Kinematik

Zusammenfassung

- Eindimensionale Bewegungen
- Zweidimensionale Bewegungen
- Rotationsbewegungen
- Vergleich Translation/Rotation

Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.

© Jürgen Gilg · E-Mail: gilg@acrotex.net · Webseite: www.acrotex.net **Februar 2008**

Inhaltsverzeichnis

1. Kinematik der Translation

Zur Kinematik (Bewegungslehre) gehören die Bewegungsgesetze ohne die bei der Bewegung auftretenden Kräfte zu berücksichtigen.Unter Translation versteht man eine fortschreitende Bewegung.

1.1. Kinematische Größen der Translation

Ort $\vec{x}$ in [m] (oder **zurückgelegter Weg** $\vec{s}$), **Geschwindigkeit** $\vec{v}$ in $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}]$ und **Beschleunigung** $\vec{a}$ in $[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}]$ sind vektorielle Größen, d. h. Richtung und Betrag sind von grundlegender Bedeutung.

Bewegungen können längs einer Linie (eindimensional) - z. B. beschleunigte Bewegung auf einer Geraden, in einer Ebene (zweidimensional) - z. B. waagrechter Wurf oder im Raum (dreidimensional) - z. B. auf einer Schraubenlinie (darauf wollen wir nicht eingehen) erfolgen.

Es ist zweckmäßig, sich ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. Die kinematischen Größen werden auf dieses Koordinatensystem angepaßt.

Eindimensional:

Man kann auf eine vektorielle Darstellung verzichten, da man nur eine Raumrichtung hat.

Kinematische Größen in positive Koordinatenrichtung zählen positiv, die in negative Koordinatenrichtung zählen negativ (werden mit einem Minus versehen). So hat das Vorzeichen einer kinematischen Größe nur die Bedeutung der Richtung.

Zweidimensional:

Man kann hier vektoriell arbeiten oder man notiert die Gegebenheiten separat in zwei zueinander orthogonale Koordinatenrichtungen.

Kinematische Größen in jeweils positive Koordinatenrichtung zählen positiv, die in jeweils negative Koordinatenrichtung zählen negativ (werden mit einem Minus versehen). So hat auch hier das Vorzeichen einer kinematischen Größe nur die Bedeutung der Richtung in der jeweiligen Koordinatenachse.

Die Bewegung erfolgt in einer Ebene, die durch die beiden Koordinatenachsen aufgespannt wird und es ist zweckmäßig, die kinematischen Größen in diese beiden Raumrichtungen zu zerlegen.

Eindimensionaler Fall:

Man unterscheidet grundsätzlich **Ort** $x(t)$ und **zurückgelegter Weg** $s(t)$.

Hat eine Bewegungen **keine Richtungsumkehr** (Geschwindigkeit wechselt ihr Vorzeichen nicht), so hängen diese beiden Größen wie folgt zusammen:

$$s(t) = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$$

Hierbei ist t_0 der Zeitpunkt bzw. $x(t_0) = x_0$ der Ort zu Beginn der Bewegung und t der Zeitpunkt bzw. $x(t)$ der Ort am Ende der Bewegung.

Hat eine Bewegung **eine Richtungsumkehr** (Geschwindigkeit wechselt ihr Vorzeichen während der Bewegung) - z. B. senkrechter Wurf nach oben oder schiefer Wurf - so kann man die Bewegung in Teilbewegungen vor der Umkehr und nach der Umkehr aufteilen. Eine charakteristische Größe einer solchen Bewegung ist der Zeitpunkt t_S, bei dem die Richtungsumkehr erfolgt.

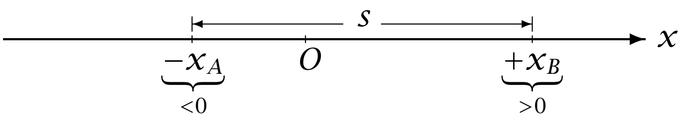
1.1.1. Ort

Der Ort x ist ein Maß für die Entfernung zum Koordinatenursprung.

Ist der Ort x positiv, so liegt er auf der positiven Seite der Koordinatenachse,

ist der Ort x negativ, so liegt er auf der negativen Seite der Koordinatenachse.

Der zurückgelegte Weg s ist immer eine positive Größe und unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems.

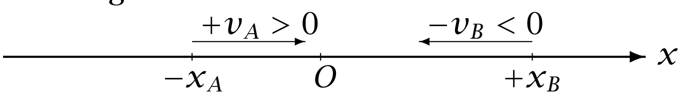


1.1.2. Geschwindigkeit

Die Geschwindigkeit v ist ein Maß, wie schnell und in welche Richtung die Bewegung erfolgt.

Ist die Geschwindigkeit v positiv, so bewegt sich ein Körper in positive Koordinatenrichtung,

ist die Geschwindigkeit v negativ, so bewegt sich ein Körper in negative Koordinatenrichtung.



1.1.3. Beschleunigung

Die Beschleunigung a ist ein Maß, wie stark die Geschwindigkeit zu- oder abnimmt.

Ist die Beschleunigung a positiv, so nimmt die Geschwindigkeit eines Körpers zu,

ist die Beschleunigung a negativ, so nimmt die Geschwindigkeit eines Körpers ab.

1.2. Zusammenhang der kinematischen Größen der Translation

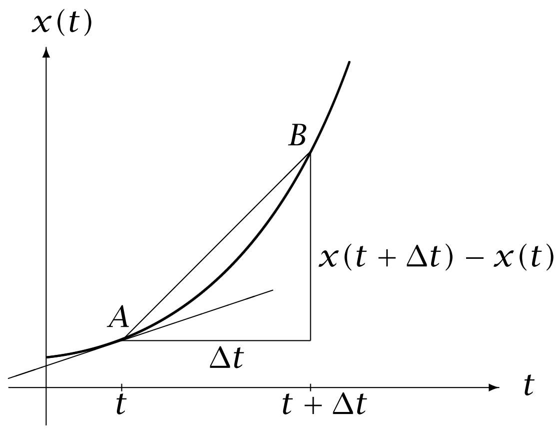
Die explizite Zeitabhängigkeit dieser kinematischen Größen bezeichnet man als Bewegungsgleichungen. Die kinematischen Größen sind folgendermaßen miteinander verknüpft.

Verknüpfung von Ort und Geschwindigkeit

- **Differentielle Darstellung:**

  $$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

  Die Momentangeschwindkeit eines Körpers ist die erste Ableitung des Orts nach der Zeit.



Mathematisch gesehen:

Die **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v} = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{t+\Delta t-t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ im Zeitintervall zwischen t und $t + \Delta t$ ist die Steigung der Sekante im Orts-Zeit-Diagramm. (Steigung der Geraden durch die Punkte A und B).

Die **Momentangeschwindigkeit** $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t ist die Steigung der Tangente im Punkt A des Orts-Zeit-Diagramms.

Wenn man allgemein vom Begriff Geschwindigkeit spricht, so meint man immer die Momentangeschwindigkeit. Andernfalls spricht man explizit von mittlerer Geschwindigkeit oder Durchschnittsgeschwindigkeit.

- **Integrale Darstellung:**

$$\int_{x(t)}^{x(t+\Delta t)} dx' = \int_{t}^{t+\Delta t} v(t')dt' \Rightarrow \underbrace{x(t+\Delta t) - x(t)}_{s} = \int_{t}^{t+\Delta t} v(t')dt'$$

$$\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) = s$$

ist der zurückgelegte Weg in der Zeit von t bis $t + \Delta t$.

Mathematisch gesehen:

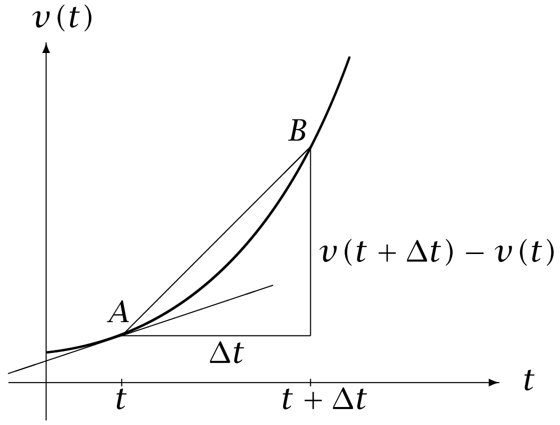
Der **zurückgelegte Weg** s ist gleich der Fläche unterhalb des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms in den Grenzen von t und $t + \Delta t$.

Verknüpfung von Geschwindigkeit und Beschleunigung

- **Differentielle Darstellung:**

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Die Momentanbeschleunigung eines Körpers ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.



Mathematisch gesehen:

Die **mittlere Beschleunigung** $\bar{a} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{t+\Delta t - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ im Zeitintervall zwischen t und $t + \Delta t$ ist die Steigung der Sekante im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm. (Steigung der Geraden durch die Punkte A und B).

Die **Momentanbeschleunigung** $a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v}(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t ist die Steigung der Tangente im Punkt A des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms.

Wenn man allgemein vom Begriff Beschleunigung spricht, so meint man immer die Momentanbeschleunigung. Andernfalls spricht man explizit von mittlerer Beschleunigung oder Durchschnittsbeschleunigung.

- **Integrale Darstellung:**

$$\int_{v(t)}^{v(t+\Delta t)} dv' = \int_{t}^{t+\Delta t} a(t')dt' \Rightarrow v(t+\Delta t) - v(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} a(t')dt'$$

$$\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$$

ist die Geschwindigkeitsänderung in der Zeit von t bis $t + \Delta t$.

Mathematisch gesehen:

Die **Geschwindigkeitsänderung** Δv ist gleich der Fläche unterhalb des Beschleunigungs-Zeit-Diagramms in den Grenzen von t und $t + \Delta t$.

Verknüpfung von Ort und Beschleunigung

- **Differentielle Darstellung:**

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Die Momentanbeschleunigung eines Körpers ist die zweite Ableitung des Orts nach der Zeit.

Bemerkungen:

Startet ein Körper nicht vom Ursprung aus (hat er also bei Bewegungsbeginn schon eine Anfangsentfernung vom Ursprung x_0), so muss man immer Ort und zurückgelegten Weg unterscheiden. Startet ein Körper nicht aus der Ruhe heraus, so besitzt er bereits bei Bewegungsbeginn eine Anfangsgeschwindigkeit v_0.

- Der **Ort** $x(t)$ eines Körpers ist gleich dem **orientierten Flächeninhalt** unterhalb des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms **plus seiner Anfangsentfernung** x_0.

  Orientierter Flächeninhalt bedeutet:

  Fläche oberhalb der Zeitachse minus Fläche unterhalb der Zeitachse.

- Der **zurückgelegte Weg** $s(t)$ eines Körpers ist gleich dem **absoluten Flächeninhalt** unterhalb des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms.

  Absoluter Flächeninhalt bedeutet:

  Fläche oberhalb der Zeitachse plus Fläche unterhalb der Zeitachse.

Anmerkung:

- Nur bei einer **Bewegung mit Richtungsumkehr** gibt es Teile ober- und unterhalb des Geschwindigkeits-Zeit-Diagramms. Orientierte Fläche und absolute Fläche sind zu unterscheiden.

- Erfolgt eine **Bewegung ohne Richtungsumkehr**, so wählt man die Koordinatenachse zweckmäßigerweise in Bewegungsrichtung und erreicht somit, dass das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm immer oberhalb der Zeitachse liegt. Orientierte Fläche und absolute Fläche sind identisch.

  Der **zurückgelegte Weg** $s(t)$ ist gleich dieser **Fläche** und

  der **Ort** $x(t)$ ist gleich dieser **Fläche plus der Anfangsentfernung** x_0.

$$x(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} v(t')dt' + x_0$$

$$s(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} v(t')dt'$$

  Hinweis: Startet ein Körper **ohne Richtungsumkehr zusätzlich vom Ursprung** aus ($x_0 = 0$), so ist Ort und zurückgelegter Weg identisch.

- Allgemein gilt für eine **Bewegung mit oder ohne Richtungsumkehr**:

$$v(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} a(t')dt' + v_0$$

  Die **Momentangeschwindigkeit** eines Körpers ist gleich dem **orientierten Flächeninhalt** unterhalb des Beschleunigungs-Zeit-Diagramms **plus seiner Anfangsgeschwindigkeit** v_0.

2. Eindimensionale Bewegungsformen ohne Richtungsumkehr

2.1. Gleichförmige Bewegung

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Beschleunigung $a = 0$ ist. Gleiche Strecken werden in gleichen Zeiten zurückgelegt. **Bezeichnungen**:

t_0: Zeit des Bewegungsbeginns
x_0: Anfangsentfernung (Abstand zum Ursprung) zum Zeitpunkt $t = 0$
v_0: Anfangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)
$x(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung) zum Zeitpunkt t
$v(t)$: Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t

2.1.1. Bewegungsgleichungen

Für gleichförmige Bewegungen ist $a = 0$, $t \geq 0$.

Es gilt:

$$a(t) = 0$$

$$v(t) = \int_{t'=t_0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int_{t'=t_0}^{t} 0dt' + v_0 = v_0 = \text{const.}$$

$$x(t) = \int_{t'=t_0}^{t} v(t')dt' + x_0 = \int_{t'=t_0}^{t} v_0 dt' + x_0 = v_0 \cdot (t - t_0) + x_0$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

$$a(t) = 0$$

- **Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

$$v(t) = \int_{t'=0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int_{t'=0}^{t} 0dt' + v_0 = v_0 = \text{const.}$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse.

Die **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v}$ (Durchschnittsgeschwindigkeit) einer gleichförmigen Bewegung ist gleich der Momentangeschwindigkeit. Für $t_2 > t_1$ folgt:

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{v_0 t_2 + x_0 - (v_0 t_1 + x_0)}{t_2 - t_1} = \frac{v_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = v_0$$

- **Das Orts-Zeit-Gesetz:**

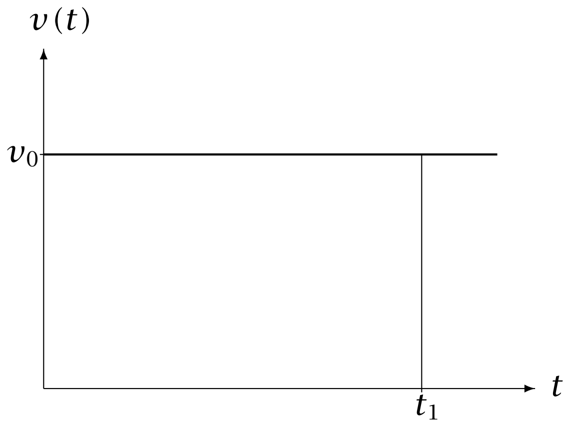
$$x(t) = \int_{t'=0}^{t} v(t')dt' + x_0 = \int_{t'=0}^{t} v_0 dt' + x_0 = v_0 t + x_0$$

Das Orts-Zeit-Diagramm ist eine steigende Gerade mit dem x-Achsenschnittpunkt x_0 und der Steigung $v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

2.1.2. Diagramme

Die zugehörigen Diagramme für die gleichförmige Bewegung sehen folgendermaßen aus:

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm

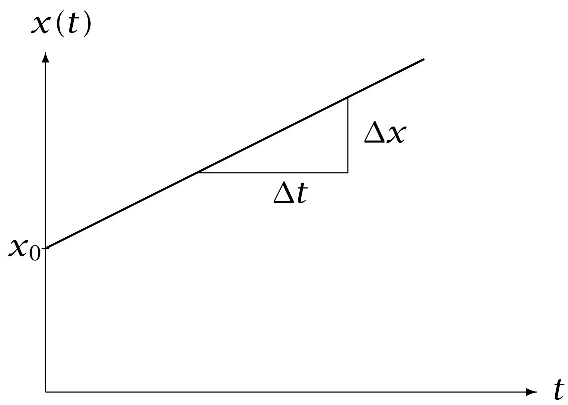


Der **Ort** $x(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (positiv) plus der Anfangsentfernung x_0.

$$x(t_1) = (v_0 - 0)(t_1 - 0) + x_0 = v_0 t_1 + x_0$$

Der **zurückgelegte Weg** $s(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (positiv).

$$s(t_1) = (v_0 - 0)(t_1 - 0) = v_0 t_1$$



Das Orts-Zeit-Diagramm

Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

2.1.3. Beispiele

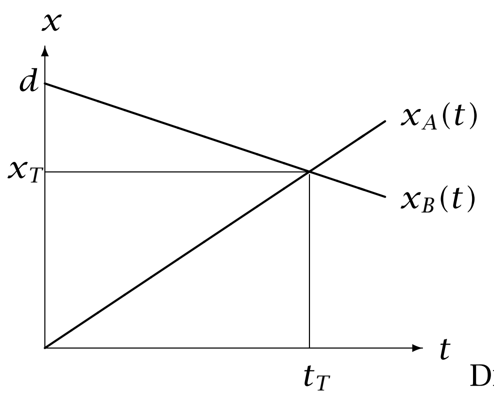
Beispiel 1:

Ein Fahrzeug A fährt mit der konstanten Geschwindigkeit v_A zu Ort B, der d entfernt ist. Ein Fahrzeug B aus Ort B fährt Fahrzeug A mit der konstanten Geschwindigkeit $v_B > v_A$ entgegen.

Wann und wo treffen sich die beiden Fahrzeuge und welchen Weg haben sie jeweils bis dahin zurückgelegt?

Lösung:

Graphische Lösung



Die Bewegungsgleichungen der beiden Fahrzeuge lauten

$$x_A(t) = v_A t \text{ für } t \geq 0$$
$$x_B(t) = d - v_B t \text{ für } t \geq 0$$

Die Bedingung für für den Treffpunkt ist: $x_A(t) = x_B(t)$

$$v_A t = d - v_B t$$

Der Zeitpunkt t_T für den Treffpunkt ist

$$t_T = \frac{d}{v_A + v_B}$$

Der Ort des Treffens berechnet sich

$$x_T = x_A(t_T) = v_A t_T = \frac{v_A d}{v_A + v_B}$$

Der von Fahrzeug A zurückgelegte Weg ist

$$s_A = x_A(t_T) - x_A(0) = v_A t_T$$

Der von B zurückgelegte Weg ist

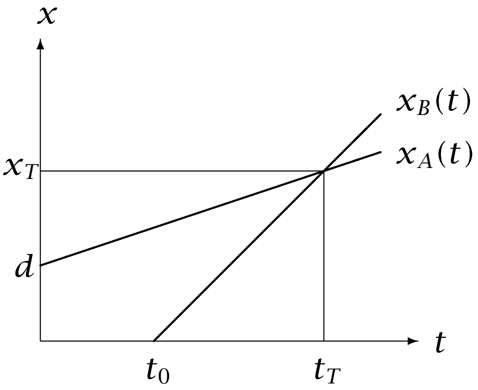
$$s_B = x_B(t_T) - x_B(0) = v_B t_T$$

Beispiel 2:

Ein Fahrzeug A hat den Vorsprung von d und fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_A nach Ort B. Ein weiteres Fahrzeug B startet t_0 später von Ort A mit der konstanten Geschwindigkeit $v_B > v_A$ in Richtung B.
Wann und wo treffen sich die beiden Fahrzeuge und welchen Weg haben sie jeweils bis dahin zurückgelegt?

Lösung:

Graphische Lösung



Die Bewegungsgleichungen der beiden Fahrzeuge lauten

$$x_A(t) = v_A t + d \text{ für } t \geq 0$$
$$x_B(t) = v_B(t - t_0) \text{ für } t \geq t_0$$

Die Bedingung für den Treffpunkt ist: $x_A(t) = x_B(t)$

$$v_A t + d = v_B t - v_B t_0$$

Der Zeitpunkt t_T für den Treffpunkt ist

$$t_T = \frac{d + v_B t_0}{v_B - v_A} > t_0$$

Der Ort des Treffens berechnet sich

$$x_T = x_A(t_T) = v_A t_T + d = v_A \frac{d + v_B t_0}{v_B - v_A} + d = \frac{v_A d + v_A v_B t_0 + v_B d - v_A d}{v_B - v_A} = \frac{v_B}{v_B - v_A}(v_A t_0 + d)$$

Der von Fahrzeug A zurückgelegte Weg ist

$$s_A = x_A(t_T) - x_A(0) = v_A t_T$$

Der von Fahrzeug B zurückgelegte Weg ist

$$s_B = x_B(t_T) - x_B(t_0) = v_B(t_T - t_0)$$

2.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Beschleunigung $a = \text{const.} > 0$ ist. Die Beschleunigung und die Geschwindigkeit haben dieselbe Richtung.

Bezeichnungen:

t_0: Zeit des Bewegungsbeginns
x_0: Anfangsentfernung (Abstand zum Ursprung) zum Zeitpunkt $t = 0$
v_0: Anfangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)
$x(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung) zum Zeitpunkt t
$v(t)$: Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
a: Konstante Beschleunigung

2.2.1. Bewegungsgleichungen

Für beschleunigte Bewegungen ist a = const. > 0, t ≥ 0.

Es gilt:

$$a(t) = a = \text{const.}$$
$$v(t) = \int_{t'=t_0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int_{t'=t_0}^{t} adt' + v_0 = a \cdot (t - t_0) + v_0$$
$$x(t) = \int_{t'=t_0}^{t} v(t')dt' + x_0 = \int_{t'=t_0}^{t} (a \cdot (t' - t_0) + v_0)dt' + x_0 = \frac{1}{2}a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0) + x$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

  $$a(t) = a = \text{const.}$$

  Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse oberhalb der t-Achse, weil $a > 0$ ist.

- **Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

  $$v(t) = \int_{t'=0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int_{t'=0}^{t} adt' + v_0 = at + v_0$$

  Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine steigende Gerade mit dem v-Achsenschnittpun v_0 und der Steigung $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

  Die **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v}$ (Durchschnittsgeschwindigkeit) einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ist diejenige konstante Geschwindigkeit, bei der in derselben Zeit derselbe Weg zurückgelegt wird. Für $t_2 > t_1$ folgt:

  $$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}at_2^2 + v_0t_2 + x_0 - (\frac{1}{2}at_1^2 + v_0t_1 + x_0)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1}$$
  $$= \frac{1}{2}(a(t_1 + t_2) + 2v_0) = \frac{1}{2}(v(t_1) + v(t_2))$$

- **Das Orts-Zeit-Gesetz:**

  $$x(t) = \int_{t'=0}^{t} v(t')dt' + x_0 = \int_{t'=0}^{t} (at' + v_0)dt' + x_0 = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$$

  Das Orts-Zeit-Diagramm ist ein Teil des rechten Zweigs einer nach oben geöffneten Parabel.

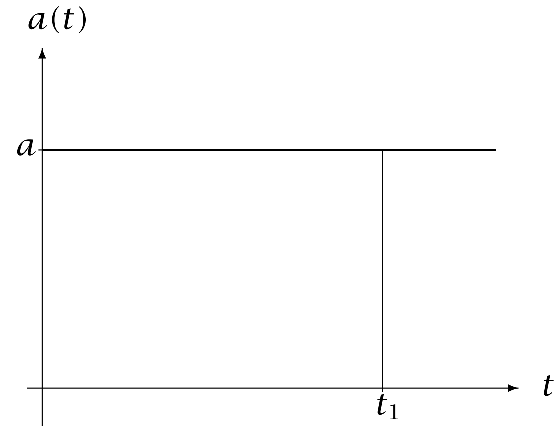
Der senkrechte Wurf nach unten fällt ebenfalls unter diese Kategorie der Bewegungen, jedoch mit der konstanten Beschleunigung $a = +g = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Der freie Fall ist ein Spezialfall des senkrechten Wurfes nach unten, mit den Bedingungen:

$$a = +g = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2},\ v_0 = 0$$

2.2.2. Diagramme

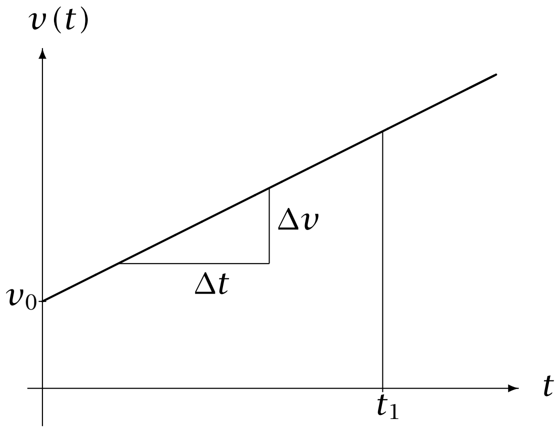
Die zugehörigen Diagramme für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung sehen folgendermaßen aus: **Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm**



Der **momentane Geschwindigkeit** $v(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (positiv) plus der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

$$v(t_1) = (a - 0)(t_1 - 0) + v_0 = at_1 + v_0$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



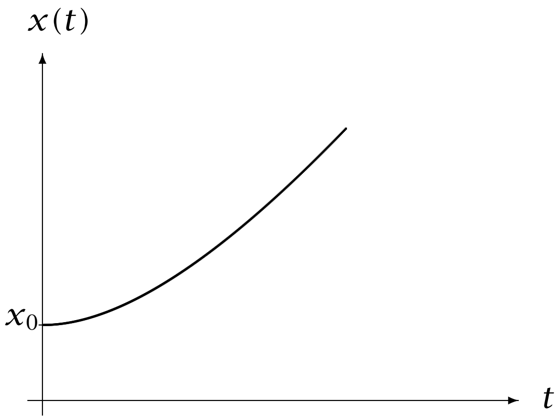
Der **Ort** $x(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes (positiv) plus der Anfangsentfernung x_0.

$$x(t_1) = \frac{1}{2}(v_0 - 0 + v(t_1) - 0)(t_1 - 0) + x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + at_1 + v_0)t_1 + x_0 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 + x_0$$

Der **zurückgelegte Weg** $s(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes (positiv).

$$s(t_1) = \frac{1}{2}(v_0 - 0 + v(t_1) - 0)(t_1 - 0) = \frac{1}{2}(v_0 + at_1 + v_0)t_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1$$

Das Orts-Zeit-Diagramm



Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

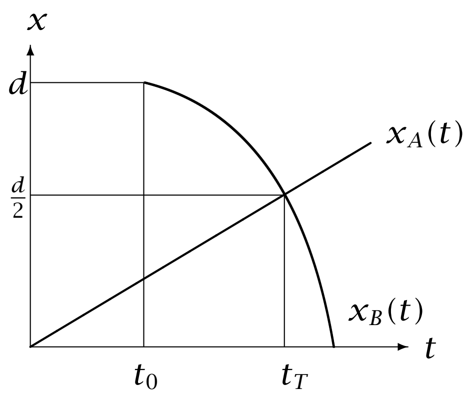
2.2.3. Beispiele

Beispiel 1:

Ein Fahrzeug A fährt mit der konstanten Geschwindigkeit v_A zu Ort B, der d entfernt ist. Ein Fahrzeug B aus Ort B fährt Fahrzeug A mit einer konstanten Beschleunigung a_B aus der Ruhe heraus, jedoch um t_0 zeitverzögert, entgegen. Wann erreicht A die Mitte? Wie groß muss a_B gewählt werden, damit sich die beiden Fahrzeuge zur selben Zeit in der Mitte treffen?

Lösung:

Graphische Lösung



Die Bewegungsgleichungen für die beiden Fahrzeuge lauten

$$x_A(t) = v_A t \text{ für } t \geq 0$$
$$x_B(t) = d - \frac{1}{2}a_B(t - t_0)^2 \text{ für } t \geq t_0$$

Die Bedingung, dass sich A in der Mitte befindet, ist: $x_A(t) = \frac{d}{2}$

$$v_A t = \frac{d}{2}$$

Hieraus folgt die Zeit t_T, bei der A in der Mitte ist

$$t_T = \frac{d}{2v_A}$$

Gleichzeitiger Treffpunkt von B in der Mitte fordert: $x_B(t_T) = \frac{d}{2}$

$$d - \frac{1}{2}a_B(t_T - t_0)^2 = \frac{d}{2}$$

Hieraus ergibt sich für die Beschleunigung a_B des Fahrzeugs B

$$a_B = \frac{d}{(t_T - t_0)^2}$$

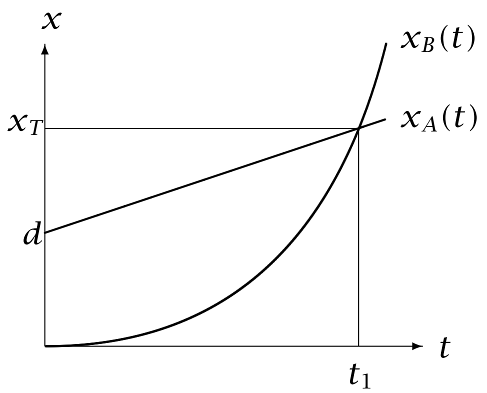
Beispiel 2:

Ein Fahrzeug A hat den Vorsprung von d und fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_A nach Ort B. Ein weiteres Fahrzeug B startet von Ort A mit der konstanten Beschleunigung a_B aus der Ruhe heraus in Richtung B.

Wann und wo treffen sich die beiden Fahrzeuge und welchen Weg haben sie jeweils bis dahin zurückgelegt?

Lösung:

Graphische Lösung



Die Bewegungsgleichungen für die beiden Fahrzeuge lauten

$$x_A(t) = v_A t + d \text{ für } t \geq 0$$
$$x_B(t) = \frac{1}{2}a_B t^2 \text{ für } t \geq 0$$

Die Bedingung für einen Treffpunkt ist: $x_A(t) = x_B(t)$

$$v_A t + d = \frac{1}{2}a_B t^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}a_B t^2 - v_A t - d = 0$$

Dies liefert für den Zeitpunkt des Treffens eine quadratische Gleichung der Variablen t

$$t_{1,2} = \frac{v_A \pm \sqrt{v_A^2 + 2a_B d}}{a_B} = \frac{v_A}{a_B} \pm \sqrt{(\frac{v_A}{a_B})^2 + \frac{2d}{a_B}}$$

Nur die positive Lösung t_1 macht physikalisch Sinn. t_1 ist der Zeitpunkt wann sie sich treffen.

Der Treffpunkt berechnet sich

$$x_T = x_A(t_1) = v_A t_1 + d$$

Der von A zurückgelegte Weg ist

$$s_A = x_A(t_1) - x_A(0) = v_A t_1$$

Der von B zurückgelegte Weg ist

$$s_B = x_B(t_1) - x_B(0) = \frac{1}{2} a_B t_1^2$$

2.3. Gleichmäßig verzögerte Bewegung

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Verzögerung $-a = \text{const.} < 0$ ist. Verzögerung und Geschwindigkeit sind entgegengesetzt gerichtet.

Bezeichnungen:

t_0: Zeit des Bewegungsbeginns
x_0: Anfangsentfernung (Abstand zum Ursprung) zum Zeitpunkt $t = 0$
v_0: Anfangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)
$x(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung) zum Zeitpunkt t
$v(t)$: Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
$-a$: Konstante Verzögerung

2.3.1. Bewegungsgleichungen

Für verzögerte Bewegungen ist $-a = \text{const.} < 0$, $0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{t_S}$. Verzögerte horizontale Bewegungen hören auf, wenn die Geschwindigkeit auf Null abgesunken ist. Es erfolgt keine Richtungsumkehr. Somit ist diese Bewegung zeitlich begrenzt, nämlich bis t_S.

Es gilt:

$$a(t) = -a = \text{const.}$$

$$v(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int\limits_{t'=t_0}^{t} (-a)dt' + v_0 = -a \cdot (t - t_0) + v_0$$

$$x(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} v(t')dt' + x_0 = \int\limits_{t'=t_0}^{t} (-a \cdot (t' - t_0) + v_0)dt' + x_0 = -\frac{1}{2} a \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

  $$a(t) = -a = \text{const.}$$

  Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse unterhalb der t-Achse, weil $-a < 0$ ist.

- **Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

  $$v(t) = \int\limits_{t'=0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int\limits_{t'=0}^{t} (-a)dt' + v_0 = -at + v_0$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine fallende Gerade mit dem v-Achsenschnittpunkt v_0 und der Steigung $-a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Die **mittlere Geschwindigkeit** $\bar{v}$ (Durchschnittsgeschwindigkeit) einer gleichmäßig verzögerten Bewegung ist diejenige konstante Geschwindigkeit, bei der in derselben Zeit derselbe Weg zurückgelegt wird. Für $t_2 > t_1$ folgt:

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{-\frac{1}{2}at_2^2 + v_0 t_2 + x_0 - (-\frac{1}{2}at_1^2 + v_0 t_1 + x_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}a(t_2^2 - t_1^2) + v_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}(-a(t_1 + t_2) + 2v_0) \\ &= \frac{1}{2}(v(t_1) + v(t_2))\end{aligned}$$

- **Das Orts-Zeit-Gesetz:**

$$x(t) = \int\limits_{t'=0}^{t} v(t')dt' + x_0 = \int\limits_{t'=0}^{t} (-at' + v_0)dt' + x_0 = -\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

Das Orts-Zeit-Diagramm ist ein Teil des linken Zweigs einer nach unten geöffneten Parabel.

$$t_S = \frac{v_0}{a}$$

ist die **Bremszeit** und

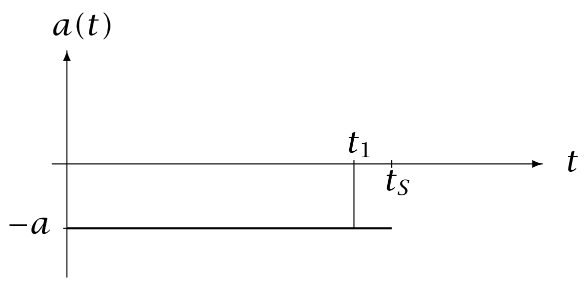
$$S = x(t_S) - x(0) = \frac{v_0^2}{2a}$$

der **Bremsweg.**

2.3.2. Diagramme

Die zugehörigen Diagramme für die gleichmäßig verzögerte Bewegung sehen folgendermaßen aus:

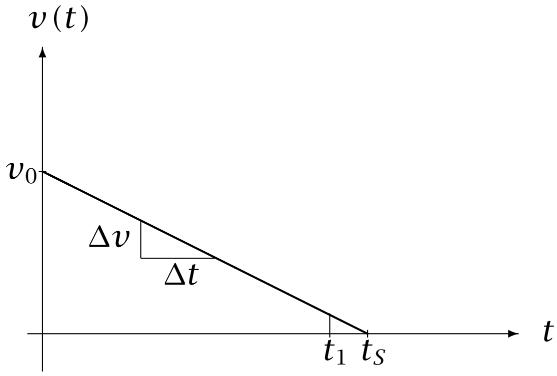
Das Verzögerungs-Zeit-Diagramm



Die **momentane Geschwindigkeit** $v(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (negativ) plus der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

$$v(t_1) = -(0 - (-a))(t_1 - 0) + v_0 = v_0 - at_1$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



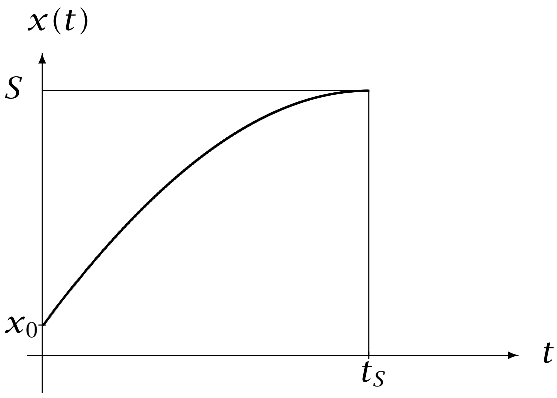
Der **Ort** $x(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes (positiv) plus der Anfangsentfernung x_0.

$$x(t_1) = \frac{1}{2}(v_0 - 0 + v(t_1) - 0)(t_1 - 0) + x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - at_1)t_1 + x_0 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2 + x_0$$

Der **zurückgelegte Weg** s entspricht der Fläche (positiv) des Trapezes.

$$s(t_1) = \frac{1}{2}(v_0 - 0 + v(t_1) - 0)(t_1 - 0) = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - at_1)t_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}at_1^2$$

Das Orts-Zeit-Diagramm



Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

2.3.3. Beispiele

Beispiel 1:

Ein Fahrzeug fährt mit der Geschwindigkeit v_0 auf der Autobahn. Als der Fahrer einen Stau sieht, bremst er mit einer konstanten Verzögerung $-a$ bis er zum Stillstand kommt.

Wie lange dauert die Bremsung und wie groß ist der Bremsweg?

Lösung:

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$
$$v(t) = v_0 - at$$

Stillstand fordert: $v(t) = 0$

$$v_0 - at = 0$$

Die Bremszeit ergibt sich

$$t_S = \frac{v_0}{a}$$

Der Bremsweg ergibt sich

$$S = x(t_S) - x(0) = \frac{v_0^2}{2a}$$

3. Eindimensionale Bewegungen mit Richtungsumkehr

3.1. Senkrechter Wurf nach oben

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Verzögerung $-a = -g = \text{const.} = -9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} < 0$ ist.

Bezeichnungen:

t_0:	Zeit des Bewegungsbeginns
y_0:	Anfangsentfernung (Höhe über dem Ursprung) zum Zeitpunkt $t = 0$
v_0:	Anfangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)
$y(t)$:	Ort (Höhe über dem Ursprung) zum Zeitpunkt t
$v(t)$:	Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
$-g$:	Konstante Erdbeschleunigung $-g = -9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

3.1.1. Bewegungsgleichungen

Für diese Bewegungen ist $-a = -g = \text{const.} < 0$, t ≥ 0. Es erfolgt eine Richtungsumkehr bei der **Steigzeit** t_S.

Es gilt:

$$a(t) = -g = \text{const.}$$

$$v(t) = \int_{t'=t_0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int_{t'=t_0}^{t} (-g)dt' + v_0 = -g \cdot (t - t_0) + v_0$$

$$y(t) = \int_{t'=t_0}^{t} v(t')dt' + y_0 = \int_{t'=t_0}^{t} (-g \cdot (t' - t_0) + v_0)dt' + y_0 = -\frac{1}{2}g \cdot (t - t_0)^2 + v_0 \cdot (t - t_0)$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Beschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

  $$a(t) = -g = \text{const.}$$

  Das Beschleunigungs-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse unterhalb der t-Achse, weil $-g < 0$ ist.

- **Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

$$v(t) = \int_{t'=0}^{t} a(t')dt' + v_0 = \int_{t'=0}^{t} (-g)dt' + v_0 = -gt + v_0$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine fallende Gerade mit dem v-Achsenschnittpunkt v_0 und der Steigung $-g = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

- **Das Orts-Zeit-Gesetz:**

$$y(t) = \int_{t'=0}^{t} v(t')dt' + y_0 = \int_{t'=0}^{t} (-gt' + v_0)dt' + y_0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

Das Orts-Zeit-Diagramm ist eine nach unten geöffnete Parabel.

Die **Steigzeit** ist

$$t_S = \frac{v_0}{g}$$

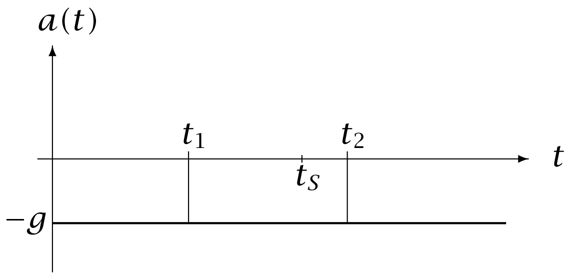
die **Steighöhe** ist

$$y_S = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

3.1.2. Diagramme

Die zugehörigen Diagramme für den senkrechten Wurf nach oben sehen folgendermaßen aus:

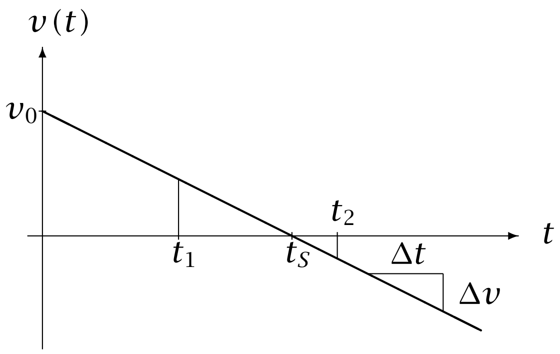
Das Verzögerungs-Zeit-Diagramm



Die **momentane Geschwindigkeit** $v(t_1)$ bzw. $v(t_2)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (negativ) plus der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

$$v(t_1) = -(0 - (-g))(t_1 - 0) + v_0 = v_0 - gt_1$$
$$v(t_2) = -(0 - (-g))(t_2 - 0) + v_0 = v_0 - gt_2$$

Das Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm



Für $t_1 < t_S$, mit $t_S = \frac{v_0}{g}$ gilt:

Der **Ort** $x(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes (positiv) plus der Anfangshöhe y_0.

$$x(t_1) = \frac{1}{2}(v_0 - 0 + v(t_1) - 0)(t_1 - 0) + y_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - gt_1)t_1 + y_0 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 + y_0$$

Der **zurückgelegte Weg** $s(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes (positiv).

$$s(t_1) = \frac{1}{2}(v_0 - 0 + v(t_1) - 0)(t_1 - 0) = \frac{1}{2}(v_0 + v_0 - gt_1)t_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

Für $t_2 > t_S$, mit $t_S = \frac{v_0}{g}$ gilt

Der **Ort** $x(t_2)$ entspricht der Fläche des Dreiecks 1 (positiv) minus der Fläche des Dreiecks 2 (negativ) plus der Anfangshöhe y_0.

$$x(t_2) = \frac{1}{2}(v_0 - 0)(t_S - 0) - \frac{1}{2}(0 - v(t_2))(t_2 - t_S) + y_0 = \frac{1}{2}v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}(gt_2 - v_0)(t_2 - \frac{v_0}{g}) + y_0$$

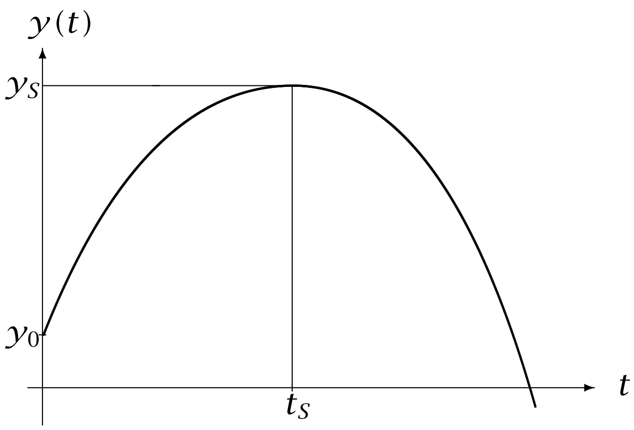
$$x(t_2) = v_0 t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2 + y_0$$

Der **zurückgelegte Weg** $s(t_2)$ entspricht der Fläche des Dreiecks 1 (positiv) plus der Fläche des Dreiecks 2 (negativ).

$$s(t_2) = \frac{1}{2}(v_0 - 0)(t_S - 0) + \frac{1}{2}(0 - v(t_2))(t_2 - t_S) = \frac{1}{2}v_0\frac{v_0}{g} + \frac{1}{2}(gt_2 - v_0)(t_2 - \frac{v_0}{g}) = \ldots$$

$$s(t_2) = -v_0 t_2 + \frac{1}{2}gt_2^2 + \frac{v_0^2}{g}$$

Das Orts-Zeit-Diagramm



Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

3.1.3. Beispiele

Beispiel 1:

Ein Körper wird aus der Höhe $y_0 = 15\,\text{m}$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = 20\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ senkrecht nach oben geschossen. Wann erreicht er den höchsten Punkt und wie hoch liegt dieser über dem Erdboden? Mit welcher Geschwindigkeit (welches Vorzeichen hat diese) trifft er auf dem Erdboden auf?

Vereinfachend rechnen wir diese Aufgabe mit $-g = -10\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Lösung:

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$
$$v(t) = -gt + v_0$$

Die Steigzeit berechnet sich aus der Bedingung: $v(t_S) = 0$

$$t_S = \frac{v_0}{g} = 2\,\text{s}$$

Der höchste Punkt ist der Ort zur Zeit t_S

$$y_S = y(t_S) = v_0 t_S - \frac{1}{2}gt_S^2 + y_0 = y_0 + \frac{v_0^2}{2g} = 35\,\text{m}$$

Die Zeit, die er benötigt, um auf die Erde zu treffen, errechnet sich aus: $y(t) = 0$

$$-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 = 0$$
$$a = -\frac{1}{2}g,\ b = v_0,\ c = y_0$$
$$t_{1,2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{(\frac{v_0}{g})^2 + \frac{2y_0}{g}}$$

Nur der positive Wert $t_1 = 4,65\,\text{s}$ ist physikalisch interessant.

$$v(t_1) = v_0 - gt_1 = -26,5\,\frac{\text{m}}{\text{s}} < 0$$

da sich der Körper nach unten bewegt.

4. Zweidimensionale Bewegungen ohne Richtungsumkehr

4.1. Waagrechter Wurf

Ein waagrechter Wurf ist eine zweidimensionale Bewegung. Man wählt zwei aufeinander senkrechte Koordinaten x (nach rechts positiv) y (nach oben positiv). Der waagrechte Wurf teilt sich in zwei voneinander unabhängige, senkrecht zueinander stehende Bewegungen auf.

Bezeichnungen:

H: Anfangshöhe (Höhe über dem Ursprung) zum Zeitpunkt $t = 0$
v_0: Anfangsgeschwindigkeit in x-Richtung (horizontale Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t =$
$x(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung in x-Richtung) zum Zeitpunkt t
$y(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung in y-Richtung) zum Zeitpunkt t
$h(t)$: Höhe über dem Ursprung zum Zeitpunkt t
$v_x(t)$: Momentangeschwindigkeit in x-Richtung zum Zeitpunkt t
$v_y(t)$: Momentangeschwindigkeit in y-Richtung zum Zeitpunkt t
$v(t)$: Bahngeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
α: Winkel der Bahngeschwindigkeit mit der Horizontalen
$-g$: Konstante Erdbeschleunigung $-g = -9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

4.1.1. Bewegungsgleichungen

In x-Richtung: Gleichförmige Bewegung mit der Horizontalgeschwindigkeit v_0

In y-Richtung: Freier Fall

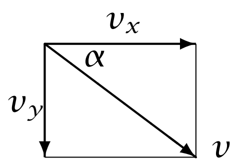
$$x(t) = v_0 t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2$$

Für die Geschwindigkeiten in der jeweiligen Koordinatenrichtung gilt:

$$v_x(t) = v_0$$
$$v_y(t) = -gt$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten stehen senkrecht aufeinander und die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ (Bahngeschwindigkeit) erhält man über den Satz des Pythagoras:

$$v(t) = \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$



Die Bahngeschwindigkeit ist tangential zur Bahnkurve und bildet mit der Horizontalen einen Winkel α, der sich wie folgt berechnet:

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t)}{v_x(t)}$$

α ist negativ, weil v_y in negative y-Richtung zeigt.

Durch Auflösen der $x(t)$-Koordinate nach der Zeit t und Einsetzen in die $y(t)$-Koordinate erhält man die zeitunabhängige Bahnkurve des waagrechten Wurfes.

$$t = \frac{x}{v_0}$$
$$y = -\frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Die Bahnkurve ist eine Parabel, weil $y \sim x^2$.

Wirft man einen Körper waagrecht aus der Höhe H, so ist es zweckmäßig statt des Ortes $y(t)$ die Höhe $h(t)$ zu benutzen.

$$x(t) = v_0 t$$
$$h(t) = H - \frac{1}{2} g t^2$$

Es gibt eine kennzeichnende Größe für diesen Wurf und das ist die **Wurfdauer** T_W. Das ist also diejenige Zeit, die der Körper in y-Richtung braucht, um von der Abwurfhöhe H auf den Erdboden $h = 0$ zu gelangen.

$$\begin{aligned} h(T_W) &= 0 \\ H - \frac{1}{2} g T_W^2 &= 0 \\ T_W &= \sqrt{\frac{2H}{g}} \end{aligned}$$

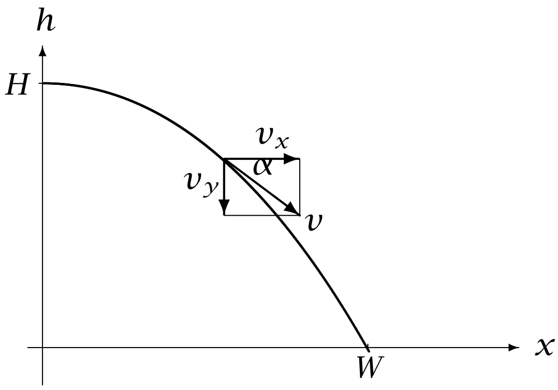
ist die **Wurfdauer**.

$$W = x(T_W) = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

ist die **Wurfweite**.

4.1.2. Bahnkurve

Die Bahnkurve eines waagrechten Wurfes sieht folgendermaßen aus:



4.1.3. Beispiele

Beispiel 1:

Ein Pfeil wird aus der Höhe $H = 15\,\mathrm{m}$ horizontal mit der Geschwindigkeit $v_0 = 60\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ abgeschossen. Wie lange dauert der Flug und wie weit fliegt der Pfeil? Mit welcher Geschwindigkeit und unter welchem Winkel schlägt er im Boden ein?
Vereinfachend rechnen Sie diese Aufgabe mit $-g = -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Lösung:

Gesucht ist die Wurfdauer

$$T_W = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1,73\,\mathrm{s}$$

$$W = x(T_W) = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 103,8\,\mathrm{m}$$

ist die Wurfweite.

Gesucht ist die Bahngeschwindigkeit zum Zeitpunkt T_W

$$v(T_W) = \sqrt{(v_x(T_W))^2 + (v_y(T_W))^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 T_W^2} = 62,45\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\tan\alpha = \frac{v_y(T_W)}{v_x(T_W)} = -\frac{gT_W}{v_0} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -16,1^\circ$$

α ist negativ, weil $v_y(T_W)$ in negative y-Richtung zeigt.

5. Zweidimensionale Bewegungen mit Richtungsumkehr

5.1. Schiefer Wurf

Ein schiefer Wurf ist eine zweidimensionale Bewegung. Man wählt zwei aufeinander senkrechte Koordinaten x (nach rechts positiv) y (nach oben positiv). Der schiefe Wurf teilt sich in zwei voneinander unabhängige, senkrecht zueinander stehende Bewegungen auf. Bildet die Abwurfgeschwindigkeit v_0 einen Winkel $0^\circ < \varphi < 90^\circ$ mit der Horizontalen, so zerlegt man diese in ihre Komponenten:

$$v_{0_x} = v_0 \cos\varphi$$
$$v_{0_y} = v_0 \sin\varphi$$

Bezeichnungen:

- H: Anfangshöhe (Höhe über dem Ursprung) zum Zeitpunkt $t = 0$
- φ: Abwurfwinkel (Winkel der Abwurfgeschwindigkeit mit der Horizontalen)
- v_0: Abwurfgeschwindigkeit
- v_{0_x}: Horizontale Anfangsgeschwindigkeitskomponente in x-Richtung zum Zeitpunkt $t = 0$
- v_{0_y}: Vertikale Anfangsgeschwindigkeitskomponente in y-Richtung zum Zeitpunkt $t = 0$
- $x(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung in x-Richtung) zum Zeitpunkt t
- $y(t)$: Ort (Abstand zum Ursprung in y-Richtung) zum Zeitpunkt t
- $v_x(t)$: Momentangeschwindigkeit in x-Richtung zum Zeitpunkt t
- $v_y(t)$: Momentangeschwindigkeit in y-Richtung zum Zeitpunkt t
- $v(t)$: Bahngeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
- α: Winkel der Bahngeschwindigkeit mit der Horizontalen
- $-g$: Konstante Erdbeschleunigung $-g = -9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

5.1.1. Bewegungsgleichungen

In x-Richtung: Gleichförmige Bewegung mit der Horizontalgeschwindigkeit $v_{0_x} = v_0 \cos\varphi$

In y-Richtung: Senkrechter Wurf nach oben mit Vertikalanfangsgeschwindigkeit $v_{0_y} = v_0 \sin\varphi$ und der Abwurfhöhe H

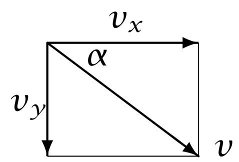
$$x(t) = v_{0_x} t = (v_0 \cos\varphi) \cdot t$$
$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_{0_y} t + H = -\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin\varphi) \cdot t + H$$

Für die Geschwindigkeiten in der jeweiligen Koordinatenrichtung gilt:

$$v_x(t) = v_0 \cos\varphi$$
$$v_y(t) = v_0 \sin\varphi - gt$$

Diese Geschwindigkeitskomponenten stehen senkrecht aufeinander und die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ (Bahngeschwindigkeit) erhält man über den Satz des Pythagoras:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{(v_x(t))^2 + (v_y(t))^2} \\ &= \sqrt{v_0^2 \cos^2\varphi + (v_0 \sin\varphi - gt)^2} \end{aligned}$$



Die Bahngeschwindigkeit ist tangential zur Bahnkurve und bildet mit der Horizontalen einen Winkel α, der sich wie folgt berechnet:

$$\tan\alpha = \frac{v_y(t)}{v_x(t)}$$

α ist positiv in der Steigphase, weil v_y in positive y-Richtung zeigt.

α ist negativ in der Fallphase, weil v_y in negative y-Richtung zeigt.

Durch Auflösen der $x(t)$-Koordinate nach der Zeit t und Einsetzen in die $y(t)$-Koordinate erhält man die zeitunabhängige Bahnkurve des schiefen Wurfes.

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_{0_x}} \\ y &= -\frac{g}{2v_{0_x}^2}x^2 + \frac{v_{0_y}}{v_{0_x}}x + H = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2 + (\tan\varphi)\cdot x + H \end{aligned}$$

Die Bahnkurve ist eine Parabel, weil $y \sim x^2$.

Der Scheitel liegt bei:

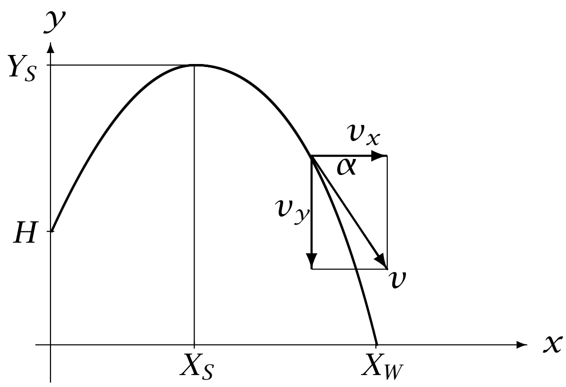
$$S(\underbrace{\frac{v_0^2 \sin 2\varphi}{2g}}_{X_S>0} / \underbrace{\frac{v_0^2 \sin^2\varphi}{2g} + H}_{Y_S>0})$$

Die **Steigzeit** beträgt:

$$T_S = \frac{v_0 \sin\varphi}{g}$$

5.1.2. Bahnkurve

Die Bahnkurve eines schiefen Wurfes sieht folgendermaßen aus:



5.1.3. Beispiele

Beispiel 1:

Eine Kanonenkugel wird vom Erdboden unter einem Winkel von $\varphi = 30^\circ$ mit der Horizontalen und der Geschwindigkeit $v_0 = 90\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ abgeschossen. Wie hoch und wie weit fliegt die Kugel? Wie müßte man den Abschußwinkel φ_{max} bei gleicher Abschußgeschwindigkeit wählen, damit die Kugel am weitesten fliegt?

Lösung:

Die Gleichung der Bahnkurve mit $H = 0$ lautet:

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}x^2 + (\tan\varphi)\cdot x$$

Für den Scheitel gilt:

$$S\left(\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{2g} / \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g}\right)$$

Die Steighöhe ist die y-Koordinate des Scheitels

$$Y_S = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{2g}$$

Die Wurfweite ist in diesem Fall ($H = 0$) das Doppelte der x-Koordinate des Scheitels

$$X_W = 2X_S = 2\frac{v_0^2\sin 2\varphi}{2g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi$$

Maximale Wurfweite erhält man, wenn X_W maximal wird:

Die erste Ableitung von X_W nach φ muss Null sein.

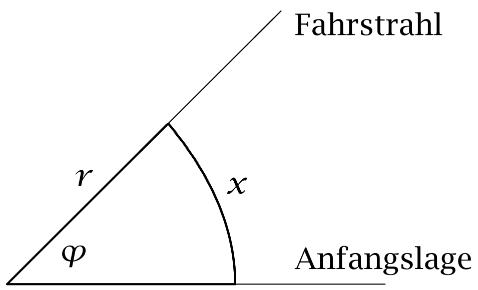
$$\frac{dX_W}{d\varphi} = \frac{v_0^2}{g}2\cos 2\varphi = 0$$

$$\cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi_{\text{max}} = 45^\circ$$

6. Kinematik der Rotation

Unter Rotation versteht man die Bewegung auf einer Kreisbahn um eine raumfeste und körperfeste Achse.

Bei der Rotation werden alle Winkel im Bogenmaß (rad) ausgedrückt. Dies ist das Verhältnis des vom Winkel zwischen Anfangslage und Fahrstrahl eingeschlossenen Kreisbogens x zum Radius r. Die Einheit dieses Verhältnisses ist dimensionslos wird jedoch mit (rad) gekennzeichnet, um Verwechslungen mit der Einheit Grad (°) zu vermeiden.



Der Winkel berechnet sich also zu

$$\varphi = \frac{x}{r}$$

6.1. Kinematische Größen der Rotation

Drehwinkel $\vec{\varphi}$ in [rad] = [ ] (oder **Anzahl der Umläufe** $N = \frac{\varphi}{2\pi}$), **Winkelgeschwindigkeit** $\vec{\omega}$ in $[\frac{\text{rad}}{\text{s}}] = [\frac{1}{\text{s}}]$ (oder **Drehzahl** $n = \frac{\omega}{2\pi}$) und **Winkelbeschleunigung** $\vec{\alpha}$ in $[\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}] = [\frac{1}{\text{s}^2}]$ sind vektorielle Größen, d. h. Richtung und Betrag sind von grundlegender Bedeutung.

Es ist zweckmäßig, sich ein geeignetes Koordinatensystem zu wählen. Die kinematischen Größen werden auf dieses Koordinatensystem angepaßt.

Kinematische Größen in positive Koordinatenrichtung zählen positiv, die in negative Koordinatenrichtung zählen negativ (werden mit einem Minus versehen). So hat das Vorzeichen einer kinematischen Größe nur die Bedeutung der Richtung.

Man unterscheidet grundsätzlich **Drehwinkel** $\varphi(t)$ und **überstrichenen Winkel** $\Delta\varphi(t)$.

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(t_0) = \varphi(t) - \varphi_0$$

Hierbei ist t_0 der Zeitpunkt bzw. $\varphi(t_0) = \varphi_0$ der Drehwinkel zu Beginn der Rotation und t der Zeitpunkt bzw. $\varphi(t)$ der Drehwinkel am Ende der Rotation.

6.1.1. Drehwinkel (Winkel)

Der Drehwinkel φ ist der Winkel, der durch den Fahrstrahl und die Ausgangslage eingeschlossen wird.

Ist der Drehwinkel φ positiv, so liegt der Fahrstrahl in mathematisch positiver Richtung,

ist der Drehwinkel φ negativ, so liegt der Fahrstrahl in mathematisch negativer Richtung.

6.1.2. Winkelgeschwindigkeit

Die Winkelgeschwindigkeit ω ist ein Maß, wie schnell und in welche Richtung die Rotation erfolgt.

Ist die Winkelgeschwindigkeit ω positiv, so dreht sich ein Körper in mathematisch positiver Richtung,

ist die Winkelgeschwindigkeit ω negativ, so dreht sich ein Körper in mathematisch negativer Richtung.

6.1.3. Winkelbeschleunigung

Die Winkelbeschleunigung α ist ein Maß, wie stark die Winkelgeschwindigkeit zu- oder abnimmt.

Ist die Winkelbeschleunigung α positiv, so nimmt die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers zu,

ist die Winkelbeschleunigung α negativ, so nimmt die Winkelgeschwindigkeit eines Körpers ab.

6.2. Zusammenhang der kinematischen Größen der Rotation

Die explizite Zeitabhängigkeit dieser Größen bezeichnet man als Bewegungsgleichungen.

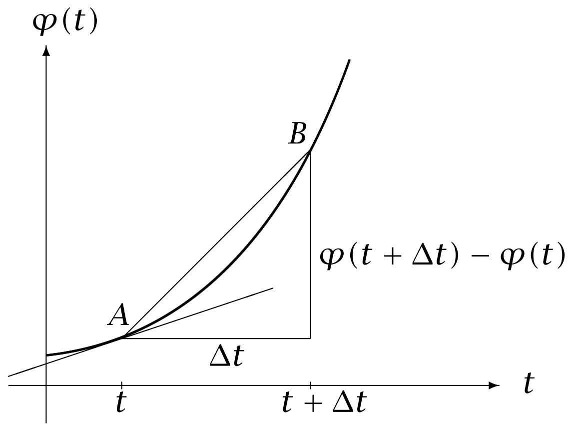
Die kinematischen Größen sind folgendermaßen miteinander verknüpft:

Verknüpfung von Drehwinkel und Winkelgeschwindigkeit

- **Differentielle Darstellung:**

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

Die Momentanwinkelgeschwindkeit eines Körpers ist die erste Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit.



Mathematisch gesehen:

Die **mittlere Winkelgeschwindigkeit** $\bar{\omega} = \frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{t+\Delta t - t} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ im Zeitintervall zwischen t und $t + \Delta t$ ist die Steigung der Sekante im Winkel-Zeit-Diagramm. (Steigung der Geraden durch die Punkte A und B).

Die **Momentanwinkelgeschwindigkeit** $\omega(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t ist die Steigung der Tangente im Punkt A des Winkel-Zeit-Diagramms.

Wenn man allgemein vom Begriff Winkelgeschwindigkeit spricht, so meint man immer die Momentanwinkelgeschwindigkeit. Andernfalls spricht man explizit von mittlerer Winkelgeschwindigkeit oder Durchschnittswinkelgeschwindigkeit.

- **Integrale Darstellung:**

$$\int\limits_{\varphi(t)}^{\varphi(t+\Delta t)} d\varphi' = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \omega(t')dt' \Rightarrow \underbrace{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}_{\Delta\varphi} = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \omega(t')dt'$$

$\Delta\varphi = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ ist der überstrichene Winkel in der Zeit von t bis $t + \Delta t$.

Mathematisch gesehen:

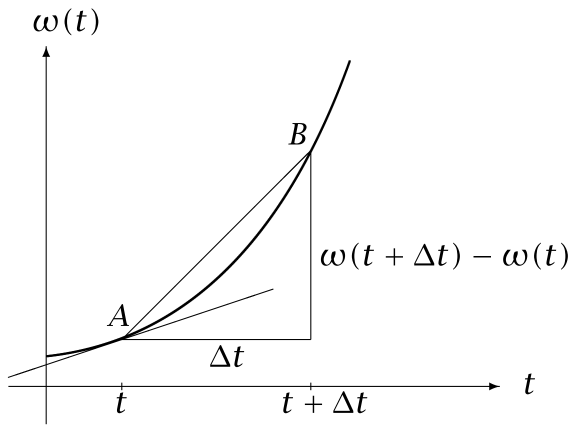
Der **überstrichene Winkel** $\Delta\varphi$ ist gleich der Fläche unterhalb des Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramms in den Grenzen von t und $t + \Delta t$.

Verknüpfung von Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

- **Differentielle Darstellung:**

$$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$$

Die Momentanwinkelbeschleunigung eines Körpers ist die erste Ableitung der Winkelgeschwi
nach der Zeit.



Mathematisch gesehen:

Die **mittlere Winkelbeschleunigung** $\bar{\alpha}=\frac{\omega(t+\Delta t)-\omega(t)}{t+\Delta t-t}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ im Zeitintervall zwischen t und $t+\Delta t$ ist die Steigung der Sekante im Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm. (Steigung der Geraden durch die Punkte A und B).

Die **Momentanwinkelbeschleunigung** $\alpha(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{d\omega}{dt}=\omega(t)$ eines Körpers zum Zeitpunkt t ist die Steigung der Tangente im Punkt A des Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramms.

Wenn man allgemein vom Begriff Winkelbeschleunigung spricht, so meint man immer die Momentanwinkelbeschleunigung. Andernfalls spricht man explizit von mittlerer Winkelbeschleunigung oder Durchschnittswinkelbeschleunigung.

- **Integrale Darstellung:**

$$\int\limits_{\omega(t)}^{\omega(t+\Delta t)} d\omega' = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \alpha(t')dt' \Rightarrow \omega(t+\Delta t)-\omega(t) = \int\limits_{t}^{t+\Delta t} \alpha(t')dt'$$

$\Delta\omega=\omega(t+\Delta t)-\omega(t)$ ist die Winkelgeschwindigkeitsänderung in der Zeit von t bis $t+\Delta t$.

Mathematisch gesehen:

Die **Winkelgeschwindigkeitsänderung** $\Delta\omega$ ist gleich der Fläche unterhalb des Winkelbeschleunigungs-Zeit-Diagramms in den Grenzen von t und $t+\Delta t$.

Verknüpfung von Drehwinkel und Winkelbeschleunigung

- **Differentielle Darstellung:**

$$\alpha(t)=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

Die Momentanwinkelbeschleunigung eines Körpers ist die zweite Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit.

Bemerkungen:

Rotiert ein Körper mit Anfangsdrehwinkel (hat er also bei Rotationsbeginn schon einen Drehwinkel φ_0), so muss man immer Drehwinkel und überstrichenen Winkel unterscheiden. Rotiert ein Körper nicht aus der Ruhe heraus, so besitzt er bereits bei Rotationsbeginn eine Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0.

- Der **Drehwinkel** $\varphi(t)$ eines Körpers ist gleich dem **orientierten Flächeninhalt** unterhalb des Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramms **plus seines Anfangsdrehwinkels** φ_0.

  Orientierter Flächeninhalt bedeutet:

  Fläche oberhalb der Zeitachse minus Fläche unterhalb der Zeitachse.

- Der **überstrichene Winkel** $\Delta\varphi(t)$ eines Körpers ist gleich dem **absoluten Flächeninhalt** unterhalb des Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramms.

  Absoluter Flächeninhalt bedeutet:

  Fläche oberhalb der Zeitachse plus Fläche unterhalb der Zeitachse.

Anmerkung:

- Bei Rotationen wählt man die Koordinatenachse zweckmäßigerweise in Rotationsrichtung und erreicht somit, dass das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm immer oberhalb der Zeitachse liegt. Orientierte Fläche und absolute Fläche sind identisch.

  Der **überstrichene Winkel** $\Delta\varphi(t)$ ist gleich dieser **Fläche** und

  der **Drehwinkel** $\varphi(t)$ ist gleich dieser **Fläche plus dem Anfangsdrehwinkel** φ_0.

$$\varphi(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0$$

$$\Delta\varphi(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} \omega(t')dt'$$

  Hinweis:

  Rotiert ein Körper **zusätzlich ohne Anfangsdrehwinkel** ($\varphi_0 = 0$), so ist Drehwinkel und überstrichener Winkel identisch.

- Allgemein gilt für eine **Rotation**:

$$\omega(t) = \int\limits_{t'=t_0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0$$

  Die **Momentanwinkelgeschwindigkeit** eines Körpers ist gleich dem **orientierten Flächeninhalt** unterhalb des Winkelbeschleunigungs-Zeit-Diagramms **plus seiner Anfangswinkelgeschwindigkeit** ω_0.

6.3. Gleichförmige Rotation

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Winkelbeschleunigung $\alpha = 0$ ist. Gleiche Winkel werden in gleichen Zeiten überstrichen.

Bezeichnungen:

t_0: Zeit des Rotationsbeginns
φ_0: Anfangsdrehwinkel (Drehwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$)
N_0: Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt $t = 0$
ω_0: Konstante Winkelgeschwindigkeit
n_0: Drehzahl zum Zeitpunkt $t = 0$
$\varphi(t)$: Drehwinkel zum Zeitpunkt t
$N(t)$: Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt t
$\omega(t)$: Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
$n(t)$: Drehzahl zum Zeitpunkt t

6.3.1. Bewegungsgleichungen

Für gleichförmige Rotationen ist $\alpha = 0$, $t \geq 0$.

Es gilt:

$$\alpha(t) = 0$$

$$\omega(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0 = \int_{t'=t_0}^{t} 0dt' + \omega_0 = \omega_0 = \text{const.}$$

$$\varphi(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \int_{t'=t_0}^{t} \omega_0 dt' + \varphi_0 = \omega_0 \cdot (t - t_0) + \varphi_0$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

$$\alpha(t) = 0$$

- **Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

$$\omega(t) = \int_{t'=0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0 = \int_{t'=0}^{t} 0dt' + \omega_0 = \omega_0 = \text{const.}$$

$$n(t) = \frac{1}{2\pi}\omega_0 = n_0 = \text{const.}$$

Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse.

Die **mittlere Winkelgeschwindigkeit** $\bar{\omega}$ (Durchschnittswinkelgeschwindigkeit) einer gleichförmigen Rotation ist gleich der Momentanwinkelgeschwindigkeit. Für $t_2 > t_1$ folgt:

$$\bar{\omega} = \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\omega_0 t_2 + \varphi_0 - (\omega_0 t_1 + \varphi_0)}{t_2 - t_1}$$
$$= \frac{\omega_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \omega_0$$

- **Das Winkel-Zeit-Gesetz:**

$$\varphi(t) = \int_{t'=0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \int_{t'=0}^{t} \omega_0 dt' + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0$$

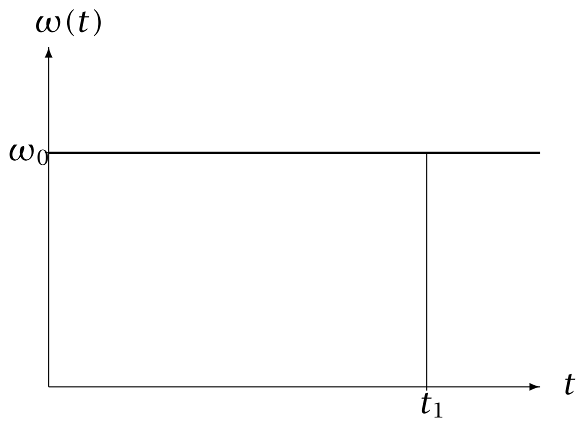
$$N(t) = \frac{1}{2\pi}\varphi(t) = n_0 t + N_0$$

Das Winkel-Zeit-Diagramm ist eine steigende Gerade mit dem φ-Achsenschnittpunkt φ_0 und der Steigung $\omega_0 = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$

6.3.2. Diagramme

Die zugehörigen Diagramme für eine gleichförmige Rotation sehen folgendermaßen aus:

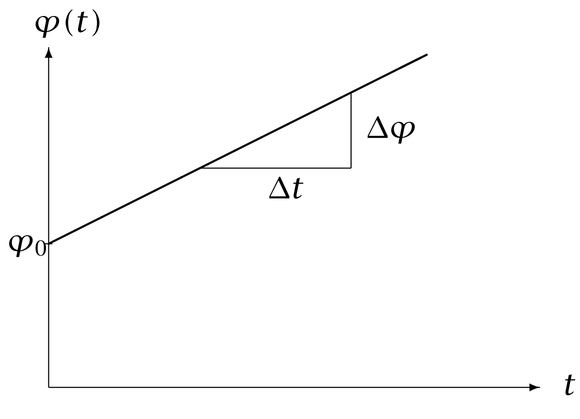
Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm



Der **überstrichene Winkel** $\Delta\varphi(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (positiv).

$$\Delta\varphi(t_1) = (\omega_0 - 0)(t_1 - 0) = \omega_0 t_1$$

Das Winkel-Zeit-Diagramm



Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

6.3.3. Beispiele

Beispiel 1:

Ein Motor hat eine Drehzahl von $n_1 = 50\,\frac{1}{s}$. Wie groß ist demnach seine Winkelgeschwindigkeit ω_1 und wie viele Umdrehungen N_1 macht er in $t_1 = 10\,\text{s}$?

Lösung:

Es gilt für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi n$

$$\omega_1 = 2\pi n_1 = 314,2\,\frac{1}{\text{s}}$$

Es gilt $N(t_1) = \frac{1}{2\pi}\omega_1 t_1 = n_1 t_1 = 500$

6.4. Gleichmäßig beschleunigte Rotation

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Winkelbeschleunigung $\alpha =$ const. > 0 ist. Winkelbeschleunigung und Winkelgeschwindigkeit sind gleichgerichtet.

Bezeichnungen:

- t_0: Zeit des Rotationsbeginns
- φ_0: Anfangsdrehwinkel (Drehwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$)
- N_0: Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt $t = 0$
- ω_0: Anfangswinkelgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)
- n_0: Anfangsdrehzahl (Drehzahl zum Zeitpunkt $t = 0$)
- $\varphi(t)$: Drehwinkel zum Zeitpunkt t
- $N(t)$: Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt t
- $\omega(t)$: Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
- $n(t)$: Drehzahl zum Zeitpunkt t
- α: Konstante Winkelbeschleunigung

6.4.1. Bewegungsgleichungen

Für beschleunigte Rotationen ist α = const. > 0, t ≥ 0.

Es gilt:

$$\alpha(t) = \alpha = \text{const.}$$

$$\omega(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0 = \int_{t'=t_0}^{t} \alpha dt' + \omega_0 = \alpha \cdot (t - t_0) + \omega_0$$

$$\varphi(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \int_{t'=t_0}^{t} (\alpha \cdot (t' - t_0) + \omega_0)dt' + \varphi_0 = \frac{1}{2}\alpha \cdot (t - t_0)^2 + \omega_0 \cdot (t - t_0)$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

  $$\alpha(t) = \alpha = \text{const.}$$

  Das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse oberhalb der t-Achse, weil $\alpha > 0$ ist.

- **Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

$$\omega(t) = \int_{t'=0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0 = \int_{t'=0}^{t} \alpha dt' + \omega_0 = \alpha t + \omega_0$$
$$n(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t) = \frac{1}{2\pi}\alpha t + n_0$$

  Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine steigende Gerade mit dem ω-Achsenschnittpunkt ω_0 und der Steigung $\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$

  Die **mittlere Winkelgeschwindigkeit** $\bar{\omega}$ (Durchschnittswinkelgeschwindigkeit) einer gleichmäßig beschleunigten Rotation ist diejenige konstante Winkelgeschwindigkeit, bei der in derselben Zeit derselbe Winkel überstrichen wird. Für $t_2 > t_1$ folgt:

$$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\frac{1}{2}\alpha t_2^2 + \omega_0 t_2 + \varphi_0 - (\frac{1}{2}\alpha t_1^2 + \omega_0 t_1 + \varphi_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\alpha(t_2^2 - t_1^2) + \omega_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}(\alpha(t_1 + t_2) + 2\omega_0) \\ &= \frac{1}{2}(\omega(t_1) + \omega(t_2))\end{aligned}$$

- **Das Winkel-Zeit-Gesetz:**

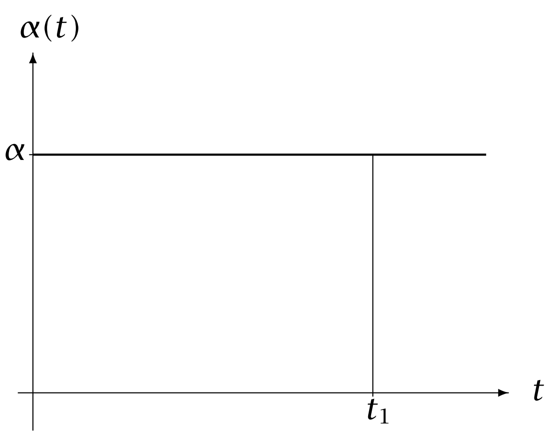
$$\varphi(t) = \int_{t'=0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \int_{t'=0}^{t} (\alpha t' + \omega_0)dt' + \varphi_0 = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$
$$N(t) = \frac{1}{2\pi}\varphi(t) = \frac{1}{4\pi}\alpha t^2 + n_0 t + N_0$$

  Das Winkel-Zeit-Diagramm ist ein Teil des rechten Zweigs einer nach oben geöffneten Parabel.

6.4.2. Diagramme

Die zugehörigen Diagramme für eine gleichmäßig beschleunigte Rotation sehen folgendermaßen aus:

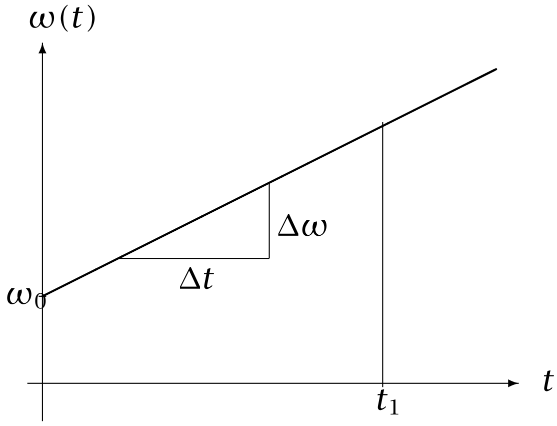
Das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Diagramm



Die **momentane Winkelgeschwindigkeit** $\omega(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (positiv) plus der Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0.

$$\omega(t_1) = (\alpha - 0)(t_1 - 0) + \omega_0 = \alpha t_1 + \omega_0$$

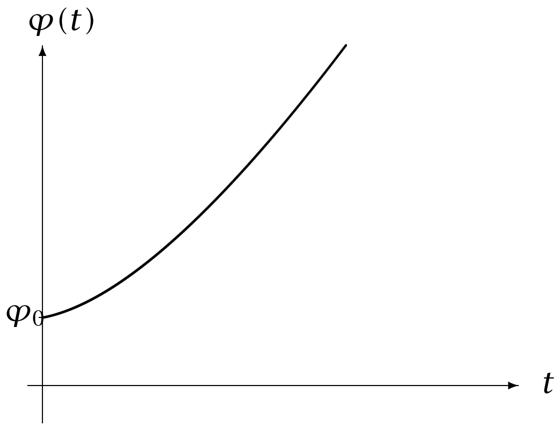
Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm



Der **überstrichene Winkel** $\Delta\varphi(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes.

$$\Delta\varphi(t_1) = \frac{1}{2}(\omega_0 - 0 + \omega(t_1) - 0)(t_1 - 0) = \frac{1}{2}(\omega_0 + \alpha t_1 + \omega_0)t_1 = \frac{1}{2}\alpha t_1^2 + \omega_0 t_1$$

Das Winkel-Zeit-Diagramm



Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

6.4.3. Beispiele

Beispiel 1:

Ein Motor beschleunigt gleichmäßig aus dem Stillstand und erreicht nach $t_1 = 10\,\mathrm{s}$ eine Drehzahl von $n_1 = 3000\,\frac{1}{\mathrm{min}}$. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit ω_1 zu diesem Zeitpunkt t_1, wie groß ist seine Winkelbeschleunigung α und wie viele Umdrehungen N_1 hat er bis zu diesem Zeitpunkt gemacht?

Lösung:

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow N(t) = \frac{1}{4\pi}\alpha t^2$$
$$\omega(t) = \alpha t \Rightarrow n(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t)$$
$$\omega_1 = \omega(t_1) = 2\pi n(t_1) = 2\pi n_1 = 314,2\,\frac{1}{\mathrm{s}}$$

Ferner gilt

$$n_1 = n(t_1) = \frac{1}{2\pi}\alpha t_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2\pi n_1}{t_1} = 31,4\,\frac{1}{\mathrm{s}^2}$$

Für die Anzahl der Umdrehungen folgt

$$N_1 = N(t_1) = \frac{1}{4\pi}\alpha t_1^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{2\pi n_1}{t_1}t_1^2 = \frac{n_1 t_1}{2} = 200$$

6.5. Gleichmäßig verzögerte Rotation

Diese Bewegungsform zeichnet sich dadurch aus, dass die Winkelverzögerung $-\alpha =$ const. < 0 ist. Winkelbeschleunigung und Winkelgeschwindigkeit sind entgegengesetzt gerichtet.

Bezeichnungen:

t_0:	Zeit des Rotationsbeginns
φ_0:	Anfangsdrehwinkel (Drehwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$)
N_0:	Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt $t = 0$
ω_0:	Anfangswinkelgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)
n_0:	Anfangsdrehzahl (Drehzahl zum Zeitpunkt $t = 0$)
$\varphi(t)$:	Drehwinkel zum Zeitpunkt t
$N(t)$:	Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt t
$\omega(t)$:	Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
$n(t)$:	Drehzahl zum Zeitpunkt t
$-\alpha$:	Konstante Winkelverzögerung

6.5.1. Bewegungsgleichungen

Für verzögerte Rotationen ist $-\alpha =$ const. < 0, $0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{t_S}$. Verzögerte Rotationen hören auf, wenn die Winkelgeschwindigkeit auf Null abgesunken ist. Es erfolgt keine Richtungsumkehr. Somit ist diese Bewegung zeitlich begrenzt, nämlich bis t_S.

Es gilt:

$$\alpha(t) = -\alpha = \text{const.}$$
$$\omega(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0 = \int_{t'=t_0}^{t} (-\alpha)dt' + \omega_0 = -\alpha \cdot (t - t_0) + \omega_0$$
$$\varphi(t) = \int_{t'=t_0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \int_{t'=t_0}^{t} (-\alpha \cdot (t' - t_0) + \omega_0)dt' + \varphi_0 = -\frac{1}{2}\alpha \cdot (t - t_0)^2 + \omega_0 \cdot (t -$$

Beginnt der Körper zum Zeitpunkt $t_0 = 0$, so vereinfachen sich die Bewegungsgleichungen zu:

- **Das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Gesetz:**

  $$\alpha(t) = -\alpha = \text{const.}$$

  Das Winkelbeschleunigungs-Zeit-Diagramm ist eine Parallele zur t-Achse unterhalb der t-Achse, weil $-\alpha < 0$ ist.

- **Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Gesetz:**

  $$\omega(t) = \int\limits_{t'=0}^{t} \alpha(t')dt' + \omega_0 = \int\limits_{t'=0}^{t} (-\alpha)dt' + \omega_0 = -\alpha t + \omega_0$$
  $$n(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t) = -\frac{1}{2\pi}\alpha t + n_0$$

  Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm ist eine fallende Gerade mit dem ω-Achsenschnittpunkt ω_0 und der Steigung $-\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

  Die **mittlere Winkelgeschwindigkeit** $\bar{\omega}$ (Durchschnittswinkelgeschwindigkeit) einer gleichmäßig verzögerten Rotation ist diejenige konstante Winkelgeschwindigkeit, bei der in derselben Zeit derselbe Winkel überstrichen wird. Für $t_2 > t_1$ folgt:

  $$\begin{aligned}\bar{\omega} &= \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{-\frac{1}{2}\alpha t_2^2 + \omega_0 t_2 + \varphi_0 - (-\frac{1}{2}\alpha t_1^2 + \omega_0 t_1 + \varphi_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{-\frac{1}{2}\alpha(t_2^2 - t_1^2) + \omega_0(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{2}(-\alpha(t_1 + t_2) + 2\omega_0) \\ &= \frac{1}{2}(\omega(t_1) + \omega(t_2))\end{aligned}$$

- **Das Winkel-Zeit-Gesetz:**

  $$\varphi(t) = \int\limits_{t'=0}^{t} \omega(t')dt' + \varphi_0 = \int\limits_{t'=0}^{t} (-\alpha t' + \omega_0)dt' + \varphi_0 = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$
  $$N(t) = \frac{1}{2\pi}\varphi(t) = -\frac{1}{4\pi}\alpha t^2 + n_0 t + N_0$$

  Das Winkel-Zeit-Diagramm ist ein Teil des linken Zweigs einer nach unten geöffneten Parabel.

  $$t_S = \frac{\omega_0}{\alpha} = \frac{2\pi n_0}{\alpha}$$

  ist die **Bremszeit** und

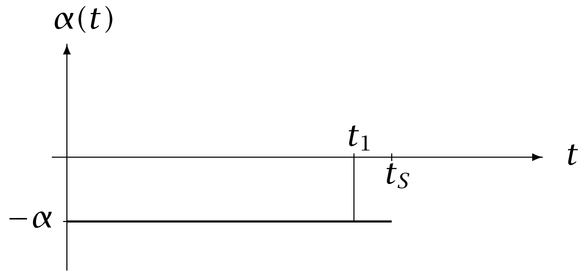
  $$N_S = \frac{\varphi(t_S) - \varphi(0)}{2\pi} = \frac{\omega_0^2}{4\pi\alpha} = \frac{\pi n_0^2}{\alpha}$$

  die **bis zum Stillstand ausgeführten Umdrehungen**.

6.5.2. Diagramme

Die zugehörigen Diagramme für eine gleichmäßig verzögerte Rotation sehen folgendermaßen aus:

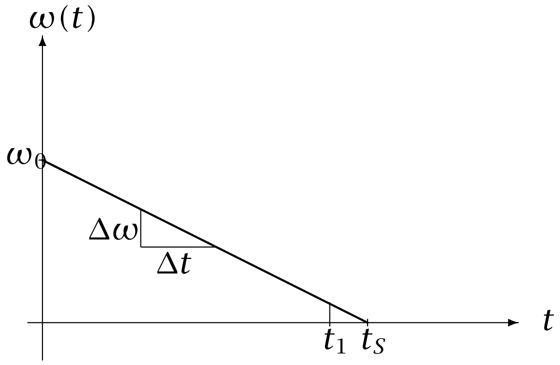
Das Winkelverzögerungs-Zeit-Diagramm



Die **momentane Winkelgeschwindigkeit** $\omega(t_1)$ entspricht der Fläche des Rechtecks (negativ) plus der Anfangswinkelgeschwindigkeit ω_0.

$$\omega(t_1) = -(0-(-\alpha))(t_1-0)+\omega_0 = \omega_0 - \alpha t_1$$

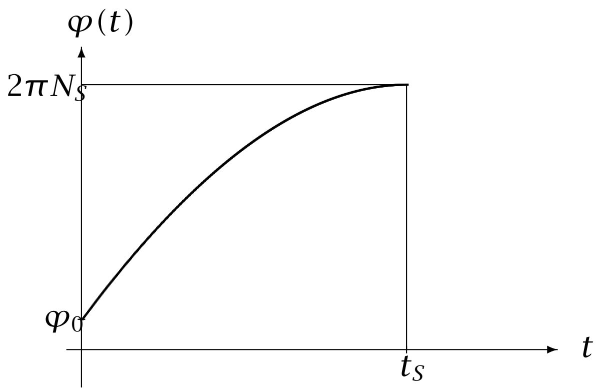
Das Winkelgeschwindigkeits-Zeit-Diagramm



Der **überstrichene Winkel** $\Delta\varphi(t_1)$ entspricht der Fläche des Trapezes (positiv).

$$\Delta\varphi(t_1) = \frac{1}{2}(\omega_0 - 0 + \omega(t_1) - 0)(t_1 - 0) = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega_0 - \alpha t_1)t_1 = \omega_0 t_1 - \frac{1}{2}\alpha t_1^2$$

Das Winkel-Zeit-Diagramm



Die Diagramme für $t_0 > 0$ haben die gleiche Gestalt, sie sind nur um t_0 in positive t-Richtung verschoben.

6.5.3. Beispiele

Beispiel 1:

Eine Wäscheschleuder rotiert mit der Drehzahl $n_1 = 1000\,\frac{1}{\text{min}}$. Durch eine Bremse wird die Schleuder gleichmäßig verzögert. Nach $t_1 = 20\,\text{s}$ kommt sie zum Stillstand. Berechnen Sie die Winkelverzögerung $-\alpha$ und die bis zum Stillstand ausgeführten Umdrehungen N_1.

Lösung:

Die Bewegungsgleichungen lauten

$$\varphi(t) = \omega_1 t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \Rightarrow \quad N(t) = n_1 t - \frac{1}{4\pi}\alpha t^2$$
$$\omega(t) = \omega_1 - \alpha t \quad \Rightarrow \quad n(t) = n_1 - \frac{1}{2\pi}\alpha t$$

Für die Bremszeit gilt: $n(t) = 0$

$$n_1 - \frac{1}{2\pi}\alpha t = 0$$

Die Bremszeit ist

$$t_1 = \frac{2\pi n_1}{\alpha}$$

Hieraus ergibt sich für die Winkelverzögerung

$$-\alpha = -\frac{2\pi n_1}{t_1} = -5,23\,\frac{1}{\text{s}^2}$$

Die in der Bremszeit t_1 ausgeführten Umdrehungen N_1 sind

$$N_1 = N(t_1) = \frac{(2\pi n_1)^2}{4\pi\alpha} = \frac{\pi n_1^2}{\alpha} = 166,9$$

7. Vergleich von Translation und Rotation

Vergleicht man die Bewegungsgleichungen von Translationen und Rotationen, so erkennt man Ähnlichkeiten. Kinematische Größen der Translation und kinematische Größen der Rotation stehen in einem Zusammenhang. Man könnte daher die gesamten Gleichungen der Rotationen erhalten, indem man in den Gleichungen der Translationen die kinematischen Größen durch die zugehörigen rotatorischen Größen ersetzt.

Transl.		**Rot.**	**Translation**		**Rotation**
x_0	$\longrightarrow$	φ_0	Anfangsentfernung	$\longrightarrow$	Anfangsdrehwinkel
v_0	$\longrightarrow$	ω_0	Anfangsgeschwindigkeit	$\longrightarrow$	Anfangswinkelgeschwindigkeit
$x(t)$	$\longrightarrow$	$\varphi(t)$	Ort	$\longrightarrow$	Drehwinkel
$s(t)$	$\longrightarrow$	$\Delta\varphi(t)$	zurückgelegter Weg	$\longrightarrow$	überstrichener Winkel
$v(t)$	$\longrightarrow$	$\omega(t)$	Geschwindigkeit	$\longrightarrow$	Winkelgeschwindigkeit
$\bar{v}$	$\longrightarrow$	$\bar{\omega}$	mittlere Geschwindigkeit	$\longrightarrow$	mittlere Winkelgeschwindigkeit
a	$\longrightarrow$	α	Beschleunigung	$\longrightarrow$	Winkelbeschleunigung
$\bar{a}$	$\longrightarrow$	$\bar{\alpha}$	mittlere Beschleunigung	$\longrightarrow$	mittlere Winkelbeschleunigung