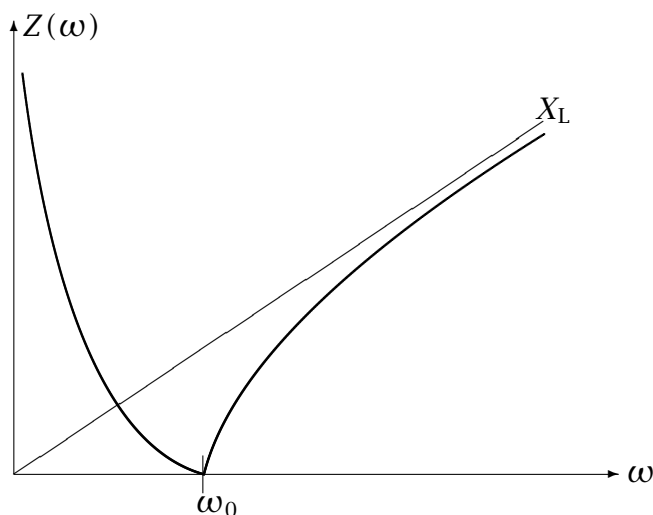
$$Z_{\min} = Z(\omega_0) = 0$$

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße



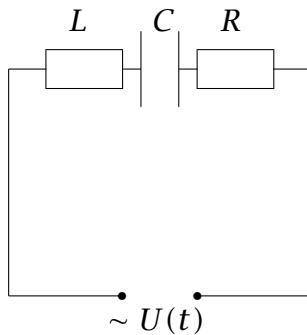
Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.7. R , C und L in Reihe im Wechselstromkreis (Siebkette)

Hintereinanderschaltung von realer Spule und Kondensator

Zugehörige Schaltungsskizze



- Der Strom $I(t)$ ist wie die angelegte Spannung $U(t)$ sinusförmig, wenn auch phasenverschoben.
- Die beiden Teilspannungen $U_R(t)$, $U_C(t)$ und $U_L(t)$ mit den Scheitelwerten $\hat{U}_R = R\hat{I}$ und $\hat{U}_C = \frac{\hat{I}}{\omega C}$ und $\hat{U}_L = \omega L\hat{I}$ haben gleiche Frequenz wie die angelegte Spannung $U(t)$.
- Für \hat{U} gilt nach dem Zeigerdiagramm:

$$\hat{U} = \sqrt{(R\hat{I})^2 + (\omega L\hat{I} - \frac{\hat{I}}{\omega C})^2} = \hat{I} \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \hat{I} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

- Für den Scheinwiderstand Z dieser Anordnung gilt:

$$Z(\omega) = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

- Für die Phasenverschiebung gilt:

$$\tan \varphi = \frac{\hat{U}_L - \hat{U}_C}{\hat{U}_R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Der Winkel φ gibt an um wieviel die angelegte Spannung $U(t)$ dem Strom $I(t)$ vorausschlägt bzw. hinterherhinkt.

Gilt:

$$\omega L > \frac{1}{\omega C}, \text{ so eilt die angelegte Spannung } U(t) \text{ der Stromstärke } I(t) \text{ voraus.}$$

$$\omega L < \frac{1}{\omega C}, \text{ so hinkt die angelegte Spannung } U(t) \text{ der Stromstärke } I(t) \text{ hinterher.}$$

- Diese Schaltung hat eine Resonanzfrequenz $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, wenn

$X_L = X_C \Leftrightarrow \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{LC}$, also wenn der Gesamtwiderstand rein ohmsch ist.

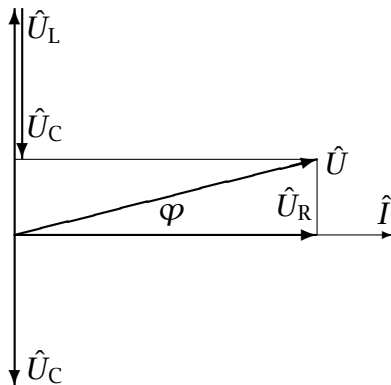
In diesem Resonanzfall halten sich $U_C(t)$ und $U_L(t)$ zu jedem Zeitpunkt das Gleichgewicht.

Die Stromstärke I_{eff} wird maximal bei der Resonanzfrequenz, der Widerstand Z minimal und beträgt dann:

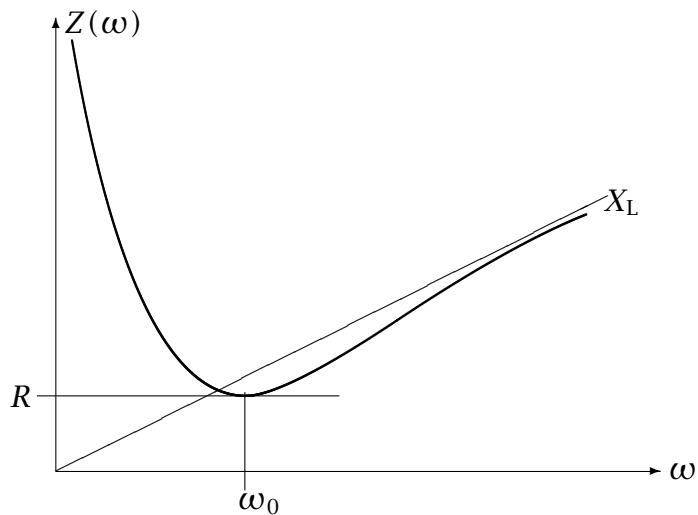
$$Z_{\text{min}} = Z(\omega_0) = R$$

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Stromstärke \hat{I} ist Bezugsgröße



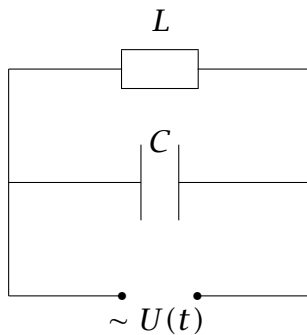
Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.8. C und L parallel im Wechselstromkreis (Sperrkreis)

Parallelschaltung von idealer Spule und Kondensator

Zugehörige Schaltungsskizze



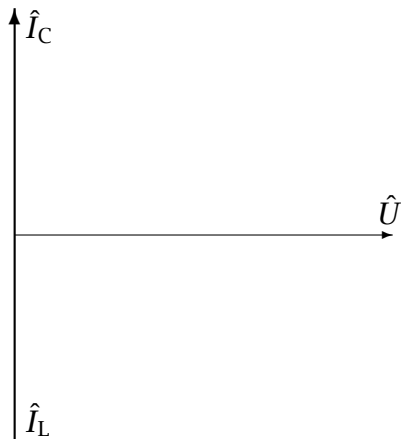
- Für den Scheinwiderstand Z dieser Anordnung gilt:

$$Z(\omega) = \frac{\omega^2 L^2}{\sqrt{\omega^2 L^2 (\omega^2 LC - 1)^2}} = \frac{\omega L}{|\omega^2 LC - 1|}$$

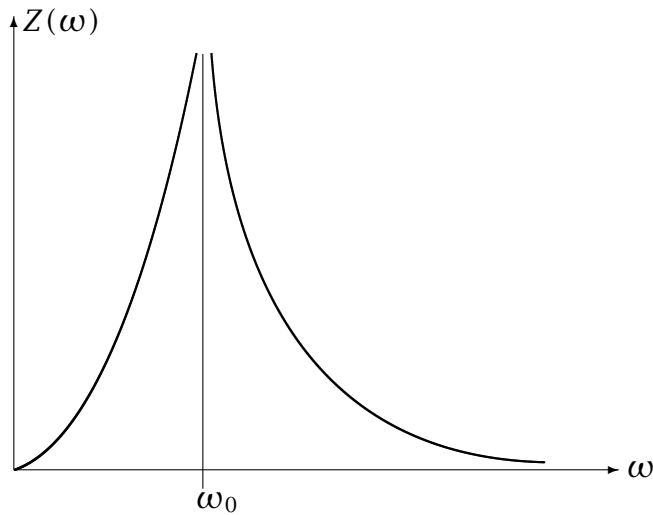
- Im Resonanzfall $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (wie bei der Siebkette) haben Kondensatorstrom und Spulenstrom (bei vernachlässigbarem Ohmschen Wirkwiderstand $R = 0$) die Phasenverschiebung $\varphi = \pi$, d. h. $I = 0$ für $I_L = I_C$. Hier hat der Sperrkreis einen unendlich großen Widerstand.

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Spannung \hat{U} ist Bezugsgröße

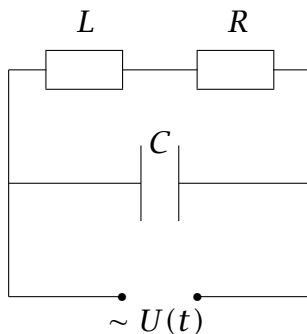


Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.9. C parallel zu L und R (diese in Reihe) im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Ersetzt man die ideale Spule durch eine reale Spule (ideale Spule in Reihe mit Ohmschem Widerstand R), so ergibt sich für den Scheinwiderstand Z :

$$Z(\omega) = \frac{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}{\omega C \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$$

- Die Phasenverschiebung ist:

$$\tan \varphi = \frac{\omega C}{R} (R^2 + \omega^2 L^2 - \frac{L}{C})$$

- Im Resonanzfall erhält man folgende Resonanzfrequenz - also wenn die Phasenverschiebung Null wird:

$$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{L^2}}$$

Man sieht, durch die dämpfende Wirkung des Ohmschen Wirkwiderstands R wird die Resonanzfrequenz kleiner als im ungedämpften Fall.

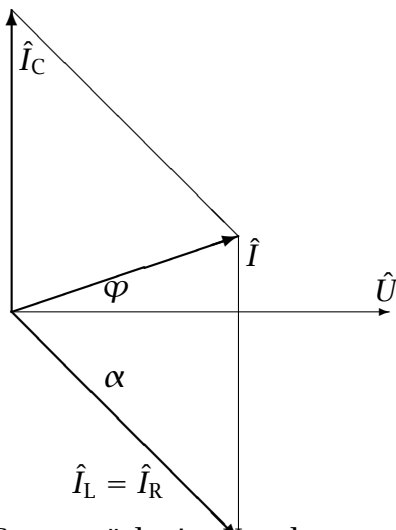
Der Widerstand Z wird bei dieser Resonanzfrequenz maximal und beträgt:

$$Z_{\max} = Z(\omega_{\text{res}}) = \frac{L}{RC}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} Z(\omega) = R$$

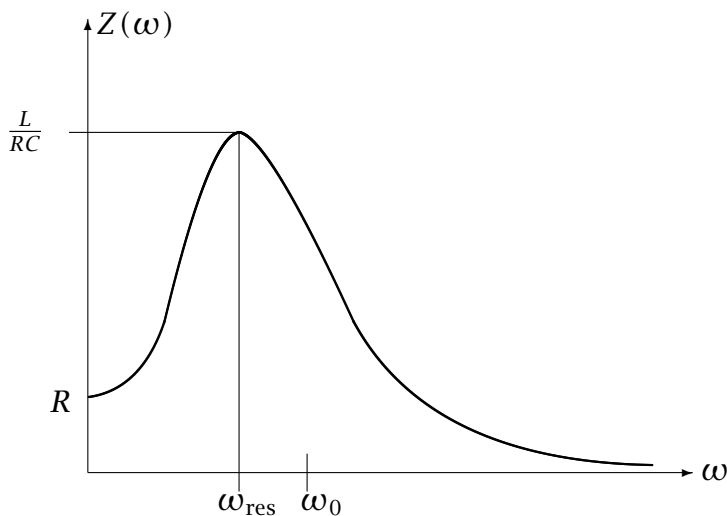
Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Spannung \hat{U} ist Bezugsgröße



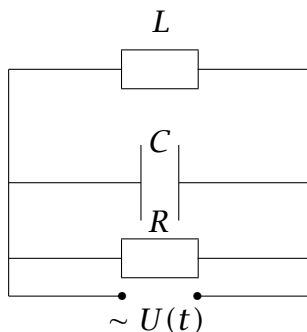
Die Stromstärke im Kondensatorzweig $I_C(t)$ eilt der angelegten Spannung $U(t)$ um $+\frac{\pi}{2}$ voraus. Die Stromstärke im Spulen- und Ohmschen Wirkwiderstandszweig $I_L(t) = I_C(t)$ hinkt der angelegten Spannung $U(t)$ um $\alpha = \arctan \frac{\omega L}{R}$ hinterher.

Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.3.10. R , C und L parallel im Wechselstromkreis

Zugehörige Schaltungsskizze



- Der Scheinwiderstand Z dieser Anordnung ist:

$$Z(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + (\omega C - \frac{1}{\omega L})^2}}$$

- Die Phasenverschiebung ist:

$$\tan \varphi = R(\omega C - \frac{1}{\omega L})$$

- Die Resonanzfrequenz erhält man für die Phasenverschiebung Null:

$$\omega_{\text{res}} = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

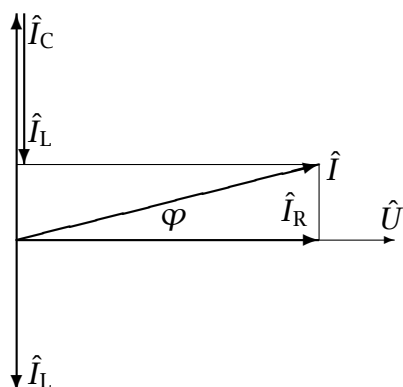
Der Widerstand Z wird bei dieser Resonanzfrequenz maximal und beträgt:

$$Z_{\text{max}} = Z(\omega_0) = R$$

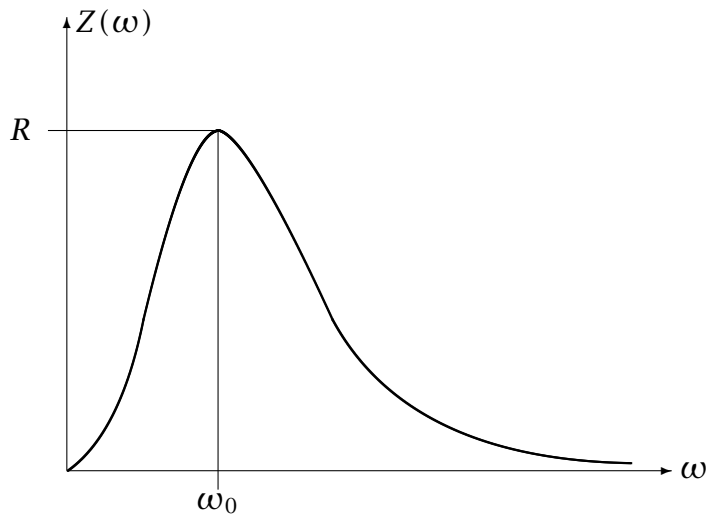
$$\lim_{\omega \rightarrow 0^+} Z(\omega) = 0$$

Zugehöriges Zeigerdiagramm

Die Spannung \hat{U} ist Bezugsgröße



Abhängigkeit des Widerstands $Z(\omega)$ von der Kreisfrequenz ω



8.4. Die Leistung im Wechselstromkreis

Es gilt zu jedem Zeitpunkt:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t)$$

Die Wirkleistung ist:

$$P_{\text{Wirk}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \text{ mit } \cos \varphi \text{ (Leistungsfaktor)}$$

- **Rein Ohmscher Wirkwiderstand:**

Die Momentanleistung ist nie negativ $P(t) \geq 0$, weil Spannung und Strom in Phase sind.

Es fließt ein reiner Wirkstrom. Die Momentanleistung schwankt mit der doppelten Wechselstromfrequenz zwischen 0 und $\hat{U}\hat{I}$. Der Generator gibt nur Energie ab. Es wird keine Leistung ans Netz zurückgegeben.

Es gilt folgender trigonometrischer Trick: $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

$$\begin{aligned} P(t) &= U(t) \cdot I(t) = \hat{U} \sin \omega t \cdot \hat{I} \sin \omega t = \hat{U}\hat{I} \sin^2 \omega t \\ &= \frac{1}{2} \hat{U}\hat{I} (1 - \cos 2\omega t) = \underbrace{\frac{1}{2} \hat{U}\hat{I}}_{P_{\text{Wirk}}} - \underbrace{\frac{1}{2} \hat{U}\hat{I} \cos 2\omega t}_{P_{\text{Blind}}} \end{aligned}$$

Wirkleistung:

$$P_{\text{Wirk}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

- **Rein kapazitiver bzw. rein induktiver Blindwiderstand:**

Bei rein kapazitiven bzw. rein induktiven Widerständen und dem Generator pendelt die Energie mit der doppelten Wechselstromfrequenz hin und her. Die Momentanleistung nimmt positive und negative Werte an. Sie schwanken von $-\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}$

bis $+\frac{1}{2}\hat{U}\hat{I}$. Im Mittel wird keine Leistung übertragen; es fließt nur der sogenannte Blindstrom. Der Generator gibt gleich viel Energie ab wie er aufnimmt.

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \hat{U} \sin \omega t \cdot \hat{I} \sin(\omega t \pm \frac{\pi}{2})$$

Je nachdem ob Spannung um $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vorseilt oder hinterherhinkt.

Es gilt folgender trigonometrischer Trick: $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta)$

$$P(t) = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} (\cos(\omega t - (\omega t \pm \frac{\pi}{2})) - \cos(2\omega t \pm \frac{\pi}{2}))$$

$$P(t) = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} (\cos(\mp \frac{\pi}{2}) - \cos(2\omega t \pm \frac{\pi}{2})) = \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \overbrace{\cos(\mp \frac{\pi}{2})}^{=0}}_{P_{\text{Wirk}}=0} - \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(2\omega t \pm \frac{\pi}{2})}_{P_{\text{Blind}}}$$

Wirkleistung:

$$P_{\text{Wirk}} = 0$$

• **Ohmsche Wirkwiderstände und kapazitive bzw. induktive Blindwiderstände:**

Wegen des Ohmschen Widerstands bekommt der Strom einen sogenannten Wirkanteil. Auch hier schwankt die Leistung mit der doppelten Wechselstromfrequenz. Die positiven Bereiche von $P(t)$ überwiegen jetzt jedoch die negativen. Der Generator gibt mehr Energie ab als er aufnimmt. Beträgt die Phasenverschiebung φ zwischen angelegter Spannung $U(t)$ und Strom $I(t)$, so gilt:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = \hat{U} \sin \omega t \cdot \hat{I} \sin(\omega t - \varphi)$$

mit obigem Trick folgt:

$$P(t) = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} (\cos(\omega t - (\omega t - \varphi)) - \cos(2\omega t - \varphi))$$

$$P(t) = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I} (\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)) = \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi}_{P_{\text{Wirk}}} - \underbrace{U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos(2\omega t - \varphi)}_{P_{\text{Blind}}}$$

Wirkleistung:

$$P_{\text{Wirk}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$$