Mechanik

Zusammenfassung

- ≻ **Physikalische Größen und ihre Einheiten**
- ≻ **Newtonsche Mechanik**
- ≻ **Kinematik und Dynamik (Translation/Rotation)**
- ≻ **Impuls/Drehimpuls**
- ≻ **Starrer Körper**

Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.

© Jürgen Gilg · E-Mail: gilg@acrotex.net · Webseite: www.acrotex.net **Februar 2008**

Inhaltsverzeichnis

1. Physikalische Größen und ihre Einheiten

1.1. Internationales Einheitensystem SI (Système International d'Unités)

Das SI-System besteht aus sieben Basiseinheiten und den daraus abgeleiteten Einheiten.

Die Basiseinheiten:

Länge	das Meter	[m]
Zeit	die Sekunde	[s]
Masse	das Kilogramm	[kg]
Stromstärke	das Ampère	[A]
Temperatur	das Kelvin	[K]
Stoffmenge	das Mol	[mol]
Lichtstärke	die Candela	[cd]

SI-Vorsätze für dezimale Vielfache und Teile:

Deka	da	10^{1}	Dezi	d	10^{-1}
Hekto	h	10^{2}	Zenti	c	10^{-2}
Kilo	k	10^{3}	Milli	m	10^{-3}
Mega	M	10^{6}	Mikro	μ	10^{-6}
Giga	G	10^{9}	Nano	n	10^{-9}
Tera	T	10^{12}	Pipo	p	10^{-12}
Peta	P	10^{15}	Femto	f	10^{-15}
Exa	E	10^{18}	Atto	a	10^{-18}
Zetta	Z	10^{21}	Zepto	z	10^{-21}
Yotta	Y	10^{24}	Yocto	y	10^{-24}

2. Newtonsche Grundgesetze

2.1. Der Trägheitssatz

Ist die Summe aller auf einen Körper angreifender Kräfte null - wirkt also keine äußere Kraft – so behält er seinen Bewegungszustand bei.

- Er bleibt ruhend, wenn er in Ruhe war.
- Bewegt er sich dagegen, so ändert sich weder Richtung noch Betrag der Geschwindigkeit – er bewegt sich also gleichförmig geradlinig.

2.2. Das Grundgesetz der Mechanik

Die Kraft eines Körpers ist proportional zu seiner Beschleunigung und seiner Masse.
Es gilt:

$$F = ma$$

oder

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\text{beschleunigende Kraft}}{\text{beschleunigte Masse}}$$

2.3. Das Wechselwirkungsprinzip (actio = reactio)

Übt ein Körper A eine Kraft auf einen Körper B aus, so übt dieser eine gleich große, entgegengerichtete Kraft auf Körper A aus. Wechselwirkungskräfte greifen grundsätzlich an unterschiedlichen Körpern an.
Es gilt:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

3. Kräfte

3.1. Kräfteaddition

Kräfte sind Vektoren. Wirken mehrere Kräfte auf einen Körper, so kann man diese durch die resultierende Kraft (den Summenvektor) ersetzen. Geometrisch funktioniert dies mit Hilfe der Parallelogrammregel.

3.2. Die schiefe Ebene und Kräfte, die auf ihr wirken

Kräfte auf der schiefen Ebene, die um den Winkel φ gegenüber der Horizontalen geneigt ist.

- **Gewichtskraft**

$$F_{\mathrm{G}} = mg$$

- **Hangabtriebskraft**

  Kraftkomponente der Gewichtskraft längs der schiefen Ebene

  $$F_{\mathrm{H}} = F_{\mathrm{G}} \sin\varphi = mg \sin\varphi$$

- **Normalkraft**

  Kraftkomponente der Gewichtskraft senkrecht zur Auflage, also zur schiefen Ebene

  $$F_{\mathrm{N}} = F_{\mathrm{G}} \cos\varphi = mg \cos\varphi$$

- **Reibungskräfte**

  Gleit- und Haftreibungskräfte sind zur Normalkraft F_{N}, also zur Kraft senkrecht auf die Auflagefläche, proportional und wirken der Bewegung oder angehenden Bewegung entgegen.

  - **Gleitreibungskraft**

    $$F_{\mathrm{gl}} = f_{\mathrm{gl}} F_{\mathrm{N}} = f_{\mathrm{gl}} mg \cos\varphi$$

  - **Maximale Haftreibungskraft**

    $$F_{\mathrm{h,max}} = f_{\mathrm{h}} F_{\mathrm{N}} = f_{\mathrm{h}} mg \cos\varphi$$

- **Beschleunigung auf der schiefen Ebene abwärts**

  Nach Newton gilt:

  ohne Reibung: $a = g \sin\varphi$

  mit Reibung: $a = g(\sin\varphi - f_{\mathrm{gl}} \cos\varphi)$

3.3. Gravitationskraft (Massenanziehungskraft)

Die Massen m_1 und m_2 im Abstand r ziehen sich mit folgender Kraft an:

$$F_{\mathrm{Grav}} = f \frac{m_1 m_2}{r^2} \text{ mit } f = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2} \text{ (Gravitationskonstante)}$$

Hieraus ergibt sich

$$g = g_0 \frac{r_0^2}{r^2} \text{ mit } r_0 = 6,37 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \text{ und } \mathrm{g}_0 = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

3.4. Federkraft

Diese wirkt immer der Auslenkung entgegen (Hooke´sches Gesetz) und ist somit bestrebt, den entspannten Zustand der Feder wiederherzustellen. Sie ist eine veränderliche Kraft, da sie mit größerer Auslenkung ebenfalls größer wird.

$$F_{\mathrm{Feder}} = -Cx$$

C heißt Federkonstante und ist ein Maß für die Steifigkeit der Feder

4. Impuls und Kraftstoß

4.1. Der Impuls

Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit eines Körpers wird als Impuls bezeichnet.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Die Kraft auf einen Körper gibt an, wie schnell sich sein Impuls ändert.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Die Impulsänderung eines Körpers mit konstanter Masse.

$$\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$$

Treten zwei Körper in Wechselwirkung, so ändern sie ihre Impulse in entgegengesetzt gleicher Weise. Die Summe der Impulsänderungen der beiden Körper ist null, da keine äußeren Kräfte wirken.

Es gilt:

$$\Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

4.2. Der Kraftstoß oder Impulsübertrag

Wirkt auf einen Körper eine zeitabhängige Kraft $F(t)$, so ist die Fläche des zugehörigen F, t-Diagramms gerade gleich der Impulsänderung des Körpers.

$$\int F(t)\, dt = \int dp(t) = mv_2 - mv_1$$

4.3. Impulserhaltung

In einem abgeschlossenen System (System, in dem keine äußeren Kräfte wirken) ändert sich der Gesamtimpuls

$$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots + \vec{p}_n = \text{const.}$$

nicht.

5. Arbeit, Energie und Leistung

5.1. Arbeit

Die Arbeit W ist diejenige Energie, die eine auf ein Objekt wirkende Kraft selbigem Objekt zuführt oder abführt.

Zugeführte Arbeit wird positiv gezählt,

abgeführte Arbeit wird negativ gezählt.

Die Arbeit (übertragene Energie) ist proportional zum Betrag der Kraftkomponente F_s in Wegrichtung und proportional zum zurückgelegten Weg s.

Es gilt:

$$\Delta W = F_\mathrm{s} \cdot \Delta s = F_\mathrm{s}(s_2 - s_1)$$

5.2. Mechanische Energie

- **Bewegungsenergie (Kinetische Energie)**

  Energie E, die nötig ist, um einen Körper der Masse m von der Geschwindigkeit v_1 auf die Geschwindigkeit v_2 zu beschleunigen bzw. zu verzögern.

  Es gilt:

  $$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \Delta(v^2) = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

  Spezialfall: Aus der Ruhe heraus: $v_1 = 0$

- **Lageenergie (Potentielle Energie)**

  Energie E, die nötig ist, um einen Körper der Masse m von der Höhe h_1 auf die Höhe h_2 zu heben.

  Es gilt:

  $$\Delta E_{\text{pot}} = mg\Delta h = mg(h_2 - h_1)$$

  Spezialfall: Vom Boden aus (vom Nullniveau NN): $h_1 = 0$

- **Spannenergie**

  Energie E, die nötig ist, um eine Feder mit der Federkonstanten c von der Länge s_1 auf die Länge s_2 zu dehnen oder zu stauchen.

  Es gilt:

  $$\Delta E_{\text{spann}} = \frac{1}{2} C \Delta(s^2) = \frac{1}{2} C (s_2^2 - s_1^2)$$

  Spezialfall: Aus der entspannten Lage heraus: $s_1 = 0$

5.3. Energieerhaltung

In einem abgeschlossenen System ohne Reibung ist die Summe aus Lageenergie, Bewegungsenergie und Spannenergie konstant.

5.4. Mechanische Leistung

Leistung ist der Quotient aus der umgewandelten Energie und der Zeit, in der die Energieumwandlung stattfindet. Sie läßt sich auch als Produkt von Kraft mit Geschwindigkeit berechnen.

Es gilt:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \text{ oder } P = Fv$$

6. Kinematik

6.1. Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung in kartesischen Koordinaten

Wenn man eine Bewegung speziell in kartesischen Koordinaten beschreiben will, so wählt man O als Ursprung eines raumfesten Systems x, y, z.

Mit den zeitunabhängigen Basiseinheitsvektoren

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- In den drei Koordinatenrichtungen lautet der **Ortsvektor**

  $$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

  Dies ist eine Parameterdarstellung der Bahn mit der Zeit t als Parameter. Wenn man aus den drei Komponentengleichungen die Zeit t eliminiert erhält man die zeitfreie, geometrische Beschreibung der räumlichen Bahnkurve. Der Übersicht und Einfachheit halber lassen wir in den folgenden Formeln die Zeitabhängigkeit (t) weg.

- Der **Geschwindigkeitsvektor** ergibt sich durch einmaliges Differenzieren des Ortsvektors nach der Zeit

  $$\vec{v} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

  und der Betrag ergibt sich zu

  $$v = |\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

- Der **Beschleunigungsvektor** ergibt sich durch einmaliges Differenzieren des Geschwindigkeit
  tors nach der Zeit:

  $$\vec{a} = \vec{v} = \vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$

  und der Betrag ergibt sich zu

  $$a = |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Anmerkung:

Man unterscheidet grundsätzlich Ort x und zurückgelegter Weg s.

Der zurückgelegte Weg s ist der Abstand zweier Orte (Anfangs- und Endort).

6.2. Eindimensionale (geradlinige) Bewegungen

Für die nächsten Abschnitte bezeichnen wir Anfangswerte durch den Index 0 und meinen damit:

Zum Zeitpunkt $t = t_0$ sei der Ort mit $x(t_0) = x_0$ und die Geschwindigkeit mit $v(t_0) = v_0$ gekennzeichnet.

- $a = 0$

  Diese Bewegungsform heißt geradlinige, gleichförmige Bewegung.

  So liefert Trennung der Variablen und anschließende Integration:

$$a = \frac{dv}{dt} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow dv = 0dt = 0 \Rightarrow \int_{v_0}^{v} d\bar{v} = 0$$

$$v(t) = v_0 = \text{const.}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \overset{!}{=} v_0 \Rightarrow dx = v_0 dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} d\bar{x} = \int_{t_0}^{t} v_0 d\bar{t}$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0)$$

- $a = a_0 = \text{const.}$

  Diese Bewegungsform heißt geradlinige, gleichmäßig beschleunigte Bewegung.

  So liefert Trennung der Variablen und anschließende Integration:

$$a = \frac{dv}{dt} \overset{!}{=} a_0 \Rightarrow dv = a_0 dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} d\bar{v} = \int_{t_0}^{t} a_0 d\bar{t}$$

$$v(t) = v_0 + a_0(t - t_0)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \overset{!}{=} v_0 + a_0(t - t_0) \Rightarrow dx = (v_0 + a_0(t - t_0))dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} d\bar{x} = \int_{t_0}^{t} (v_0 + a_0(\bar{t} - t_0))d$$

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a_0(t - t_0)^2$$

- $a = a(t)$

  So liefert Trennung der Variablen und anschließende Integration:

$$a = \frac{dv}{dt} \overset{!}{=} a(t) \Rightarrow dv = a(t)dt \Rightarrow \int_{v_0}^{v} d\bar{v} = \int_{t_0}^{t} a(\bar{t})d\bar{t}$$

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(\bar{t})d\bar{t}$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) \Rightarrow dx = v(t)dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} d\bar{x} = \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})d\bar{t}$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(\bar{t})d\bar{t}$$

- $a = a(v)$

So liefert Trennung der Variablen und anschließende Integration:

$$a = \frac{dv}{dt} \stackrel{!}{=} a(v) \Rightarrow dt = \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} d\bar{t} = \int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$

$$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$

$$a(v) = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \Rightarrow dx = \frac{v}{a(v)}dv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} d\bar{x} = \int_{v_0}^{v} \frac{\bar{v}}{a(\bar{v})}d\bar{v}$$

$$x(v) = x_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{\bar{v}}{a(\bar{v})}d\bar{v}$$

- $a = a(x)$ So liefert Trennung der Variablen und anschließende Integration:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \stackrel{!}{=} a(x) \Rightarrow a(x)dx = v\,dv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(\bar{x})d\bar{x} = \int_{v_0}^{v} \bar{v}\,d\bar{v}$$

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}v_0^2 + \int_{x_0}^{x} a(\bar{x})d\bar{x} \Rightarrow v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(\bar{x})d\bar{x}}$$

$$v(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dx}{v(x)} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} d\bar{t} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\bar{x}}{v(\bar{x})}$$

$$t = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{d\bar{x}}{\pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(\hat{x})d\hat{x}}}$$

6.2.1. Gleichförmige, geradlinige Bewegung

Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = vt + x_0$$
$$v(t) = x(t) = v = \text{const.}$$

$x(t)$: Entfernung vom Ursprung zum Zeitpunkt t
x_0: Anfangsentfernung (Entfernung vom Ursprung zum Zeitpunkt $t = 0$)

6.2.2. Gleichmäßig beschleunigte Bewegung

Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$
$$v(t) = x(t) = at + v_0$$
$$a(t) = v(t) = x(t) = a = \text{const.}$$

$x(t)$: Entfernung vom Ursprung zum Zeitpunkt t
x_0: Anfangsentfernung (Entfernung vom Ursprung zum Zeitpunkt $t = 0$)
$v(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t
v_0: Anfangsgeschwindigkeit (Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)

6.2.3. Der freie Fall

(Gleichmäßig beschleunigte, geradlinige Bewegung mit der Beschleunigung $g = 9,81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$)
Bewegungsgleichungen:

$$y(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t) = y(t) = gt$$

$y(t)$: gefallene Strecke zum Zeitpunkt t
$v(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t

6.2.4. Gleichmäßig verzögerte, geradlinige Bewegung

Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}at^2$$

$$v(t) = x(t) = v_0 - at$$

$x(t)$: Entfernung vom Startpunkt zum Zeitpunkt t
v_0: Anfangsgeschwindigkeit
$v(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t

Hieraus ergibt sich leicht:

Bremsdauer: $T = \frac{v_0}{a}$

Bremsweg: $S = \frac{v_0^2}{2a}$

6.2.5. Senkrechter Wurf nach oben (vom Boden)

Bewegungsgleichungen:

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v(t) = h(t) = v_0 - gt$$

$h(t)$: Höhe vom Abwurfpunkt zum Zeitpunkt t
v_0: Abwurfgeschwindigkeit
$v(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t
$v(t) < 0$ Körper fällt,
$v(t) > 0$ Körper steigt,
$v(t) = 0$ Körper ist im höchsten Punkt

Hieraus ergibt sich leicht:

Steigzeit: $T_{\text{Steig}} = \frac{v_0}{g}$

Steighöhe: $H = \frac{v_0^2}{2g}$

6.2.6. Senkrechter Wurf nach unten

Bewegungsgleichungen:

$$y(t) = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$
$$v(t) = y(t) = v_0 + g t$$

$y(t)$: Entfernung vom Abwurfpunkt zum Zeitpunkt t
v_0: Abwurfgeschwindigkeit
$v(t)$: Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t

6.3. Zweidimensionale Bewegungen

6.3.1. Der waagrechte Wurf (mit Abwurfhöhe h)

In x-Richtung: gleichförmige Bewegung mit der konstanten Geschwindigkeit v_0

In y-Richtung: freier Fall

Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = v_0 t$$
$$y(t) = \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_\text{x}(t) = x(t) = v_0 = \text{const.}$$
$$v_\text{y}(t) = y(t) = g t$$
$$v(t) = \sqrt{v_\text{x}(t)^2 + v_\text{y}(t)^2} = \sqrt{v_0^2 + (g t)^2}$$
$$\tan \alpha = \frac{v_\text{y}}{v_\text{x}}$$

$x(t)$: Entfernung zum Abwurfpunkt in x-Richtung zum Zeitpunkt t
$y(t)$: Entfernung zum Abwurfpunkt in y-Richtung zum Zeitpunkt t
$v_\text{x}(t)$: Abwurfgeschwindigkeit in x-Richtung (v_0 = const.)
$v_\text{y}(t)$: Geschwindigkeit in y-Richtung zum Zeitpunkt t
$v(t)$: Bahngeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
α: Winkel der Bahngeschwindigkeit mit der Horizontalen

Gleichung der Wurfparabel: $y = \frac{g}{2 v_0^2} x^2$

Wurfdauer: $T_\text{Wurf} = \sqrt{\frac{2H}{g}}$

Wurfweite: $W = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}$

6.3.2. Der schiefe Wurf (vom Boden)

Abwurf vom Boden mit der Abwurfgeschwindigkeit v_0 unter dem Abwurfwinkel φ zur x-Richtung.

In x-Richtung: gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeitskomponente $v_{0\text{x}} = v_0 \cos \varphi$

In y-Richtung: senkrechter Wurf nach oben mit Abwurfgeschwindigkeitskomponente $v_{0\mathrm{y}} = v_0 \sin\varphi$

Bewegungsgleichungen:

$$x(t) = v_{0\mathrm{x}} t = (v_0 \cos\varphi) t$$
$$y(t) = v_{0\mathrm{y}} t - \frac{1}{2} g t^2 = (v_0 \sin\varphi) t - \frac{1}{2} g t^2$$
$$v_\mathrm{x}(t) = x(t) = v_{0\mathrm{x}} = v_0 \cos\varphi = \text{const.}$$
$$v_\mathrm{y}(t) = y(t) = v_{0\mathrm{y}} - gt = v_0 \sin\varphi - gt$$
$$v(t) = \sqrt{v_\mathrm{x}(t)^2 + v_\mathrm{y}(t)^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2 - 2 v_0 g t \sin\varphi}$$
$$\tan\alpha = \frac{v_\mathrm{y}}{v_\mathrm{x}}$$

$x(t)$:	Entfernung zum Abwurfpunkt in x-Richtung zum Zeitpunkt t
$y(t)$:	Entfernung zum Abwurfpunkt in y-Richtung zum Zeitpunkt t
$v_\mathrm{x}(t)$:	Abwurfgeschwindigkeitskomponente in x-Richtung v_{0x} = const.)
$v_\mathrm{y}(t)$:	Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung zum Zeitpunkt t $v_\mathrm{y}(t) > 0$ Körper steigt, $v_\mathrm{y}(t) < 0$ Körper fällt, $v_\mathrm{y}(t) = 0$ Körper ist im Scheitel
$v(t)$:	Bahngeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
α:	Winkel der Bahngeschwindigkeit mit der Horizontalen

Gleichung der Wurfparabel: $y = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi} x^2 + \tan\varphi \cdot x$

oder in der Scheitelform: $y = -\dfrac{g}{2 v_0^2 \cos^2\varphi}\left(x - \dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi\right)^2 + \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi$

Hieraus ergibt sich der Scheitel: $S(\underbrace{\dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi}_{x_\mathrm{Scheitel}} \,/\, \underbrace{\dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi}_{y_\mathrm{Scheitel}})$

Daraus leicht zu erkennen:

Wurfhöhe: $H = y_\mathrm{Scheitel} = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\varphi$

Wurfweite: $W = 2 \cdot x_\mathrm{Scheitel} = 2 \cdot \dfrac{v_0^2}{2g}\sin 2\varphi = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\varphi$

Steigzeit (Zeitpunkt bis zum Erreichen der Wurfhöhe): $T_\mathrm{Steig} = \dfrac{v_0}{g}\sin\varphi$

Wurfdauer: $T_\mathrm{Wurf} = 2 \cdot T_\mathrm{Steig} = 2 \cdot \dfrac{v_0}{g}\sin\varphi$

6.4. Rotationsbewegungen

6.4.1. Gleichförmige Rotation

Bewegungsgleichungen:

$$\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$$
$$\omega(t) = \varphi(t) = \omega = \text{const.}$$
$$N(t) = \frac{1}{2\pi}\varphi(t)$$
$$n(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t) = n = \text{const.}$$

$\varphi(t)$: Drehwinkel zum Zeitpunkt t
$N(t)$: Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt t
φ_0: Anfangsdrehwinkel (Drehwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$)
n: konstante Drehzahl (Umdrehungen pro Zeit)

6.4.2. Gleichmäßig beschleunigte Rotation

Bewegungsgleichungen:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2 + \omega_0 t + \varphi_0$$
$$\omega(t) = \varphi(t) = \alpha t + \omega_0$$
$$\alpha(t) = \omega(t) = \varphi(t) = \alpha = \text{const.}$$
$$N(t) = \frac{1}{2\pi}\varphi(t)$$
$$n(t) = \frac{1}{2\pi}\omega(t)$$

$\varphi(t)$: Drehwinkel zum Zeitpunkt t
$N(t)$: Zahl der Umdrehungen zum Zeitpunkt t
φ_0: Anfangsdrehwinkel (Drehwinkel zum Zeitpunkt $t = 0$)
$n(t)$: Drehzahl zum Zeitpunkt t
$\omega(t)$: Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t
ω_0: Anfangswinkelgeschwindigkeit (Winkelgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$)

6.4.3. Umfangsbewegungen

Bei jeder Rotation führen die nicht im Drehmittelpunkt liegenden Teile des Körpers eine Bewegung auf einer Kreisbahn durch - eine Umfangsbewegung. Für ihre Größen (Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung) und den Größen der Rotation (Drehwinkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung) gilt:

$$s = \varphi \cdot r, v = \omega \cdot r, a = \alpha \cdot r$$

6.4.4. Gleichförmige horizontale Kreisbewegung

Um einen Körper auf eine Kreisbahn zu zwingen, benötigt man eine Zentripetalkraft. Diese ist konstant und wirkt zu jedem Zeitpunkt in Richtung des Kreismittelpunkts –

also senkrecht zur Bewegung - und kann durch ein Seil, eine Feder, Schienen, Reibung, Gravitation o. ä. realisiert werden. Dadurch dass die Kraft senkrecht zur Bewegung wirkt, ändert sich der Betrag der Geschwindigkeit nicht (gleichförmig), jedoch die Richtung der Geschwindigkeit, deshalb handelt es sich um eine beschleunigte Bewegung mit der Zentripetalbeschleunigung a_Z.

Frequenz:	$f = \frac{1}{T}$, mit Umlaufdauer T
Winkelgeschwindigkeit:	$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
Bahngeschwindigkeit:	$v = \omega r$, mit r: Radius der Kreisbahn
Zentripetalbeschleunigung:	$a_\mathrm{Z} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$
Zentripetalkraft:	$F_\mathrm{Z} = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r$

6.4.5. Die Coriolis-Kraft

Bewegt sich in einem rotierenden Bezugssystem der Winkelgeschwindigkeit ω ein Körper der Masse m mit der Geschwindigkeit v gleichförmig radial nach innen oder außen, so erfährt er tangential eine Beschleunigung a_C (die Coriolis-Beschleunigung), deren Ursache die Coriolis-Kraft ist.

Coriolis-Beschleunigung: $a_\mathrm{C} = 2v\omega$

Coriolis-Kraft: $F_\mathrm{C} = 2mv\omega$

6.4.6. Nicht überhöhte Kurven

Bedingung für das Durchfahren einer nicht überhöhten Kurve:

$$F_{\mathrm{h,max}} \geq F_\mathrm{Z} \text{ oder } f_\mathrm{h} mg \geq m\frac{v^2}{r}$$

Für die Neigung z. B. eines Fahrradfahrers gilt:

$$\tan\varphi = \frac{F_\mathrm{Z}}{F_\mathrm{G}} = \frac{v^2}{rg}$$

mit φ: Neigungswinkel gegenüber der Vertikalen

Für das sichere Durchfahren einer Kurve muss gelten:

$$\tan\varphi < f_\mathrm{h}$$

6.4.7. Vertikale Kreisbewegung (Looping)

Bedingung für einen Looping:

$$a_\mathrm{Z} > g$$

oder

$$\frac{v^2}{r} > g$$

oder

$$v > \sqrt{rg}$$

7. Die Stoßgesetze

Im Folgenden wird mit v immer die Geschwindigkeit vor dem Stoß, mit u die Geschwindigkeit nach dem Stoß bezeichnet. Körper mit positiven Geschwindigkeiten sollen sich nach rechts bewegen, die mit negativen Geschwindigkeiten nach links.

7.1. Der gerade unelastische Stoß

Nach einem völlig unelastischen Stoß bewegen sich die beiden Stoßpartner nach dem Stoß mit der gleichen Geschwindigkeit weiter. Es geht kinetische Energie verloren (z. B. Verformung) – es gilt also keine Energieerhaltung.
Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u$$

und somit

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Den Energieverlust erhält man ganz einfach:

$$\begin{aligned}\Delta E = E_{\text{vorher}} - E_{\text{nachher}} &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \underbrace{\left(\frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}\right)^2}_{=u^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2\end{aligned}$$

7.2. Der gerade elastische Stoß

Es geht keine kinetische Energie verloren - es gilt also Energieerhaltung.
Impulserhaltung:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

oder umgeformt

$$m_1 (v_1 - u_1) = m_2 (u_2 - v_2) \tag{7.1}$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2$$

oder umgeformt

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - u_1^2) = \frac{1}{2} m_2 (u_2^2 - v_2^2)$$

oder

$$\frac{1}{2} m_1 (v_1 - u_1)(v_1 + u_1) = \frac{1}{2} m_2 (u_2 - v_2)(u_2 + v_2) \tag{7.2}$$

Division von Gleichung (2) mit Gleichung (1) liefert:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2$$

eingesetzt in Gleichung (1):

$$u_1 = \frac{2m_2 v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \text{ und } u_2 = \frac{2m_1 v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}$$

Zwei Sonderfälle beim geraden elastischen Stoß:

- Beide Massen sind gleich groß. Es gilt also: $m_1 = m_2$

  Eingesetzt liefert dies:

  $$u_1 = v_2 \text{ und } u_2 = v_1$$

  Diese Körper tauschen ihre Geschwindigkeiten aus.

- Der Körper m_1 fliegt auf eine feste, ruhende Wand, deren Masse m_2 sehr viel größer ist als die des fliegenden Körpers, also $m_2 >> m_1$.

  Es gilt also:

  $$v_2 = 0 \text{ und } \frac{m_1}{m_2} \to 0$$

  Eingesetzt liefert dies nach Erweitern mit $\frac{1}{m_2}$:

  $$u_1 = \frac{2\overbrace{v_2}^{=0} + (\overbrace{\frac{m_1}{m_2}}^{\to 0} - 1)v_1}{\underbrace{\frac{m_1}{m_2}}_{\to 0} + 1} \approx -v_1 \text{ und } u_2 = \frac{2\overbrace{\frac{m_1}{m_2}}^{\to 0} v_1 + (1 - \overbrace{\frac{m_1}{m_2}}^{\to 0})\overbrace{v_2}^{=0}}{\underbrace{\frac{m_1}{m_2}}_{\to 0} + 1} \approx 0$$

  Der Körper kehrt seine Geschwindigkeit um und die Wand bleibt nach dem Stoß weiterhin fest.

8. Nicht zentrale, zweidimensionale Stoßprozesse

Im Folgenden wird mit $\vec{v}$ immer die Geschwindigkeit vor dem Stoß, mit $\vec{u}$ die Geschwindigkeit nach dem Stoß bezeichnet.
Bei einem nicht zentralen Stoß zweier Körper verlaufen alle Bewegungen in einer Ebene. Man betrachtet das Ganze zweidimensional vektoriell. Für solche zweidimensionalen Stöße wählt man ein geeignetes x, y-Koordinatensystem:

Den Ursprung legt man in den Stoßpunkt der Körper und als x-Achse wählt man üblicherweise die Berührebene.

So bedeutet dies, dass man für jede einzelne Geschwindigkeit zwei Informationen benötigt:

- Betrag (Größe der Geschwindigkeit) und Richtung (Winkel zur z. B. x-Achse)
- x- und y-Komponente der Geschwindigkeit

8.1. Der schiefe, zentrale elastische Stoß

Üblicherweise benötigt man vier Gleichungen

Man zerlegt den Impuls in x- und y-Richtung, das liefert zwei Gleichungen.

Der Energieerhaltungssatz liefert eine Gleichung.

Die Information über den Betrag einer weiteren Geschwindigkeit oder eine Ablenkungsrichtung liefert die fehlende vierte Gleichung.

8.2. Der schiefe, zentrale inelastische Stoß

Der Einfachheit halber soll ein Körper vor dem Stoß in Ruhe sein.

Inelastisch bedeutet, dass die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß nicht mehr gleich sind.

Der Energieerhaltungssatz gilt nicht.

Üblicherweise benötigt man vier Gleichungen

Man zerlegt den Impuls in x- und y-Richtung, das liefert zwei Gleichungen.

(Der Energieerhaltungssatz liefert keine Gleichung).

Die Informationen über den Betrag zweier weiterer Geschwindigkeiten oder Ablenkungsrichtungen liefern die fehlenden zwei Gleichungen.

Der Vergleich der kinetischen Energien vor und nach dem Stoß gibt Aufschluß wie viel Energie nicht-mechanisch umgesetzt wurde.

9. Drehmoment und Drehimpuls

9.1. Drehmoment

Greift eine Kraft $\vec{F}$ in einem Punkt P mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ bezüglich des Bezugspunktes O an, so definiert man das Drehmoment $\vec{M}$ als:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Der Vektor $\vec{M}$ steht senkrecht auf der von $\vec{r}$ und $\vec{F}$ aufgespannten Ebene und wenn die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{F}$ einen Winkel φ bilden, so gilt für seinen Betrag:

$$|\vec{M}| = M = rF \sin\varphi$$

9.2. Drehimpuls (Drall)

Hat eine Masse m mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ den Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$, so ist der Drehimpuls $\vec{L}$ definiert als:

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

Der Vektor $\vec{L}$ steht senkrecht auf der von $\vec{r}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Ebene und wenn die Vektoren $\vec{r}$ und $\vec{v}$ einen Winkel φ bilden, so gilt für seinen Betrag:

$$|\vec{L}| = mrv \sin\varphi$$

9.3. Zusammenhang zwischen Drehmoment und Drehimpuls

Die zeitliche Änderung eines Drehimpulses wird durch ein Drehmoment verursacht.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Ist die Summe aller angreifenden Drehmomente null, so ist der Drehimpuls konstant.

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const.}$$

Ist der Drehimpuls konstant, so verharrt ein Körper bezüglich der Rotation im Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Drehbewegung.

9.4. Drehimpulserhaltung

Wenn keine äußeren Drehmomente eingreifen, bleibt der gesamte Drehimpuls zeitlich nach Betrag und Richtung konstant. Es gilt also betragsmäßig:

$$L_{\text{vorher}} = L_{\text{nachher}}$$

in Analogie zur Impulserhaltung.

10. Statik des starren Körpers

Ein starrer Körper ist ein System von Massenpunkten, bei dem die Relativabstände der einzelnen Massenpunkte auch unter Einwirkung von Kräften unverändert bleiben.

10.1. Schwerpunkt des starren Körpers

Zwei Massen m_1 und m_2, die starr miteinander verbunden sind, besitzen einen gemeinsamen Drehpunkt O. Der Schwerpunkt S (auch Massenmittelpunkt) berechnet sich wie folgt:

$$x_{\text{S}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Ein Körper befindet sich im statischen Gleichgewicht, wenn er keine Bewegungen ausführt. Eine notwendige Bedingung ist, dass die Summe aller äußeren Kräfte und die Summe aller äußeren Drehmomente verschwindet.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

$$\sum_i \vec{M}_i = \vec{0}$$

11. Dynamik des starren Körpers bei fester Drehachse

Bei einer Rotation um eine feste Drehachse sind Drehimpuls $\vec{L}$ und Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ über das Trägheitsmoment J miteinander verknüpft. $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ zeigen in dieselbe Richtung. Es gilt:

$$\vec{L} = J\vec{\omega}$$

oder betragsmäsig

$$L = J\omega$$

damit

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} = J\frac{d\vec{\omega}}{dt} = J\vec{\alpha}$$

oder betragsmäßig

$$M = J\alpha$$

11.1. Einige wichtige Trägheitsmomente

Körperart	**Lage der Drehachse**	**Trägheitsmoment**
Kreisring (dünn)	durch Mittelpunkt ⊥ zur Ringebene	$J_\mathrm{S} = mr^2$
Hohlzylinder (dünnwandig)	Längsachse	$J_\mathrm{S} = mr^2$
Vollzylinder	Längsachse	$J_\mathrm{S} = \frac{m}{2}r^2$
Hohlzylinder (dickwandig)	Längsachse	$J_\mathrm{S} = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$
Kreisscheibe	⊥ zur Scheibenebene durch Mittelpunkt	$J_\mathrm{S} = \frac{m}{2}r^2$
Kreisscheibe	Durchmesser	$J_\mathrm{S} = \frac{m}{4}r^2$
Kugel	durch Mittelpunkt	$J_\mathrm{S} = \frac{2m}{5}r^2$
Hohlkugel (dünnwandig)	durch Mittelpunkt	$J_\mathrm{S} = \frac{2m}{3}r^2$
Stab mit Länge l (dünn)	⊥ zur Stabmitte	$J_\mathrm{S} = \frac{m}{12}l^2$

Die Angabe eines Trägheitsmoment ohne Drehachse macht keinen Sinn.

11.2. Satz von Steiner

Parallele Achsen:
Eine parallele Verlagerung einer Schwerpunktsdrehachse um s führt zu einer Vergrößerung des Trägheitsmomentes.
Steiner´scher Satz:

$$J_\mathrm{A} = J_\mathrm{S} + ms^2$$

11.3. Vergleich von Translation und Rotation bei fester Drehachse

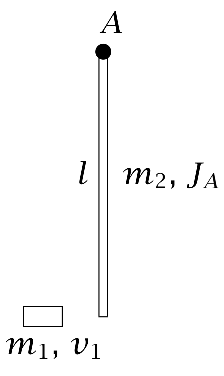
Einige Grundbegriffe

Translation		**Rotation bei fester Achse**	
Wegelement $d\vec{s}$	$d\vec{s}$	Winkelelement $d\vec{\varphi}$	$d\vec{\varphi}$
Geschwindigkeit $\vec{v}$	$\vec{v} = \dfrac{d\vec{s}}{dt}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Beschleunigung $\vec{a}$	$\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{s}}{dt^2}$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$	$\vec{\alpha} = \dfrac{d\vec{\omega}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}$
träge Masse m	m	Trägheitsmoment J:	J
Kraft $\vec{F}$	$\vec{F} = \dfrac{d\vec{p}}{dt} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment $\vec{M}$	$\vec{M} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} = J \cdot \vec{\alpha}$
Impuls $\vec{p}$	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L}$	$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$
Kinetische Energie E_{kin}	$E_{\text{kin}} = \dfrac{1}{2} m v^2$	Rotationsenergie E_{rot}	$E_{\text{rot}} = \dfrac{1}{2} J \omega^2$
Arbeit dW	$dW = \vec{F}\, d\vec{s}$	Arbeit dW	$dW = \vec{M}\, d\vec{\varphi}$

Mit dem Ortsvektor $\vec{r}$ bestehen zwischen Translations- und Rotationsgrößen folgende Gesetze:

$$d\vec{s} = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$$
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$J = \int r^2\, dm$$
$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m \cdot \vec{r} \times \vec{v}$$

11.4. Starres ballistisches Pendel



Ein Körper der Masse m_1 und der Geschwindigkeit v_1 pralle gegen einen im Punkt A aufgehängten starren, ruhenden Stab der Länge l, der Masse m_2 und dem Trägheitsmoment J_{A} bezüglich des Drehpunktes A.
Der Körper stoße:
völlig inelastisch
Drehimpulserhaltung:

$$m_1 v_1 l = (\underbrace{J_{\text{A}} + m_1 l^2}_{J_{\text{ges}}})\omega$$

völlig elastisch

Drehimpulserhaltung:

$$m_1 v_1 l = J_{\text{A}}\omega + m_1 u_1 l$$

Energieerhaltung:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} J_{\text{A}} \omega^2 + \frac{1}{2} m_1 u_1^2$$

Hinweis:

Bei der anschließenden Auslenkung des starren Stabes ist die Anhebung des Schwerpunktes des Stabes zu berücksichtigen!

Beim starren Stab gilt der Impulserhaltungssatz nicht, da beim Stoß im Lager des Aufhängepunktes eine Kraft wirkt. Jedoch gilt der Drehimpulserhaltungssatz, da die Summe aller angreifenden Momente verschwindet und das Moment im Lager des Aufhängepunkts keinen Beitrag liefert.

Wird der Stab durch einen masselosen Faden gleicher Länge ersetzt, an welchem die punktförmige Masse m_2 ruht, so gelten Drehimpulserhaltungssatz und Impulserhaltungssatz. Beide liefern dasselbe Ergebnis:

völlig inelastisch

Impulserhaltung:

$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) u$

Drehimpulserhaltung

$m_1 v_1 l = J_{\mathrm{ges}} \omega$ mit $J_{\mathrm{ges}} = (m_1 + m_2) l^2$, $\omega = \dfrac{u}{l}$

völlig elastisch

Impulserhaltung

$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$

Drehimpulserhaltung

$m_1 v_1 l = J_{\mathrm{A}} \omega + m_1 u_1 l$ mit $J_{\mathrm{A}} = m_2 l^2$, $\omega = \dfrac{u_2}{l}$

Energieerhaltung

$\dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \dfrac{1}{2} J_{\mathrm{A}} \omega^2 + \dfrac{1}{2} m_1 u_1^2$ mit $J_{\mathrm{A}} = m_2 l^2$, $\omega =$

12. Dynamik des starren Körpers bei freier Drehachse

Beim starren Körper mit freier Drehachse ist weder Betrag noch Richtung der Winkelgeschwindigke $\vec{\omega}$ der Rotationsbewegung festgelegt. Dies hat zur Folge, dass $\vec{L}$ und $\vec{\omega}$ nicht notwendigerweise parallel sind. Rein formell wird dies in der Formel korrigiert indem man das Trägheitsmoment J durch den Trägheitstensor $\underline{J}$ ersetzt, der mathematisch eine Matrix darstellt:

$$\vec{L} = \underline{J} \vec{\omega}$$

