



# Schwingungslehre

Zusammenfassung

- **Harmonische Schwingungen**
- **Gedämpfte Schwingungen**
- **Erzwungene Schwingungen**
- **Gekoppelte Schwingungen**

**Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.**

## Inhaltsverzeichnis

|                                                                                  |           |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Übersicht der verwendeten physikalischen Größen</b>                        | <b>3</b>  |
| 1.1. Die wichtigsten physikalischen Größen bei Schwingungen . . . . .            | 3         |
| <b>2. Mathematische Grundlagen</b>                                               | <b>5</b>  |
| 2.1. Trigonometrie . . . . .                                                     | 5         |
| 2.1.1. Die trigonometrischen Standard-Funktionen . . . . .                       | 5         |
| 2.1.2. Symmetrie der trigonometrischen Standard-Funktionen . . . . .             | 5         |
| 2.1.3. Kompliziertere trigonometrische Funktionen . . . . .                      | 6         |
| 2.1.4. Nullstellen trigonometrischer Funktionen . . . . .                        | 7         |
| 2.1.5. Einfache trigonometrische Gleichungen . . . . .                           | 7         |
| 2.1.6. Kompliziertere trigonometrische Gleichungen . . . . .                     | 7         |
| 2.1.7. Der Zusammenhang zwischen Sinus- und Cosinus-Funktion . . . . .           | 8         |
| 2.1.8. Einige Werte der trigonometrischen Standard-Funktionen . . . . .          | 9         |
| 2.2. Komplexe Zahlen . . . . .                                                   | 9         |
| 2.2.1. Definition von komplexen Zahlen . . . . .                                 | 9         |
| 2.2.2. Darstellung von komplexen Zahlen . . . . .                                | 10        |
| 2.2.3. Beziehung zwischen den Darstellungsformen . . . . .                       | 10        |
| 2.2.4. Rechnen mit komplexen Zahlen . . . . .                                    | 11        |
| 2.2.5. Komplexe Darstellung von Schwingungen . . . . .                           | 12        |
| 2.2.6. Überlagerung von Schwingungen gleicher Kreisfrequenz . . . . .            | 12        |
| 2.3. Lineare Gleichungssysteme . . . . .                                         | 13        |
| 2.3.1. Inhomogene lineare Gleichungssysteme . . . . .                            | 13        |
| 2.3.2. Cramersche Regel . . . . .                                                | 13        |
| 2.3.3. Homogene lineare Gleichungssysteme . . . . .                              | 14        |
| 2.4. Quadratische Gleichungen . . . . .                                          | 14        |
| 2.5. Differentialrechnung . . . . .                                              | 15        |
| 2.5.1. Einige Ableitungsfunktionen . . . . .                                     | 15        |
| 2.5.2. Differentiationsregeln . . . . .                                          | 15        |
| 2.6. Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .               | 16        |
| 2.6.1. Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .    | 16        |
| 2.6.2. Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten . . . . .  | 21        |
| <b>3. Harmonische Schwingungen</b>                                               | <b>23</b> |
| 3.1. Federschaltungen . . . . .                                                  | 23        |
| 3.2. Freie harmonische Schwingungen . . . . .                                    | 23        |
| 3.2.1. Beispiele für harmonische Schwingungen . . . . .                          | 24        |
| 3.2.2. Beispiele für nicht-harmonische jedoch periodische Schwingungen . . . . . | 25        |

|                                                                              |           |
|------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.2.3. Energiebetrachtungen bei einem horizontalen Federpendel ohne Reibung  | 26        |
| 3.2.4. Energiebetrachtungen bei einem vertikalen Federpendel ohne Reibung    | 27        |
| 3.3. Freie gedämpfte harmonische Schwingungen . . . . .                      | 28        |
| 3.3.1. Kräftebilanz bei einem horizontalen Federpendel mit Reibung . . .     | 28        |
| 3.3.2. Kräftebilanz bei einem vertikalen Federpendel mit Reibung . . . . .   | 30        |
| 3.3.3. Schwingfall . . . . .                                                 | 33        |
| 3.3.4. Aperiodischer Grenzfall . . . . .                                     | 34        |
| 3.3.5. Kriechfall . . . . .                                                  | 34        |
| 3.4. Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung . . . . .             | 35        |
| 3.4.1. Allgemeiner Fall mit Dämpfung . . . . .                               | 35        |
| 3.4.2. Dämpfungsfrei . . . . .                                               | 40        |
| 3.4.3. Mittlere Leistung bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung       | 43        |
| 3.5. Mathematisches Pendel . . . . .                                         | 46        |
| 3.6. Physikalisches Pendel . . . . .                                         | 47        |
| 3.7. Freie harmonische Drehschwingungen . . . . .                            | 47        |
| 3.8. Freie gedämpfte harmonische Drehschwingungen . . . . .                  | 48        |
| <b>4. Beispiele für gekoppelte harmonische Schwingungen</b>                  | <b>48</b> |
| 4.1. Gekoppelte Schwingungen zweier Massen ohne Schwerkräfteinfluß . . . . . | 48        |
| 4.2. Gekoppelte Schwingungen zweier Massen mit Schwerkräfteinfluß . . . . .  | 50        |
| 4.3. Mathematisches Pendel gekoppelt mit horizontalem Schwinger . . . . .    | 53        |
| 4.4. Gekoppelte Pendel . . . . .                                             | 55        |
| 4.5. Gekoppelte Zwangsschwingungen bei harmonischer Erregung . . . . .       | 58        |
| <b>5. Ersatzfederkonstanten</b>                                              | <b>60</b> |
| 5.1. Längsfedern . . . . .                                                   | 60        |
| 5.2. Biegefedern . . . . .                                                   | 62        |
| 5.3. Drehfedern . . . . .                                                    | 63        |
| 5.4. Einige wichtige Massenträgheitsmomente . . . . .                        | 64        |
| 5.4.1. Steinerscher Satz für Massenträgheitsmomente . . . . .                | 64        |
| 5.5. Einige wichtige axiale (äquatoriale) Flächenträgheitsmomente . . . . .  | 64        |
| 5.5.1. Steinerscher Satz für Flächenträgheitsmomente . . . . .               | 69        |

# 1. Übersicht der verwendeten physikalischen Größen

## 1.1. Die wichtigsten physikalischen Größen bei Schwingungen

| Physikalische Größe                                | Formelbuchstaben | Einheit           |
|----------------------------------------------------|------------------|-------------------|
| Auslenkung (Elongation):                           | $x(t)$           | [m]               |
| Maximalauslenkung:                                 | $\hat{x}$        | [m]               |
| Auslenkung des Erregers:                           | $x_E(t)$         | [m]               |
| Erregeramplitude:                                  | $\hat{x}_E$      | [m]               |
| Geschwindigkeit:                                   | $v(t)$           | $[\frac{m}{s}]$   |
| Maximalgeschwindigkeit:                            | $\hat{v}$        | $[\frac{m}{s}]$   |
| Beschleunigung:                                    | $a(t)$           | $[\frac{m}{s^2}]$ |
| Maximalbeschleunigung:                             | $\hat{a}$        | $[\frac{m}{s^2}]$ |
| Drehwinkel:                                        | $\varphi(t)$     | [1]               |
| Maximaler Drehwinkel:                              | $\hat{\varphi}$  | [1]               |
| Winkelgeschwindigkeit:                             | $\omega(t)$      | $[\frac{1}{s}]$   |
| Maximalwinkelgeschwindigkeit:                      | $\hat{\omega}$   | $[\frac{1}{s}]$   |
| Winkelbeschleunigung:                              | $\alpha(t)$      | $[\frac{1}{s^2}]$ |
| Maximalwinkelbeschleunigung:                       | $\hat{\alpha}$   | $[\frac{1}{s^2}]$ |
| Nullphasenwinkel:                                  | $\varphi_0$      | [1]               |
| Anfangsauslenkung:                                 | $x_0$            | [m]               |
| Anfangsgeschwindigkeit:                            | $v_0$            | $[\frac{m}{s}]$   |
| Eigenkreisfrequenz (ungedämpft):                   | $\omega_0$       | $[\frac{1}{s}]$   |
| Schwingungsdauer (ungedämpft):                     | $T_0$            | [s]               |
| Kreisfrequenz (gedämpft):                          | $\omega_{ged}$   | $[\frac{1}{s}]$   |
| Schwingungsdauer (gedämpft):                       | $T_{ged}$        | [s]               |
| Erregerkreisfrequenz:                              | $\omega_E$       | $[\frac{1}{s}]$   |
| Kreisfrequenzverhältnis:                           | $\eta$           | [1]               |
| Phasenverschiebung zwischen Erreger und Schwinger: | $\phi$           | [1]               |
| Verstärkungsfaktor:                                | $V$              | [1]               |

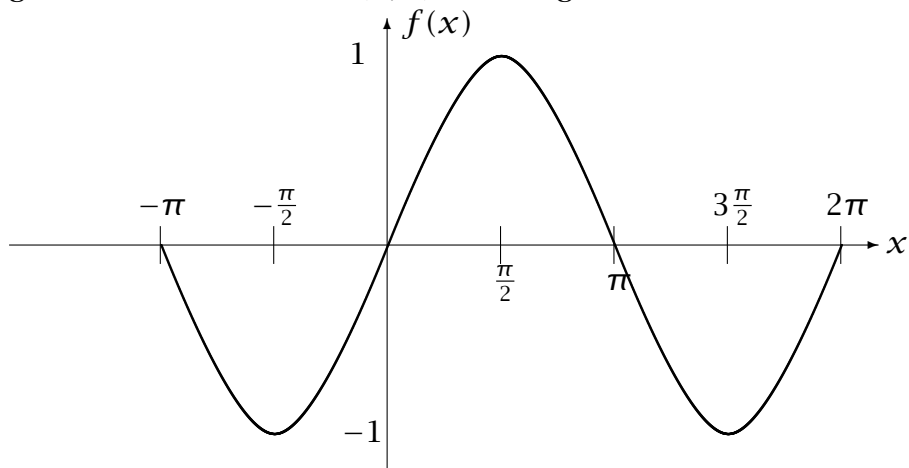
| <b>Physikalische Größe</b>              | <b>Formelbuchstaben</b> | <b>Einheit</b>      |
|-----------------------------------------|-------------------------|---------------------|
| Reibungskoeffizient:                    | $R$                     | $[\frac{Ns}{m}]$    |
| Abklingkonstante:                       | $\delta$                | $[\frac{1}{s}]$     |
| Dämpfungsgrad:                          | $D$                     | [1]                 |
| Kraftamplitude (erzwungene Schwingung): | $\hat{F}_E$             | [N]                 |
| mittlere Leistung:                      | $\bar{P}$               | [W]                 |
| Federkonstante:                         | $c$                     | $[\frac{N}{m}]$     |
| Winkelrichtgröße:                       | $c^*$                   | [Nm]                |
| Massenträgheitsmoment:                  | $J$                     | [kgm <sup>2</sup> ] |
| Elastizitätsmodul:                      | $E$                     | $[\frac{N}{m^2}]$   |
| Schubmodul:                             | $G$                     | $[\frac{N}{m^2}]$   |
| Axiales Flächenträgheitsmoment:         | $I$                     | [m <sup>4</sup> ]   |

## 2. Mathematische Grundlagen

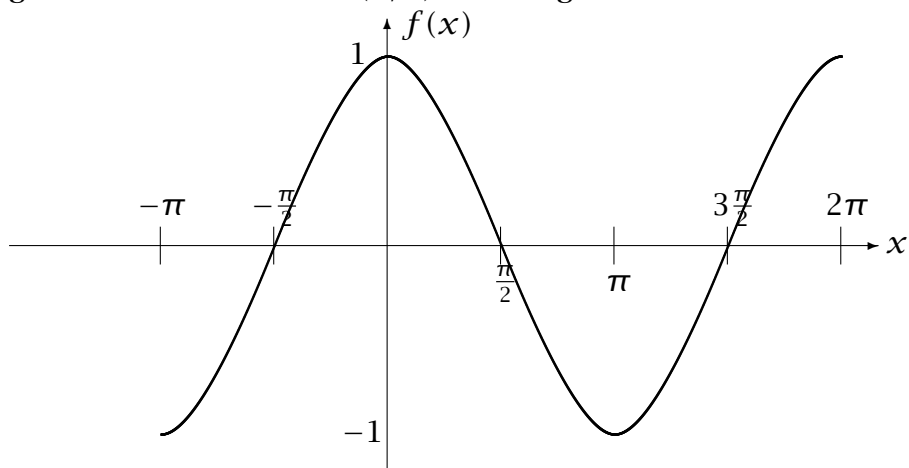
### 2.1. Trigonometrie

#### 2.1.1. Die trigonometrischen Standard-Funktionen

- Die Standard-Sinus-Funktion  $f(x) = \sin x$  hat die Periode  $2\pi$ , geht durch den Punkt  $O(0/0)$  und fängt von dort an nach oben zu schwingen.



- Die Standard-Cosinus-Funktion  $f(x) = \cos x$  hat die Periode  $2\pi$ , geht durch den Punkt  $O(0/1)$  und fängt von dort an nach unten zu schwingen.



#### 2.1.2. Symmetrie der trigonometrischen Standard-Funktionen

- Die Standard-Sinus-Funktion  $f(x) = \sin x$  ist punktsymmetrisch zum Ursprung.  
Es gilt also:  
 $\sin(-x) = -\sin x$       ferner gilt auch       $\sin(-bx) = -\sin(bx)$
- Die Standard-Cosinus-Funktion  $f(x) = \cos x$  ist achsensymmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse.  
Es gilt also:  
 $\cos(-x) = \cos x$       ferner gilt auch       $\cos(-bx) = \cos(bx)$

### 2.1.3. Kompliziertere trigonometrische Funktionen

Die folgenden trigonometrischen Funktionen in Norm-Darstellung ( $b > 0$ )

$$f(x) = a \sin[b(x + c)] + d$$

und

$$f(x) = a \cos[b(x + c)] + d$$

sind für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

Die Parameter  $|a|$ ,  $b > 0$ ,  $c$ ,  $d$  haben folgende Bedeutungen:

|                      |                                                                                                                                                                                                            |
|----------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ a $                | <b>Amplitude</b> der Funktion<br>$a > 0$ : Erhalten der Richtung der Standard-Funktion<br>$a < 0$ : Zusätzliche Spiegelung der Standard-Funktion an der $x$ -Achse<br>Streckung/Stauchung in $y$ -Richtung |
| $p = \frac{2\pi}{b}$ | <b>Periode</b> der Funktion ( $f(x + p) = f(x)$ )<br>Streckung/Stauchung in $x$ -Richtung                                                                                                                  |
| $c$                  | <b>Verschiebung in <math>x</math>-Richtung</b><br>Ist $c > 0$ : Verschiebung nach links ('Plus' im Argument)<br>Ist $c < 0$ : Verschiebung nach rechts ('Minus' im Argument)                               |
| $d$                  | <b>Verschiebung in <math>y</math>-Richtung</b><br>Ist $d > 0$ : Verschiebung nach oben<br>Ist $d < 0$ : Verschiebung nach unten                                                                            |

#### Anmerkung

Ist eine trigonometrische Funktion nicht in Norm-Darstellung ( $b < 0$ ) gegeben, so ist diese in Norm-Darstellung ( $b > 0$ ) zu bringen. Dies geschieht durch Ausklammern des Faktors  $b$  im Argument und Ausnutzen von Symmetrieeigenschaften der jeweiligen Standard-Funktion. Hat man die Norm-Darstellung erreicht, so beschreiben die Parameter, wie diese Funktion aus der jeweiligen Standard-Funktion entsteht.

**Zwei rechnerische Beispiele**, wie man trigonometrische Funktionen in Norm-Darstellung bringt:

- $f(x) = -2 \sin(-2x + \pi) + 3$

Ausklammern des Faktors  $b$

$$f(x) = -2 \sin \left[ -2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 3$$

Ausnutzung der Symmetrie der Sinus-Funktion

$$f(x) = 2 \sin \left[ 2 \left( x - \frac{\pi}{2} \right) \right] + 3 \quad \Rightarrow \quad a = +2, p = \pi, c = -\frac{\pi}{2}, d = +3$$

- $f(x) = -3 \cos(-4x - \pi) - 2$

Ausklammern des Faktors  $b$

$$f(x) = -3 \cos \left[ -4 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right] - 2$$

## Ausnutzung der Symmetrie der Cosinus-Funktion

$$f(x) = -3 \cos \left[ 4 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) \right] - 2 \quad \Rightarrow \quad a = -3, p = \frac{\pi}{2}, c = +\frac{\pi}{4}, d = -2$$

### 2.1.4. Nullstellen trigonometrischer Funktionen

$$\sin x = 0$$

$$x_k = k\pi, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$a \sin(bx + c) = 0$$

$$x_k = -\frac{c}{b} + k\frac{\pi}{b}, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Ferner gilt für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\sin(k\pi) = 0$$

$$\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^k)(-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\cos x = 0$$

$$x_k = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

$$a \cos(bx + c) = 0$$

$$x_k = -\frac{c}{b} + (2k + 1)\frac{\pi}{2b}, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

Ferner gilt für  $k \in \mathbb{Z}$ :

$$\cos(k\pi) = (-1)^k$$

$$\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{k+1})(-1)^{\frac{k}{2}}$$

### 2.1.5. Einfache trigonometrische Gleichungen

Im Folgenden sei  $-1 \leq e \leq 1$  mit  $e \in \mathbb{R}$ , sonst sind die Gleichungen unlösbar.

$$\sin x = e$$

Taschenrechner liefert  $x_1 = \arcsin e$

$$-\frac{\pi}{2} \leq x_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$x_{1k} = x_1 + 2k\pi$$

$$x_{2k} = \pi - x_1 + 2k\pi = -x_1 + (2k + 1)\pi$$

jeweils mit  $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos x = e$$

Taschenrechner liefert  $x_1 = \arccos e$

$$0 \leq x_1 \leq \pi$$

$$x_{1k} = x_1 + 2k\pi$$

$$x_{2k} = 2\pi - x_1 + 2k\pi = -x_1 + (2k + 2)\pi$$

jeweils mit  $k \in \mathbb{Z}$

### 2.1.6. Kompliziertere trigonometrische Gleichungen

Im Folgenden sei  $-1 \leq e \leq 1$  mit  $e \in \mathbb{R}$ , sonst sind die Gleichungen unlösbar.

$$\sin(bx + c) = e$$

Substitution  $z = bx + c$  liefert:

$$\sin z = e$$

Taschenrechner liefert  $z_1 = \arcsin e$

$$-\frac{\pi}{2} \leq z_1 \leq \frac{\pi}{2}$$

$$z_{1k} = z_1 + 2k\pi$$

$$z_{2k} = \pi - z_1 + 2k\pi = -z_1 + (2k + 1)\pi$$

Rücksubstitution liefert:

$$bx_{1k} + c = z_{1k}$$

$$x_{1k} = \frac{z_1 - c}{b} + 2k\frac{\pi}{b}$$

$$bx_{2k} + c = z_{2k}$$

$$x_{2k} = \frac{-z_1 - c}{b} + (2k + 1)\frac{\pi}{b}$$

jeweils mit  $k \in \mathbb{Z}$

$$\cos(bx + c) = e$$

Substitution  $z = bx + c$  liefert:

$$\cos z = e$$

Taschenrechner liefert  $z_1 = \arccos e$

$$0 \leq z_1 \leq \pi$$

$$z_{1k} = z_1 + 2k\pi$$

$$z_{2k} = 2\pi - z_1 + 2k\pi = -z_1 + (2k + 2)\pi$$

Rücksubstitution liefert:

$$bx_{1k} + c = z_{1k}$$

$$x_{1k} = \frac{z_1 - c}{b} + 2k\frac{\pi}{b}$$

$$bx_{2k} + c = z_{2k}$$

$$x_{2k} = \frac{-z_1 - c}{b} + (2k + 2)\frac{\pi}{b}$$

jeweils mit  $k \in \mathbb{Z}$

### 2.1.7. Der Zusammenhang zwischen Sinus- und Cosinus-Funktion

- **Darstellung einer Sinus-Funktion durch eine Cosinus-Funktion**

Der Sinus ist ein um  $\frac{\pi}{2}$  nach rechts verschobener Cosinus

Es gilt also:

$$\sin x = \cos \left( x - \frac{\pi}{2} \right)$$

- **Darstellung einer Cosinus-Funktion durch eine Sinus-Funktion**

Der Cosinus ist ein um  $\frac{\pi}{2}$  nach links verschobener Sinus

Es gilt also:

$$\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$

- **Weitere Zusammenhänge**

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

und

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ mit } x \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2}, \text{ mit } k \in \mathbb{Z}$$

- **Additionstheoreme**

- **Summe/Differenz von Winkeln der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

- **Doppelter Winkel der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

- **Halber Winkel der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin \left( \frac{x}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$$

$$\cos \left( \frac{x}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\tan \left( \frac{x}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

- **Summe/Differenz der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x - y) \cos \frac{1}{2}(x + y)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \sin \frac{1}{2}(x - y)$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$

$$\tan x - \tan y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

- **Produkt der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x - y) + \sin(x + y)]$$

$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

- **Potenz der trigonometrischen Standard-Funktionen**

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} [1 - \cos(2x)]$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} [1 + \cos(2x)]$$

$$\tan^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{1 + \cos(2x)}$$

### 2.1.8. Einige Werte der trigonometrischen Standard-Funktionen

- **Die gängigsten Winkel und die zugehörigen Werte der trigonometrischen Standard-Funktionen**

|                  |    |                       |                       |                       |                 |
|------------------|----|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------|
| $\alpha$ in Grad | 0° | 30°                   | 45°                   | 60°                   | 90°             |
| $x$ in rad       | 0  | $\frac{\pi}{6}$       | $\frac{\pi}{4}$       | $\frac{\pi}{3}$       | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin x$         | 0  | $\frac{1}{2}$         | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1               |
| $\cos x$         | 1  | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$         | 0               |
| $\tan x$         | 0  | $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ | 1                     | $\sqrt{3}$            | -               |

- **Kleine Merkregel für die Sinus-Werte**

|                  |                           |                                     |                       |                       |                           |
|------------------|---------------------------|-------------------------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------|
| $\alpha$ in Grad | 0°                        | 30°                                 | 45°                   | 60°                   | 90°                       |
| $x$ in rad       | 0                         | $\frac{\pi}{6}$                     | $\frac{\pi}{4}$       | $\frac{\pi}{3}$       | $\frac{\pi}{2}$           |
| $\sin x$         | $\frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$ | $\frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$ |

Die Cosinus-Werte laufen gerade anders herum - die Tangens-Werte erhält man durch Division der Sinus-Werte durch die Cosinus-Werte.

- **Umrechnung von rad in Grad und umgekehrt**

$\alpha$  ist ein Winkel in Grad

$x$  ist ein Winkel in rad

Es gilt:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi} \text{ oder } \alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x \text{ oder } x = \frac{\pi}{180^\circ} \alpha$$

## 2.2. Komplexe Zahlen

### 2.2.1. Definition von komplexen Zahlen

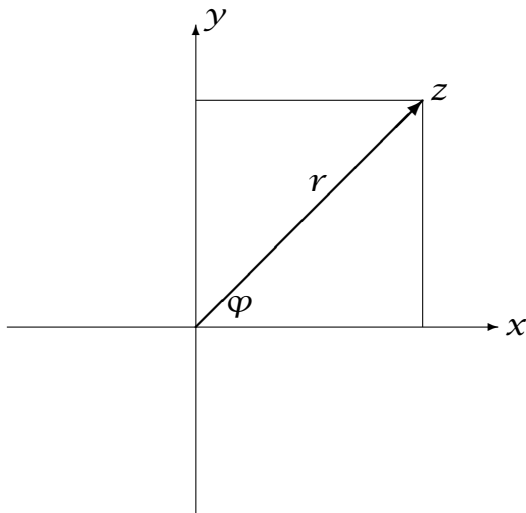
Die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}; i^2 = -1\}$$

heißt Menge der komplexen Zahlen;  $i$  heißt imaginäre Einheit.

Für  $y = 0$  erhält man die reellen Zahlen, für  $x = 0$  die rein imaginären Zahlen.

Die Menge  $\mathbb{R}$  der reellen Zahlen läßt sich als Punkt auf der  $x$ -Achse (Zahlenstrahl) darstellen. Zur Darstellung der Menge  $\mathbb{C}$  faßt man komplexe Zahlen auf als reelle Zahlenpaare, die sich als Vektoren (Zeiger) oder als Punkte einer  $[x, y]$ -Ebene darstellen lassen.



### 2.2.2. Darstellung von komplexen Zahlen

- **Kartesische Darstellung**  $z = x + iy$

$x$ -Achse

**reelle Achse**

$y$ -Achse

**imaginäre Achse**

$x = \operatorname{Re}(z)$

**Realteil von  $z$**

$y = \operatorname{Im}(z)$

**Imaginärteil von  $z$**

$\bar{z} = x - iy$

**konjugiert komplexe Zahl von  $z$**

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$

**Betrag von  $z$**

- **Polare Darstellung**  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$r > 0$

**Abstand zum Ursprung**

$\varphi$

**Winkel mit der positiven reellen Achse**

$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi)$

**konjugiert komplexe Zahl von  $z$**

- **Eulersche Darstellung**  $z = re^{i\varphi}$

$r > 0$

**Abstand zum Ursprung**

$\varphi$

**Winkel mit der positiven reellen Achse**

$\bar{z} = re^{-i\varphi}$

**konjugiert komplexe Zahl von  $z$**

### 2.2.3. Beziehung zwischen den Darstellungsformen

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$

Umformen

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x > 0 & \text{1. oder 4. Quadrant} \\ \pi + \arctan \frac{y}{x} & \text{für } x < 0 & \text{2. oder 3. Quadrant} \end{cases}$$

Die Tangensfunktion ist nicht eindeutig im Intervall  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  und der Taschenrechner liefert nur Werte zwischen  $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ .

#### 2.2.4. Rechnen mit komplexen Zahlen

Gegeben sind die zwei komplexen Zahlen

$$z_1 = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\varphi_1} \text{ und } z_2 = x_2 + iy_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$$

##### • Addition und Subtraktion

Dies ist am einfachsten in der kartesischen Form und erfolgt – wie bei Vektoren – koordinatenweise

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) \pm i(y_1 + y_2)$$

##### • Multiplikation

Dies geschieht bei der kartesischen Form durch Ausmultiplizieren

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + i^2y_1y_2$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Dies geschieht bei der Eulerschen Form durch die Potenzgesetze

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Beträge multiplizieren, Exponenten addieren

##### • Division

Dies geschieht bei der kartesischen Form durch reell machen des Nenners (mit Hilfe Erweiterns mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} \cdot \frac{(x_2 - iy_2)}{(x_2 - iy_2)} = \dots = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Dies geschieht bei der Eulerschen Form durch die Potenzgesetze

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Beträge dividieren, Exponenten subtrahieren

##### • Potenzieren

Dies geschieht bei der Eulerschen Form durch die Potenzgesetze

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}$$

Betrag potenzieren, Exponenten multiplizieren

### 2.2.5. Komplexe Darstellung von Schwingungen

Hat man eine Schwingung in der Darstellung

$$x = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

so kann man diese in die Eulersche Darstellung transformieren und nimmt nur den Realteil

$$x = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

Hat man eine Schwingung in der Darstellung

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

so kann man diese in die Eulersche Darstellung transformieren und nimmt nur den Imaginärteil

$$x = \operatorname{Im}[\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi)}] = \operatorname{Im}[\hat{x}e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t}]$$

Hat man eine Schwingung in der Darstellung

$$x = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})$$

so kann man diese in die Eulersche Darstellung transformieren und nimmt nur den Realteil

$$x = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2})}] = \operatorname{Re}[\hat{x}e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})} \cdot e^{i\omega t}]$$

### 2.2.6. Überlagerung von Schwingungen gleicher Kreisfrequenz

#### • Beide Schwingungen in Sinus-Darstellung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{x} \sin(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2}{\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2} \text{ (Quadranten beachten!)}$$

#### • Beide Schwingungen in Cosinus-Darstellung

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \sin \varphi_2}{\hat{x}_1 \cos \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2} \text{ (Quadranten beachten!)}$$

• **Eine Schwingung in Sinus-Darstellung, eine in Cosinus-Darstellung**

$$x_1(t) = \hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1 - \frac{\pi}{2})$$

$$x_2(t) = \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\hat{x}_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{x}_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi)$$

mit

$$\hat{x} = \sqrt{\hat{x}_1^2 + \hat{x}_2^2 + 2\hat{x}_1\hat{x}_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\hat{x}_2 \sin \varphi_2 - \hat{x}_1 \cos \varphi_1}{\hat{x}_1 \sin \varphi_1 + \hat{x}_2 \cos \varphi_2} \text{ (Quadranten beachten!)}$$

### 2.3. Lineare Gleichungssysteme

#### 2.3.1. Inhomogene lineare Gleichungssysteme

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

Man identifiziert:

Den Vektor      Die Koeffizientenmatrix      Die Inhomogenität

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Somit ist das inhomogene lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise gegeben durch

$$\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Man definiert:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

links oben mal rechts unten minus links unten mal rechts oben

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

Man ersetzt die erste Spalte der Koeffizientenmatrix durch die Inhomogenität.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$$

Man ersetzt die zweite Spalte der Koeffizientenmatrix durch die Inhomogenität.

#### 2.3.2. Cramersche Regel

Die Cramersche Regel dient zur einfachen Berechnung der Lösung von inhomogenen linearen Gleichungssystemen der Art  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$ .

- $\Delta \neq 0$  liefert die eindeutigen Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  und man erhält:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ und } x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

- $\Delta = 0$  Die Cramersche Regel versagt und das inhomogene lineare Gleichungssystem ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

### 2.3.3. Homogene lineare Gleichungssysteme

Gegeben ist das homogene lineare Gleichungssystem:

$$a_{11} + a_{12} = 0$$

$$a_{21} + a_{22} = 0$$

Somit ist das homogene lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise gegeben durch  $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{0}$

Die Lösungen  $x_1$  und  $x_2$  erhält man wie folgt für:

- $\Delta = 0$ , somit ist die Lösung (unendlich viele)

$$x_1 = -a_{12} \cdot \lambda \text{ und } x_2 = a_{11} \cdot \lambda \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}$$

- $\Delta \neq 0$ , somit ist die triviale (eindeutige) Lösung

$$x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 0$$

### 2.4. Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, zwei ist. Man kann eine quadratische Gleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ mit } a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

Man unterscheidet qualitativ folgende drei Fälle:

- $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$

Die quadratische Gleichung lautet dann:

$$ax^2 + c = 0$$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Man erhält nur Lösungen, wenn  $a$  und  $c$  unterschiedliche Vorzeichen haben.

- $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$

Die quadratische Gleichung lautet dann:

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = -\frac{b}{a}$$

- $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$

Die quadratische Gleichung lautet dann:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Die Diskriminante lautet:  $D = b^2 - 4ac$

Ist  $D > 0$ , so erhält man zwei verschiedene reelle Lösungen.

Ist  $D = 0$ , so erhält man eine reelle Lösung (Doppellösung).

Ist  $D < 0$ , so gibt es keine reelle Lösung.

## 2.5. Differentialrechnung

### 2.5.1. Einige Ableitungsfunktionen

$$f(x) = x^n, \text{ mit } n \neq 0 \quad f'(x) = nx^{n-1}$$

$$f(x) = e^{ax+b}, \text{ mit } a \neq 0 \quad f'(x) = ae^{ax+b}$$

$$f(x) = \sin(ax + b) \quad f'(x) = a \cos(ax + b)$$

$$f(x) = \cos(ax + b) \quad f'(x) = -a \sin(ax + b)$$

### 2.5.2. Differentiationsregeln

- **Summenregel**

$$f(x) = g(x) + h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x) + h'(x)$$

In Worten:

*Es darf gliedweise abgeleitet werden*

- **Faktorregel**

$$f(x) = cg(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = cg'(x)$$

In Worten:

*Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten*

- **Produktregel**

$$f(x) = g(x)h(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

In Worten:

*Vorne abgeleitet mal hinten plus hinten abgeleitet mal vorne*

- **Quotientenregel**

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{(h(x))^2}$$

In Worten:

*Oben abgeleitet mal unten minus unten abgeleitet mal oben durch unten zum Quadrat*

• **Kettenregel**

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

In Worten:

*Äußere Ableitung mal innere Ableitung*

**2.6. Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Hierbei sei nur auf die sogenannte Schwingungsdifferentialgleichung eingegangen.

Physikalisch sinnvoll sind hier nur positive reelle Koeffizienten  $m, R, c$ .

**2.6.1. Homogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Die homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von folgender Gestalt:

$$mx(t) + Rx(t) + cx(t) = 0 \text{ mit } m > 0, c > 0, R \geq 0 \in \mathbb{R}$$

Der Ansatz  $x(t) = e^{\lambda t}$  führt zum sogenannten **charakteristischen Polynom**:

$$m\lambda^2 + R\lambda + c = 0 \text{ mit } \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4mc}}{2m} = -\frac{R}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2m}\right)^2 - \frac{c}{m}}$$

Mit den Abkürzungen:  $\delta = \frac{R}{2m} > 0$ ,  $\omega_0^2 = \frac{c}{m} > 0$  und  $\omega_{\text{ged}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$  folgt:

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Diese quadratische Gleichung liefert

• **2 einfache, negative reelle Lösungen**

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \text{ wenn } \delta^2 > \omega_0^2$$

• **1 doppelte reelle negative Lösung**

$$\lambda_{1,2} = \lambda = -\delta, \text{ wenn } \delta^2 = \omega_0^2$$

• **2 konjugiert komplexe Lösungen mit negativem Realteil**

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm i\omega_{\text{ged}}, \text{ wenn } \delta^2 < \omega_0^2$$

| <b>Lösungen des char. Polynoms</b>                                               | <b>Fundamentallösungen der Differentialgleichung</b>                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ jeweils einfach reell | $x_1(t) = e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}, x_2(t) = e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$     |
| $\lambda_{1,2} = \lambda = -\delta$ doppelt reell                                | $x_1(t) = e^{-\delta t}, x_2(t) = te^{-\delta t}$                                                                    |
| $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_{\text{ged}}$ konjugiert komplex            | $x_1(t) = e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t), x_2(t) = e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t)$ |

Man erhält so zwei linear unabhängige Fundamentallösungen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , die eine Lösungsbasis bilden und deren Linearkombination die homogene Lösung der Differentialgleichung bildet.

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Die beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  der homogenen Lösung erhält man aus den Anfangsbedingungen  $x_{\text{hom}}(0) = x_0$  und  $\dot{x}_{\text{hom}}(0) = v_0$ .

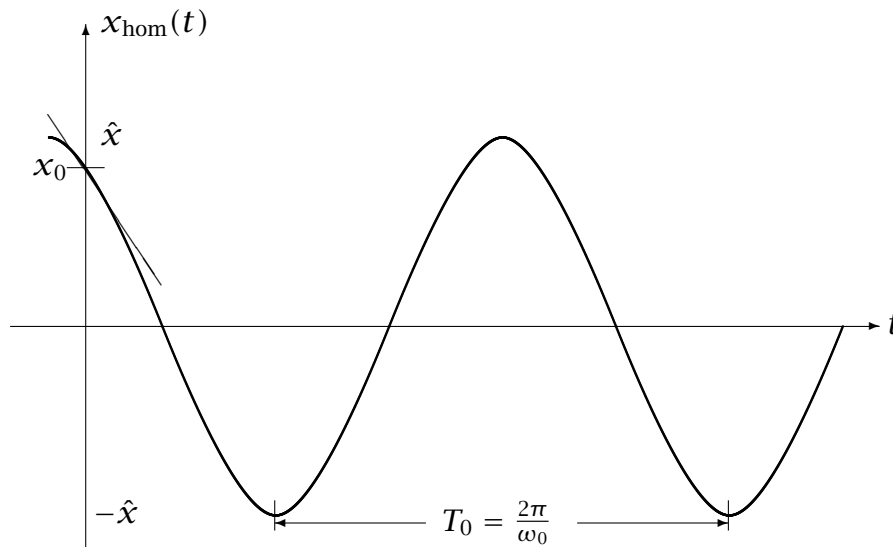
Auf Schwingungen übertragen liefert eine solche homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten folgende Möglichkeiten:

• **Freie Schwingung**

$$R = 0, \quad m\ddot{x} + c\dot{x} = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 \sin(\omega_0 \cdot t) + c_2 \cos(\omega_0 \cdot t) = \hat{x} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}_{\text{hom}}(t) = c_1 \omega_0 \cos(\omega_0 \cdot t) - c_2 \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot t) = -\hat{x} \omega_0 \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$



Tritt keine Reibung auf, also ist  $R = 0$ , so gibt es keinen exponentiell abklingenden Teil und die Schwingung hält ihre Amplitude. Die Schwingungsdauer hängt nur von der schwingenden Masse  $m$  und der Federkonstanten  $c$  ab, und das System schwingt mit der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$ .

Die Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$  bzw.  $\hat{x}$ ,  $\varphi_0$  hängen eindeutig von den beiden Anfangsbedingungen

$$x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

(Anfangspunkt) und

$$\dot{x}_{\text{hom}}(0) = v_0$$

(Steigung der Tangente an das Schaubild im Anfangspunkt  $(0/x_0)$ ) ab.

**Einsetzen der Anfangsbedingungen:**

$$- \quad x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

$$c_1 \underbrace{\sin(\omega_0 0)}_{=0} + c_2 \underbrace{\cos(\omega_0 0)}_{=1} = x_0$$

$$c_2 = x_0 \quad [\text{m}]$$

$$- x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

$$c_1 \omega_0 \underbrace{\cos(\omega_0 0)}_{=1} - c_2 \omega_0 \underbrace{\sin(\omega_0 0)}_{=0} = v_0$$

$$c_1 = \frac{v_0}{\omega_0} \quad [\text{m}]$$

## • Gedämpfte Schwingung

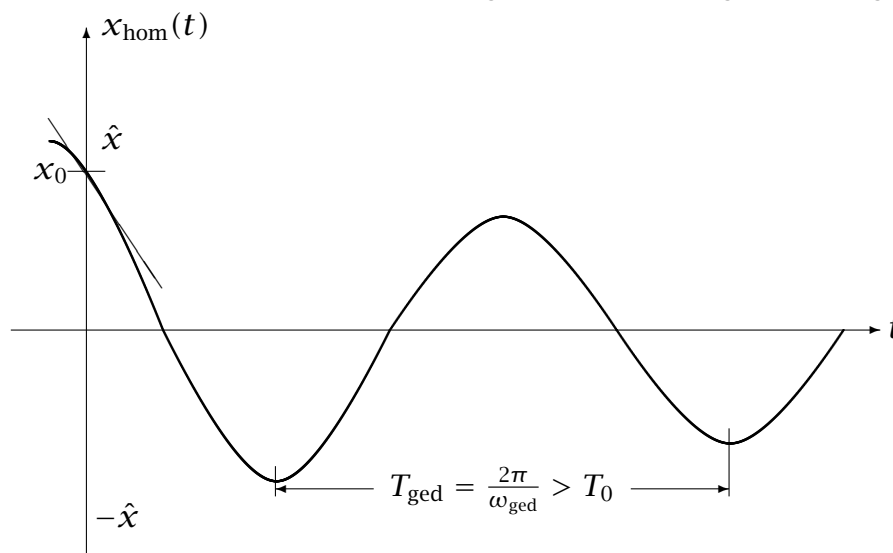
### - Schwingfall

$$R > 0, m\ddot{x} + R\dot{x} + cx = 0, \lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_{\text{ged}}$$

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-\delta t} [c_1 \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t) + c_2 \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t)] = \hat{x} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)$$

$$x_{\text{hom}}(t) = e^{-\delta t} [c_1 (-\delta \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t) + \omega_{\text{ged}} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t)) + c_2 (-\delta \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t) - \omega_{\text{ged}} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t))]$$

$$x_{\text{hom}}(t) = -\hat{x} e^{-\delta t} [\delta \cdot \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0) + \omega_{\text{ged}} \cdot \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)]$$



Hier sieht man leicht, dass nur wenn konjugiert komplexe Lösungen von der charakteristischen Gleichung auftreten, das System auch schwingungsfähig ist. Identifiziert man  $m$  mit der Masse des Schwingers,  $R$  mit einer Reibungskonstanten und  $c$  mit einer Federkonstanten, so sieht man, dass  $\delta = \frac{R}{2m}$  reibungsabhängig ist und in der Fundamentallösung einen exponentiell abklingenden Teil verursacht. Physikalisch bedeutet dies, dass das System mit  $\omega_{\text{ged}} < \omega_0$  (oder  $T_{\text{ged}} > T_0$ ) schwingt und die Amplitude exponentiell abnimmt, bis sie schließlich in der Gleichgewichtslage endet.

Die Konstanten  $c_1, c_2$  bzw.  $\hat{x}, \varphi_0$  hängen eindeutig von den beiden Anfangsbedingungen  $x_{\text{hom}}(0) = x_0$  (Anfangspunkt) und

$$x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

(Steigung der Tangente an das Schaubild im Anfangspunkt  $(0/x_0)$ ) ab.

**Einsetzen der Anfangsbedingungen:**

$$x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

$$\underbrace{e^{-\delta 0}}_{=1} [c_1 \underbrace{\sin(\omega_{\text{ged}} 0)}_{=0} + c_2 \underbrace{\cos(\omega_{\text{ged}} 0)}_{=1}] = x_0$$

$$c_2 = x_0 \quad [\text{m}]$$

$$x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

$$\underbrace{e^{-\delta 0}}_{=1} [c_1 \underbrace{(-\delta \sin(\omega_{\text{ged}} 0))}_{=0} + \omega_{\text{ged}} \underbrace{\cos(\omega_{\text{ged}} 0)}_{=1}] + c_2 \underbrace{(-\delta \cos(\omega_{\text{ged}} 0))}_{=1} - \omega_{\text{ged}} \underbrace{\sin(\omega_{\text{ged}} 0)}_{=0}$$

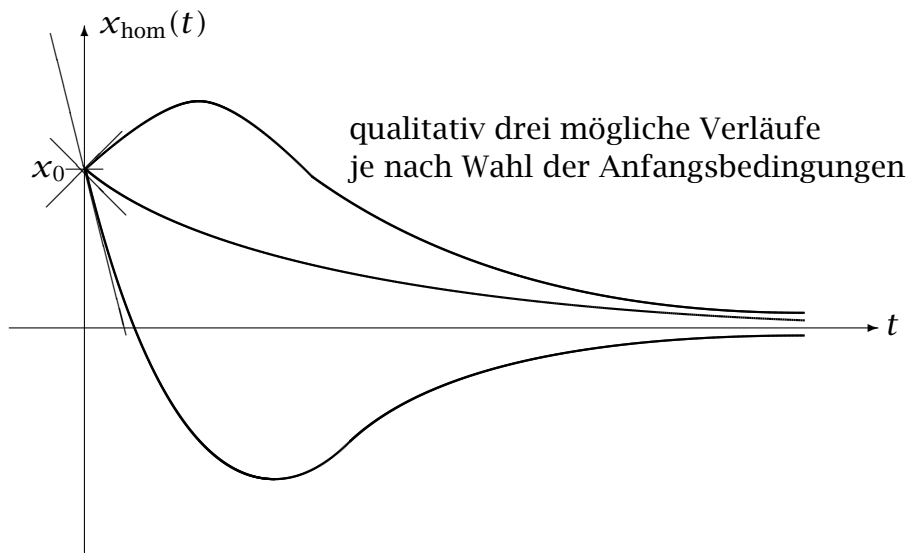
$$c_1 = \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_{\text{ged}}} \quad [\text{m}]$$

### - Aperiodischer Grenzfall

$$R > 0, m\ddot{x} + R\dot{x} + cx = 0, \lambda_{1,2} = -\delta$$

$$x_{\text{hom}}(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\delta t}$$

$$x_{\text{hom}}(t) = [c_2(1 - \delta t) - c_1 \delta] e^{-\delta t}$$



Das System ist nicht schwingungsfähig - es gibt also keine konjugiert komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung, sondern eine doppelte negative reelle Lösung, so kann maximal ein Umkehrpunkt erreicht werden und das System geht mehr oder weniger schnell exponentiell in seine Gleichgewichtslage ohne zu schwingen.

Die Konstanten  $c_1, c_2$  hängen eindeutig von den beiden Anfangsbedingungen

$$x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

(Anfangspunkt) und

$$x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

(Steigung der Tangente an das Schaubild im Anfangspunkt  $(0/x_0)$ ) ab.

**Einsetzen der Anfangsbedingungen:**

$$x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

$$(c_1 + \underbrace{c_2 0}_{=0}) \underbrace{e^{-\delta 0}}_{=1} = x_0$$

$$c_1 = x_0 \quad [\text{m}]$$

$$x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

$$[c_2(1 - \underbrace{\delta 0}_{=0}) - c_1 \delta] \underbrace{e^{-\delta 0}}_{=1} = v_0$$

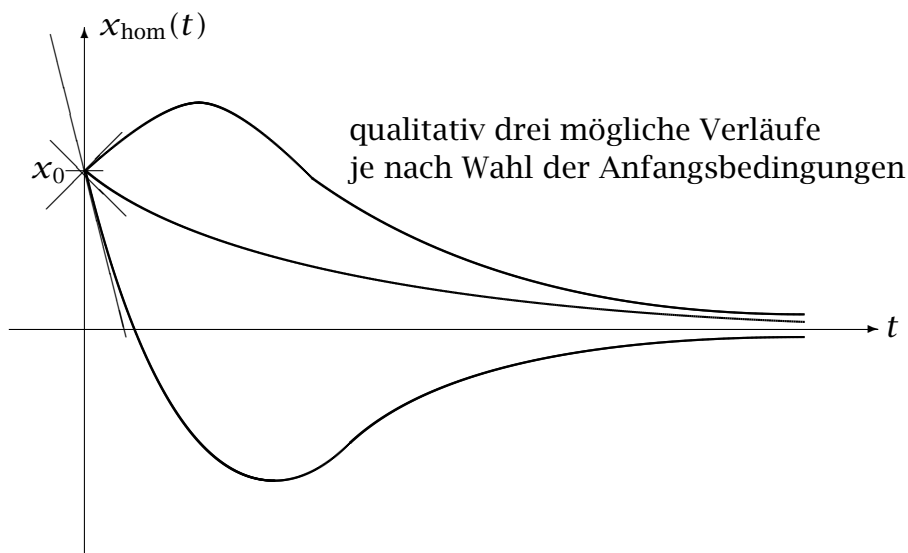
$$c_2 = v_0 + \delta x_0 \quad \left[ \frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

### - Kriechfall

$$R > 0, m\ddot{x} + R\dot{x} + cx = 0, \lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$

$$x_{\text{hom}}(t) = c_1 \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + c_2 \left( -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t}$$



Das System ist nicht schwingungsfähig – es gibt also keine konjugiert komplexen Lösungen der charakteristischen Gleichung, sondern zwei verschiedene negative reelle Lösungen, so kann maximal ein Umkehrpunkt erreicht werden und das System geht mehr oder weniger schnell exponentiell in seine Gleichgewichtslage ohne zu schwingen.

Die Konstanten  $c_1, c_2$  hängen eindeutig von den beiden Anfangsbedingungen

$$x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

(Anfangspunkt) und

$$x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

(Steigung der Tangente an das Schaubild im Anfangspunkt  $(0/x_0)$ ) ab.

#### Einsetzen der Anfangsbedingungen:

$$x_{\text{hom}}(0) = x_0$$

$$c_1 \underbrace{e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})0}}_{=1} + c_2 \underbrace{e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})0}}_{=1} = x_0$$

$$[1] \quad c_1 + c_2 = x_0$$

$$x_{\text{hom}}(0) = v_0$$

$$c_1 \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) \underbrace{e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})0}}_{=1} + c_2 \left( -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) \underbrace{e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})0}}_{=1} = v_0$$

$$[2] \quad c_1 \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) + c_2 \left( -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) = v_0$$

Dieses lineare Gleichungssystem von zwei Gleichungen ([1] und [2]) mit den zwei Unbekannten  $c_1$  und  $c_2$  kann mit der Cramerschen Regel gelöst werden und liefert:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0 + \delta x_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) \quad [\text{m}]$$

$$c_2 = \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0 + \delta x_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) \quad [\text{m}]$$

### 2.6.2. Inhomogene lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist von folgender Gestalt:

$$m\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + c x(t) = r(t) \quad \text{mit } m > 0, c > 0, R \geq 0 \in \mathbb{R}$$

Man bestimmt zunächst die Lösungen  $x_{\text{hom}}(t)$  der zugehörigen homogenen Differentialgleichung (voriges Kapitel) und berechnet durch einen speziellen Ansatz eine spezielle Lösung  $x_{\text{spez}}(t)$  der inhomogenen Differentialgleichung.

#### Spezielle Ansätze

Ist die Störfunktion  $r(t)$  vom Typ:

$$r(t) = c e^{at} \cos(b \cdot t) \quad \text{oder} \quad r(t) = c e^{at} \sin(b \cdot t)$$

#### • Normalfall

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_{\text{ged}}$$

sind konjugiert komplexe Lösungen des charakteristischen Polynoms und  $a \neq -\delta$  und  $b \neq \omega_{\text{ged}}$

#### Normalansatz

$$x_{\text{spez}}(t) = a_1 e^{at} \cos(b \cdot t) + a_2 e^{at} \sin(b \cdot t)$$

Die beiden Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  der speziellen Lösung erhält man durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung und anschließenden Koeffizientenvergleich.

#### • Resonanz im mathematischen Sinn

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_{\text{ged}}$$

sind konjugiert komplexe Lösungen des charakteristischen Polynoms und  $a = -\delta$  und  $b = \omega_{\text{ged}}$

**Resonanzansatz** (Man multipliziert den Normalansatz mit  $t$ )

$$x_{\text{spez}}(t) = a_1 t e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t) + a_2 t e^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t)$$

Die beiden Konstanten  $a_1$  und  $a_2$  der speziellen Lösung erhält man durch Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung und anschließenden Koeffizientenvergleich.

Die Gesamtlösung ergibt sich zu:

$$x(t) = x_{\text{hom}}(t) + x_{\text{spez}}(t)$$

Die Störfunktion sei für folgende physikalische Anschauung vom Typ:

$$r(t) = \underbrace{c \hat{x}_E}_{\hat{F}_E} \cos(\omega_E \cdot t)$$

Folgende Abkürzungen werden verwendet:

$\eta = \frac{\omega_E}{\omega_0}$ : Frequenzverhältnis,  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ : Dämpfungsgrad,  $\hat{F}_E = c \hat{x}_E$ : Kraftamplitude

• **Erzwungene Schwingung mit Reibung**

- **Normalfall**

Mit der Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen Erreger und Schwinger,  $\tan \phi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$ :

$$x(t) = \underbrace{\hat{x} e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)}_{\text{exp. abklingender Teil}} + \underbrace{\frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \cos(\omega_E \cdot t - \phi)}_{\text{stationärer Teil}}$$

Ist die Störfunktion vom Typ  $r(t) = \hat{F}_E \cos(\omega_E \cdot t)$ , also gibt es periodische (harmonische) Erregung, so erhält man im Normalfall mit Reibung nach einer gewissen Einschwingzeit (die Zeit, bis die homogene Lösung exponentiell abgeklungen ist) eine Schwingung mit der Kreisfrequenz  $\omega_E$  und veränderter Amplitude (stationäre Schwingung).

- **Physikalischer Resonanzfall - Amplitudenresonanzfall**

Im Amplitudenresonanzfall mit Reibung, (Resonanzfall im physikalischen Sinne - kein Resonanzfall im mathematischen Sinne). Für  $\omega_E = \sqrt{\omega_{\text{ged}}^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$

wird die Amplitudenverstärkung maximal - nur für  $0 < D < \sqrt{\frac{1}{2}}$  bildet sich ein Maximum der Amplitude aus.

- **Mathematischer Resonanzfall**

Im Resonanzfall im mathematischen Sinne  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_{\text{ged}}$ , müsste die Störfunktion den Charakter  $r(t) = \hat{F}_E e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t)$  haben (also mit Reibung). Das System wird nicht harmonisch erregt - sondern exponentiell abklingend erregt, deshalb klingt auch die Amplitude des Systems exponentiell ab.

• **Erzwungene Schwingung ohne Reibung**

- **Normalfall**

$$x(t) = c_1 \sin(\omega_0 \cdot t) + c_2 \cos(\omega_0 \cdot t) + \frac{1}{|1 - \eta^2|} \hat{x}_E \cos(\omega_E \cdot t)$$

Schaltet man Reibung aus, so erhält man im Normalfall eine überlagerte Schwingung mit veränderter Amplitude - diese hat Schwebungscharakter.

- **Resonanzfall ohne Reibung - im physikalischen und mathematischen Sinne**

$$\omega_E = \omega_0 \Rightarrow \eta = 1$$

$$x(t) = c_1 \sin(\omega_0 \cdot t) + c_2 \cos(\omega_0 \cdot t) + \underbrace{\frac{\omega_0}{2} t \hat{x}_E \sin(\omega_0 \cdot t)}_{\text{linearer Aufschaukler}}$$

Schaltet man Reibung aus, so schaukelt sich die Amplitude im Resonanzfall linear gegen unendlich.

(Resonanzkatastrophe)

### 3. Harmonische Schwingungen

#### 3.1. Federschaltungen

• **Hintereinanderschaltung**

Die Gesamtfederkonstante wird kleiner, da bei gleicher Kraft eine größere Auslenkung erfolgt:

$$c = \frac{F}{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \frac{F}{\frac{F}{c_1} + \frac{F}{c_2} + \dots + \frac{F}{c_n}} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}}$$
$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \dots + \frac{1}{c_n}$$

• **Parallelschaltung**

Die Gesamtfederkonstante wird größer, da zu gleicher Auslenkung eine größere Kraft nötig ist:

$$c = \frac{F_1 + F_2 + \dots + F_n}{x} = \frac{c_1 x + c_2 x + \dots + c_n x}{x} = c_1 + c_2 + \dots + c_n$$

#### 3.2. Freie harmonische Schwingungen

$c$ : Richtgröße der Feder (Federkonstante)

Die Richtgröße einer Feder ist das Verhältnis der dehnenden Kraft zur Dehnung:

$$c = \frac{\Delta F}{\Delta x}$$

$m$ : Schwingende Masse

Es gilt für die Periodendauer:  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$

Es gilt folgende Bewegungsdifferentialgleichung für eine freie harmonische Schwingung:

$$m\ddot{x}(t) + c x(t) = 0$$

Zwei konjugiert komplexe rein imaginäre Lösungen des charakteristischen Polynoms:  
 $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$ :

$$x(t) = A \sin(\omega_0 \cdot t) + B \cos(\omega_0 \cdot t) = \hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 \cdot t) + x_0 \cos(\omega_0 \cdot t)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \underbrace{\hat{x}\omega_0}_{\hat{v}} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \underbrace{-\hat{x}\omega_0^2}_{\hat{a}} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Die Konstanten  $A$  und  $B$ , bzw. der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  und die Amplitude  $\hat{x}$  sind eindeutig von den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$  abhängig.

Spezielle Ansätze:

- Startet der Körper vom rechten Umkehrpunkt:

$$x(0) = +\hat{x} \wedge \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Startet der Körper vom linken Umkehrpunkt:

$$x(0) = -\hat{x} \wedge \dot{x}(0) = 0 \Rightarrow x(t) = -\hat{x} \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Startet der Körper aus der Gleichgewichtslage mit nach rechts:

$$x(0) = 0 \wedge \dot{x}(0) = +\hat{v} \Rightarrow x(t) = \hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t)$$

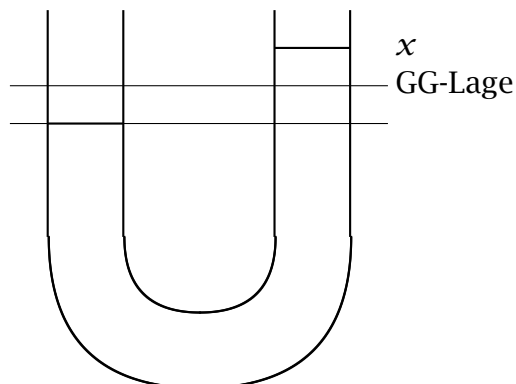
- Startet der Körper aus der Gleichgewichtslage mit nach links:

$$x(0) = 0 \wedge \dot{x}(0) = -\hat{v} \Rightarrow x(t) = -\hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t)$$

### 3.2.1. Beispiele für harmonische Schwingungen

Harmonische Schwingungen liegen dann vor, wenn die rücktreibende Kraft  $F_{\text{rück}}$  proportional zur Auslenkung ist. Diese Forderung nennt man lineares Kraftgesetz.

- **Schwingende Flüssigkeitssäule im U-Rohr**



Die Flüssigkeit habe die Dichte  $\rho$  und das U-Rohr den konstanten Querschnitt  $A$ . Die Länge der gesamten Flüssigkeitssäule sei  $L$ .

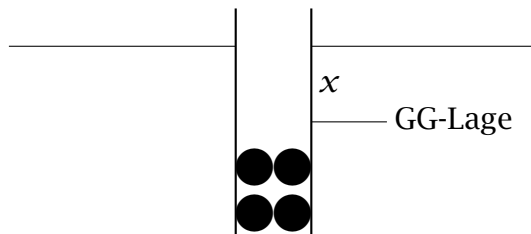
Die schwingende Masse ist somit  $m = \rho AL$

Die rücktreibende Kraft erfolgt durch Gewichtskraft der um  $2x$  erhöhten Säule im rechten U-Rohr-Schenkel, also

$$F_{\text{rück}} = \underbrace{\rho Ag}_{=c} 2x$$

Diese ist linear in  $x$  (also proportional zur Auslenkung) und somit ist diese Schwingung harmonisch und man definiert den Proportionalitätsfaktor  $c$  als Ersatzfederkonstante und kann diese direkt in die Schwingungsdifferentialgleichung einsetzen.

- **Reagenzglas in einer Flüssigkeit**



Das Reagenzglas hat schon eine gewisse Eintauchtiefe  $x_0$ . Diese ist die Gleichgewichtslage und wird durch das Kräftegleichgewicht aus Gewichtskraft und Austriebskraft erzielt. Eine weitere Auslenkung um  $x$  aus dieser Gleichgewichtslage ruft eine rücktreibende Kraft hervor, die einzig von der Auftriebskraft bewerkstelligt wird.

Bei konstantem Querschnitt  $A$  des Reagenzglases (Masse  $M$ ) und der Zuladung (Masse  $m$ ), also einer schwingenden Masse von  $M + m$  gilt mit der Dichte  $\rho$  der Flüssigkeit für die rücktreibende Kraft

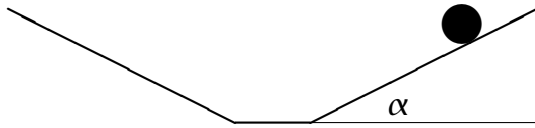
$$F_{\text{rück}} = \underbrace{\rho Ag}_{=c} x$$

Diese ist linear in  $x$  (also proportional zur Auslenkung) und somit ist diese Schwingung harmonisch und man definiert den Proportionalitätsfaktor  $c$  als Ersatzfederkonstante und kann diese direkt in die Schwingungsdifferentialgleichung einsetzen.

### 3.2.2. Beispiele für nicht-harmonische jedoch periodische Schwingungen

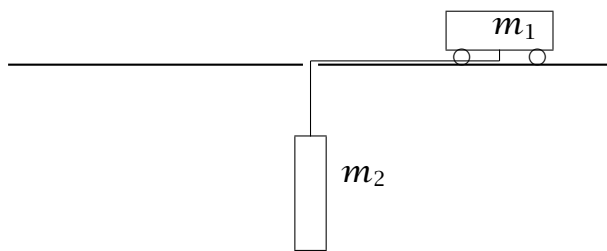
Bei solchen Schwingungen gilt kein lineares Kraftgesetz.

- **Körper zwischen zwei reibungsfreien schiefen Ebenen**



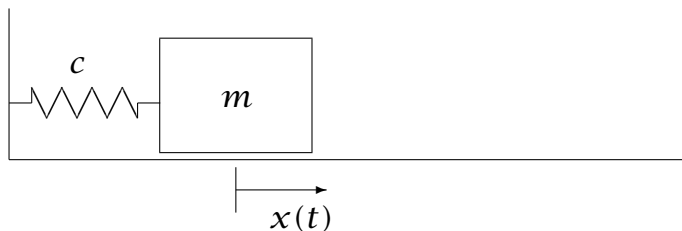
Die rüctreibende Kraft ist die Hangabtriebskraft  $F_{\text{rück}} = F_{\text{H}} = mg \sin \alpha$ , diese ist unabhängig von der Auslenkung.

- **Körper gleitet reibungsfrei beschleunigt auf einer ebenen Fläche**



Die rüctreibende Kraft ist die Gewichtskraft der Masse  $m_2$ , also  $F_{\text{rück}} = F_{\text{G},2} = m_2 g$ , diese ist unabhängig von der Auslenkung.

### 3.2.3. Energiebetrachtungen bei einem horizontalen Federpendel ohne Reibung



Bei einer solchen Schwingung spielt die Gewichtskraft des Schwingers  $m$  keine Rolle, da diese von der Unterlage kompensiert wird. Die Feder sei als masselos angenommen. Der Schwinger führt harmonische Bewegungen um die entspannte Lage der Feder durch. Für die Bewegungsgleichungen gilt:

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \underbrace{\hat{x} \omega_0}_{\dot{v}} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Für die **potentielle Energie der Feder** gilt:

$$E_{\text{pot,Feder}}(t) = \frac{1}{2} c x(t)^2 = \frac{1}{2} c [\hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)]^2 = \frac{1}{2} c \hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$



Für die **potentielle Energie der Feder** gilt:

$$E_{\text{pot,Feder}}(t) = \frac{1}{2}c x(t)^2 = \frac{1}{2}c[l_0 + \hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)]^2$$

$$E_{\text{pot,Feder}}(t) = \frac{1}{2}c[l_0^2 + 2l_0\hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + \hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)]$$

Für die **potentielle Energie der Masse** gilt:

$$E_{\text{pot,Masse}}(t) = mgh(t) = mg\hat{x} - mg\hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Für die **kinetische Energie des Schwingers** gilt:

(kinetische Energie der masselosen Feder ist Null)

$$E_{\text{kin,Masse}}(t) = E_{\text{kin,ges}}(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}m[\hat{x}\omega_0 \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)]^2 = \frac{1}{2}m\hat{x}^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Mit der Gleichgewichtsbedingung  $mg = cl_0$  folgt für die gesamte potentielle Energie:

$$E_{\text{pot,ges}}(t) = E_{\text{pot,Feder}}(t) + E_{\text{pot,Masse}}(t)$$

$$E_{\text{pot,ges}}(t) = \frac{1}{2}cl_0^2 + cl_0\hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{2}c\hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + \underbrace{mg\hat{x}}_{cl_0} - \underbrace{mg\hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)}_{cl_0}$$

$$E_{\text{pot,ges}}(t) = \frac{1}{2}cl_0^2 + \frac{1}{2}c\hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + cl_0\hat{x}$$

Mit der Identität  $c = m\omega_0^2$  folgt für die Gesamtenergie:

$$E_{\text{ges}}(t) = E_{\text{pot,ges}}(t) + E_{\text{kin,ges}}(t)$$

$$E_{\text{ges}}(t) = \frac{1}{2}cl_0^2 + \frac{1}{2}c\hat{x}^2 \sin^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + cl_0\hat{x} + \frac{1}{2}\underbrace{m\hat{x}^2\omega_0^2}_{c\hat{x}^2} \cos^2(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$E_{\text{ges}}(t) = \frac{1}{2}cl_0^2 + \frac{1}{2}c\hat{x}^2 + cl_0\hat{x} = \frac{1}{2}c[l_0^2 + 2l_0\hat{x} + \hat{x}^2]$$

$$E_{\text{ges}}(t) = \frac{1}{2}c(l_0 + \hat{x})^2 = \text{const.}$$

Dies bedeutet, dass die Gesamtenergie unabhängig von der Zeit  $t$  ist und somit potentielle und kinetische Energie harmonisch ineinander umgewandelt werden.

Die Gesamtenergie kann also am bequemsten im unteren Umkehrpunkt bestimmt werden.

### 3.3. Freie gedämpfte harmonische Schwingungen

#### 3.3.1. Kräftebilanz bei einem horizontalen Federpendel mit Reibung

Vorüberlegung und Vorzeichenkonvention:

**Ort** (Ursprung in der entspannten Lage der Feder - in diesem Beispiel GG-Lage)

|         |                    |         |
|---------|--------------------|---------|
| Ort $x$ | rechts von GG-Lage | positiv |
| Ort $x$ | links von GG-Lage  | negativ |

#### Geschwindigkeit

|                 |     |             |         |
|-----------------|-----|-------------|---------|
| Geschwindigkeit | $x$ | nach rechts | positiv |
| Geschwindigkeit | $x$ | nach links  | negativ |

### Beschleunigung

|                |     |             |         |
|----------------|-----|-------------|---------|
| Beschleunigung | $x$ | nach rechts | positiv |
| Verzögerung    | $x$ | nach links  | positiv |
| Beschleunigung | $x$ | nach links  | negativ |
| Verzögerung    | $x$ | nach rechts | negativ |

Es treten folgende drei Kräfte in der Kräftebilanz auf:

- Betrag der Federkraft

$$|\vec{F}_F| = cx$$

- Betrag der Reibungskraft

$$|\vec{F}_R| = bx$$

- Betrag der Trägheitskraft

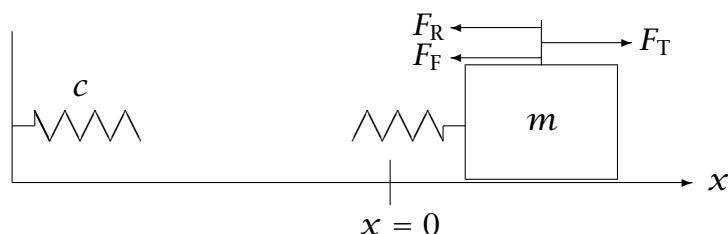
$$|\vec{F}_T| = mx$$

Was legt man aus Erfahrung zu Grunde:

- Eine Feder ist immer bestrebt in ihre entspannte Lage zurückzukehren, d. h. die Federkraft weist immer in Richtung der entspannten Lage (diese entspricht in diesem Beispiel der Gleichgewichtslage).
- Wird ein Körper beschleunigt (nach rechts oder links) – wird er also betragsmäßig schneller, so wirkt die Trägheitskraft der momentanen Bewegungsrichtung entgegen.
- Wird ein Körper verzögert (nach rechts oder links) – wird er also betragsmäßig langsamer, so wirkt die Trägheitskraft in Richtung der momentanen Bewegungsrichtung.
- Die Reibungskraft wirkt immer der momentanen Geschwindigkeit entgegen.
- Die Gewichtskraft wird von der Unterlage kompensiert und hat somit keine Auswirkung auf die Bewegung.
- **Verzögerte Bewegung nach rechts, rechts von Gleichgewichtslage  $x = 0$ , also**

$$x < 0, x > 0, x > 0$$

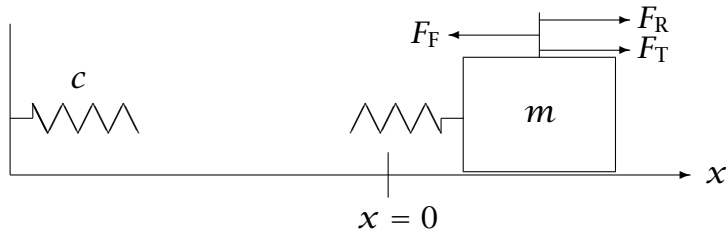
$$\sum F: bx + cx = -mx$$



- **Beschleunigte Bewegung nach links, rechts von Gleichgewichtslage  $x = 0$ , also**

$$x < 0, \dot{x} < 0, \ddot{x} > 0$$

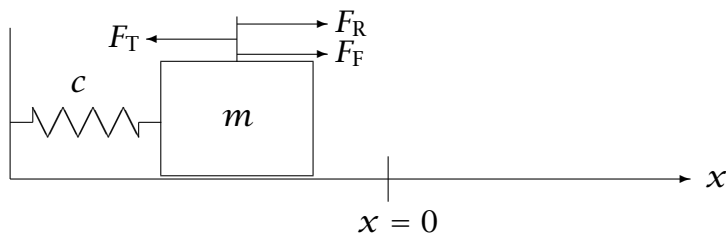
$$\sum F: \quad cx = -mx - bx$$



- **Verzögerte Bewegung nach links, links von Gleichgewichtslage  $x = 0$ , also**

$$x > 0, \dot{x} < 0, \ddot{x} < 0$$

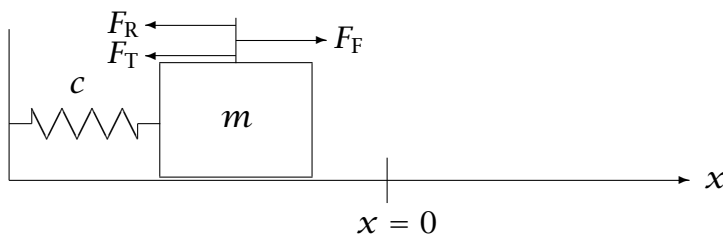
$$\sum F: \quad -bx - cx = mx$$



- **Beschleunigte Bewegung nach rechts, links von Gleichgewichtslage  $x = 0$ , also**

$$x > 0, \dot{x} > 0, \ddot{x} < 0$$

$$\sum F: \quad -cx = mx + bx$$



### 3.3.2. Kräftebilanz bei einem vertikalen Federpendel mit Reibung

Vorüberlegung und Vorzeichenkonvention:

**Ort** (Ursprung in der entspannten Lage der Feder - in diesem Beispiel **nicht** GG-Lage)

Ort  $x$  unterhalb von GG-Lage positiv

Ort  $x$  oberhalb von GG-Lage positiv

## Geschwindigkeit

|                 |     |            |         |
|-----------------|-----|------------|---------|
| Geschwindigkeit | $x$ | nach unten | positiv |
| Geschwindigkeit | $x$ | nach oben  | negativ |

## Beschleunigung

|                |     |            |         |
|----------------|-----|------------|---------|
| Beschleunigung | $x$ | nach unten | positiv |
| Verzögerung    | $x$ | nach oben  | positiv |
| Beschleunigung | $x$ | nach oben  | negativ |
| Verzögerung    | $x$ | nach unten | negativ |

Es treten folgende vier Kräfte in der Kräftebilanz auf:

- Betrag der Federkraft

$$|\vec{F}_F| = c x$$

- Betrag der Reibungskraft

$$|\vec{F}_R| = b x$$

- Betrag der Trägheitskraft

$$|\vec{F}_T| = m x$$

- Betrag der Gewichtskraft

$$|\vec{F}_G| = m g$$

Was legt man aus Erfahrung zu Grunde:

- Eine Feder ist immer bestrebt in ihre entspannte Lage zurückzukehren, d. h. die Federkraft weist immer in Richtung der entspannten Lage (diese entspricht **nicht** der Gleichgewichtslage - wie beim horizontalen Federpendel). Sie ist in der **statischen Gleichgewichtslage** bereits um die Länge  $l_0$  vorgespannt. Diese erhält man aus der statischen Gleichgewichtsbedingung  $|\vec{F}_F| = |\vec{F}_G| \Rightarrow c l_0 = m g \Rightarrow l_0 = \frac{m g}{c}$

Dies hat zur Konsequenz, dass der maximale Ausschlag (Amplitude) um diese Gleichgewichtslage kleiner sein sollte als die Vorspannungslänge  $\hat{x} < l_0$  - sonst würde die Feder im oberen Umkehrpunkt über die entspannte Lage der Feder gestaucht werden - dies würde bedeuten  $x < 0$ .

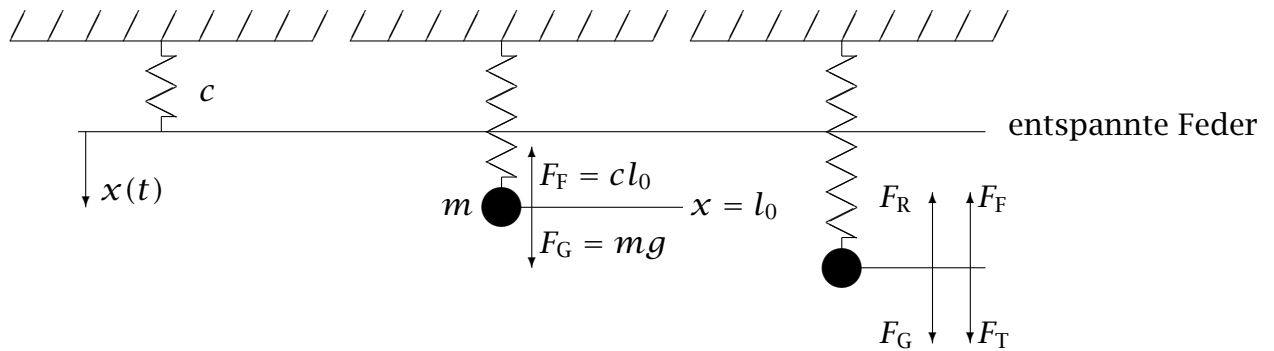
Da die entspannte Lage der Feder oberhalb des oberen Umkehrpunkts liegt, zeigt in dieser Anordnung die Federkraft immer nach oben und die Auslenkung ist immer positiv.

- Wird ein Körper beschleunigt (nach oben oder unten) - wird er also betragsmäßig schneller, so wirkt die Trägheitskraft der momentanen Bewegungsrichtung entgegen.
- Wird ein Körper verzögert (nach oben oder unten) - wird er also betragsmäßig langsamer, so wirkt die Trägheitskraft in Richtung der momentanen Bewegungsrichtung.

- Die Reibungskraft wirkt immer der momentanen Geschwindigkeit entgegen.
- Die Gewichtskraft zeigt immer nach unten (zur Erde).  
Diese ist **unabhängig** von Ort  $x$ , Geschwindigkeit  $\dot{x}$  und Beschleunigung  $\ddot{x}$ .

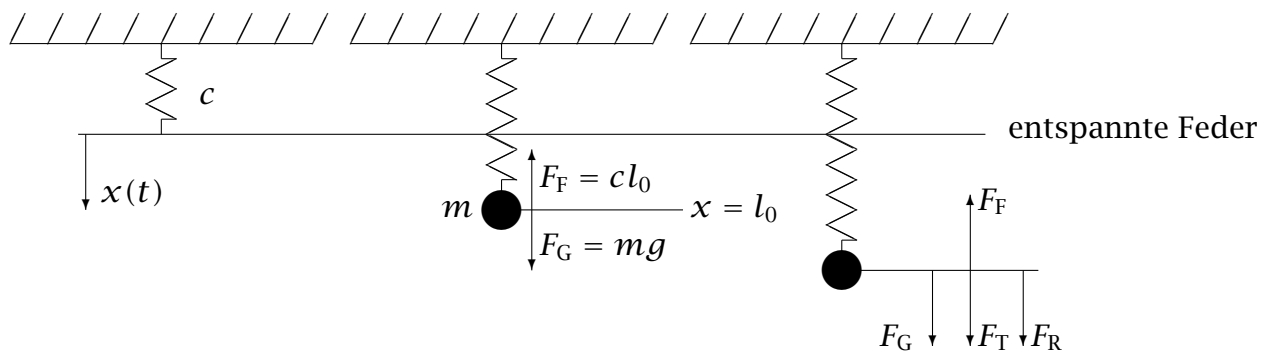
- **Verzögerte Bewegung nach unten, unterhalb von der Gleichgewichtslage  $x = l_0$**

$$x < 0, \dot{x} > 0, \ddot{x} > 0 \text{ und somit } \sum F: \quad bx + cx = -m\ddot{x} + mg$$



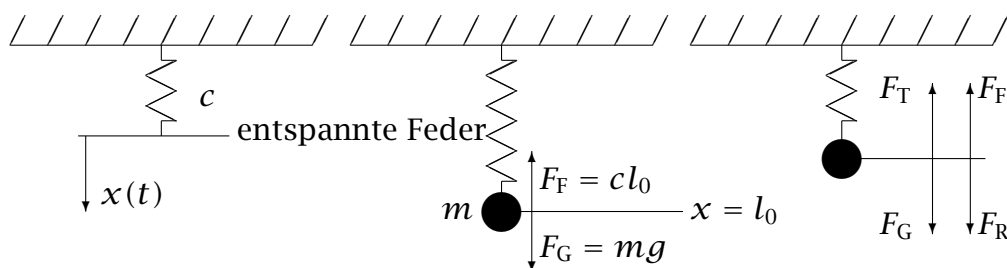
- **Verzögerte Bewegung nach oben, unterhalb von der Gleichgewichtslage  $x = l_0$**

$$x < 0, \dot{x} < 0, \ddot{x} > 0 \text{ und somit } \sum F: \quad cx = -m\ddot{x} - bx + mg$$



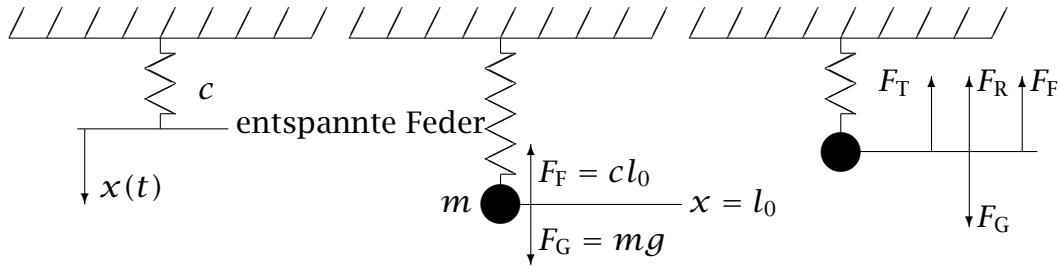
- **Verzögerte Bewegung nach oben, oberhalb von der Gleichgewichtslage  $x = l_0$**

$$x > 0, \dot{x} < 0, \ddot{x} > 0 \text{ und somit } \sum F: \quad mg - bx = m\ddot{x} + cx$$



- **Beschleunigte Bewegung nach unten, oberhalb von der Gleichgewichtslage  $x = l_0$**

$$x > 0, \dot{x} > 0, \ddot{x} > 0 \text{ und somit } \sum F: \quad mg = m\ddot{x} + bx + cx$$



Eine Schwingung, bei der noch zusätzlich zur Federrückstellkraft eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft  $\vec{F}_R = -R\vec{v}$  (mit  $R$ : Reibungskonstante) auftritt. Diese wirkt immer der Geschwindigkeit entgegen, deshalb das Minuszeichen.

Es gilt folgende Bewegungsdifferentialgleichung für eine gedämpfte harmonische Schwingung:

$$m\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + cx(t) = 0$$

Der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  und die Maximalamplitude  $\hat{x}$  bzw. die Konstanten  $A$  und  $B$  sind eindeutig von den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$  abhängig. Folgende Abkürzungen  $\delta = \frac{R}{2m}, \omega_0^2 = \frac{c}{m}, D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{mc}}$  werden verwendet. Wir unterscheiden folgende drei Fälle:

### 3.3.3. Schwingfall

$$\left(\frac{R}{2m}\right)^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\text{ged}} < \omega_0 \Rightarrow 0 < D < 1$$

Zwei konjugiert komplexe Lösungen des charakteristischen Polynoms:  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $\dot{x}(0) = v_0$ :

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t) + Be^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t) = \hat{x}e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)$$

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[ \frac{v_0 + \delta x_0}{\omega_{\text{ged}}} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t) + x_0 \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t) \right]$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\hat{x}e^{-\delta t} [\delta \cdot \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0) + \omega_{\text{ged}} \cdot \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)]$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \hat{x}e^{-\delta t} [(\delta^2 - \omega_{\text{ged}}^2) \cdot \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0) + 2\delta\omega_{\text{ged}} \cdot \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)]$$

Die Amplitude nimmt mit der Zeit exponentiell ab  $A(t) = \pm \hat{x}e^{-\delta t}$  und  $\omega_{\text{ged}}^2$  der gedämpften Schwingung ist gegenüber  $\omega_0^2$  der ungedämpften Schwingung um  $\delta^2 = \left(\frac{R}{2m}\right)^2$  verstimmt. Man definiert einen dimensionslosen Dämpfungsgrad  $D$  mit:

$$\omega_{\text{ged}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

$$T_{\text{ged}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - D^2}}$$

$$D = \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\text{ged}}}{\omega_0}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{T_0}{T_{\text{ged}}}\right)^2}$$

Das Verhältnis der Amplituden zwischen z. B. zwei aufeinanderfolgenden Maximalausschlägen, die auf derselben Seite (bezogen auf die Ruhelage) liegen, bezeichnet man als logarithmisches Dekrement:

$$\frac{A(t)}{A(t+nT_{\text{ged}})} = \frac{\hat{x}e^{-\delta t}}{\hat{x}e^{-\delta(t+nT_{\text{ged}})}} = \frac{\hat{x}e^{-\delta t}}{\hat{x}e^{-\delta t} \cdot e^{-\delta nT_{\text{ged}}}} = e^{\delta nT_{\text{ged}}} = e^{n\omega_0 D \frac{T_0}{\sqrt{1-D^2}}} = e^{n2\pi \frac{D}{\sqrt{1-D^2}}}$$

Ist  $D$  sehr klein, so kann man ohne großen Fehler  $T_{\text{ged}} \approx T_0$  setzen  $\Rightarrow \frac{A(t)}{A(t+nT_0)} = e^{\delta nT_0} = e^{n2\pi D}$

### 3.3.4. Aperiodischer Grenzfall

$$\left(\frac{R}{2m}\right)^2 = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_{\text{ged}} = 0 \Rightarrow D = 1$$

Eine doppelte negative reelle Lösung des charakteristischen Polynoms:  $\lambda_{1,2} = -\delta$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $v(0) = v_0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= (A + Bt)e^{-\delta t} \\ x(t) &= [x_0 + (v_0 + \delta x_0)t]e^{-\delta t} \\ v(t) &= x'(t) = [B(1 - \delta t) - \delta A]e^{-\delta t} \\ a(t) &= x''(t) = [B(\delta^2 t - 2\delta) + \delta^2 A]e^{-\delta t} \end{aligned}$$

Der Schwinger geht maximal einmal durch die Gleichgewichtslage und hat maximal eine waagrechte Tangente.

### 3.3.5. Kriechfall

$$\left(\frac{R}{2m}\right)^2 > \omega_0^2$$

die Kreisfrequenz  $\omega_{\text{ged}}$  ist imaginär  $\Rightarrow D > 1$

Zwei negative reelle Lösungen des charakteristischen Polynoms:  $\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung mit den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  und  $v(0) = v_0$ :

$$\begin{aligned} x(t) &= Ae^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + Be^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \\ x(t) &= \frac{1}{2} \left( x_0 + \frac{v_0 + \delta x_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + \frac{1}{2} \left( x_0 - \frac{v_0 + \delta x_0}{\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \right) e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \\ v(t) &= x'(t) = A \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B \left( -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right) e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \\ a(t) &= x''(t) = A \left( -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right)^2 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + B \left( -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \right)^2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \end{aligned}$$

Der Schwinger geht maximal einmal durch die Gleichgewichtslage und hat maximal eine waagrechte Tangente.

### 3.4. Erzwungene Schwingungen bei harmonischer Erregung

Eine Schwingung, bei der noch zusätzlich eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft  $\vec{F}_R = -R\vec{v}$  (mit  $R$ : Reibungskonstante) auftritt. Diese wirkt immer der Geschwindigkeit entgegen, deshalb das Minuszeichen. Die Schwingung wird mit der Erregerfrequenz  $\omega_E$  und der Erregeramplitude  $\hat{x}_E$  erzwungen.

Es gilt folgende Bewegungsdifferentialgleichungen für eine erzwungene harmonische Schwingung:

$$m\ddot{x}(t) + R\dot{x}(t) + cx(t) = \underbrace{c\hat{x}_E}_{\hat{F}_E} \cos(\omega_E \cdot t)$$

Der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  und die Amplitude  $\hat{x}$  sind eindeutig von den Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$  abhängig. Die Abkürzungen  $\delta = \frac{R}{2m}, \omega_0^2 = \frac{c}{m}, D = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{R}{2\sqrt{mc}}$  werden verwendet.

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\omega_E}{\omega_0}: && \text{Frequenzverhältnis} \\ D &= \frac{\delta}{\omega_0}: && \text{Dämpfungsgrad} \\ V &= \frac{\hat{x}}{\hat{x}_E}: && \text{Verstärkungsfaktor der Amplitude} \end{aligned}$$

Mit der Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen Erreger und Schwinger,  $\tan \phi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$  gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$x(t) = \underbrace{\hat{x}e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)}_{\text{exp. abklingender Teil}} + \underbrace{\frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \cos(\omega_E \cdot t - \phi)}_{\text{stationärer Teil}}$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \underbrace{-\hat{x}e^{-\delta t} [\delta \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0) + \omega_{\text{ged}} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)]}_{\text{exp. abklingender Teil}} - \underbrace{\frac{\hat{x}_E \omega_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin(\omega_E \cdot t - \phi)}_{\text{stationärer Teil}}$$

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \underbrace{\hat{x}e^{-\delta t} [(\delta^2 - \omega_{\text{ged}}^2) \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0) + 2\delta\omega_{\text{ged}} \sin(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)]}_{\text{exp. abklingender Teil}} - \underbrace{\frac{\hat{x}_E \omega_E^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \cos(\omega_E \cdot t - \phi)}_{\text{stationärer Teil}}$$

#### 3.4.1. Allgemeiner Fall mit Dämpfung

$$\delta > 0 \Leftrightarrow D > 0$$

Die Resonanzkreisfrequenz im gedämpften Fall liegt bei

$$\omega_E = \omega_{\text{res}} = \sqrt{\omega_{\text{ged}}^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2} \text{ oder } \eta = \sqrt{1 - 2D^2} < 1$$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$x(t) = \underbrace{\hat{x}e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)}_{\text{exp. abklingender Teil}} + \underbrace{\frac{\hat{x}_E}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} ((1 - \eta^2) \cos(\omega_E \cdot t) + 2D\eta \sin(\omega_E \cdot t))}_{\text{stationärer Teil}}$$

Mit der Phasenverschiebung  $\phi$  zwischen Erreger und Schwinger,  $\tan \phi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2}$ :

$$x(t) = \underbrace{\hat{x}e^{-\delta t} \cos(\omega_{\text{ged}} \cdot t + \varphi_0)}_{\text{exp. abklingender Teil}} + \underbrace{\frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \cos(\omega_E \cdot t - \phi)}_{\text{stationärer Teil}}$$

Einschwingen, bis der exponentiell abnehmende Teil der Lösung keine Rolle mehr spielt und dann stationäres Schwingen mit veränderter Amplitude.

**Der Verstärkungsfaktor  $V$  ergibt sich zu:**

- **Frequenzen außer der Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega_E \neq \omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2} \text{ oder } \eta \neq \sqrt{1 - 2D^2}$$

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

- **Bei der Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega_E = \omega_{\text{res}} = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2} \text{ oder } \eta_{\text{res}} = \sqrt{1 - 2D^2} < 1$$

$$V(\eta_{\text{res}}) = V_{\text{max}} = \frac{1}{2D\sqrt{1 - D^2}}$$

**Diskussion des Verstärkungsfaktors:**

- **Verhalten an den Rändern:**

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} V(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} = 1$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) gehen durch (0/1)

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} V(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} = 0$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) nähern sich für sehr große  $\eta$  der  $\eta$ -Achse

- **Steigung an den Rändern:**

$$\frac{dV}{d\eta} = -2 \frac{\eta(\eta^2 - (1 - 2D^2))}{\sqrt{((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2)^3}}$$

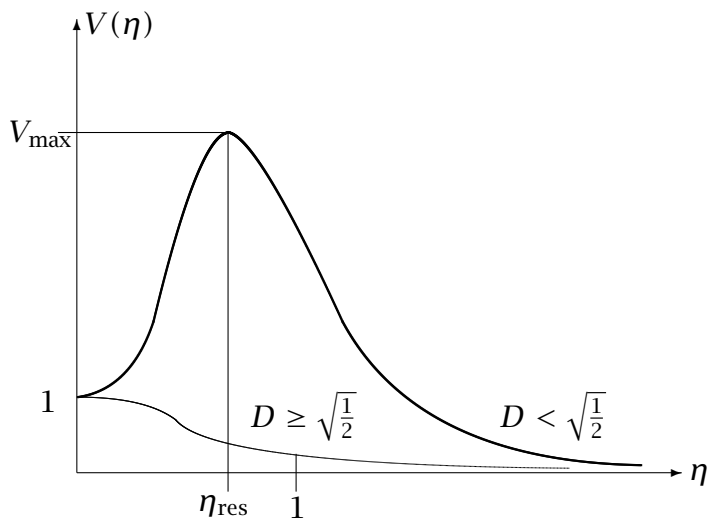
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{dV}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} -2 \frac{\eta(\eta^2 - (1 - 2D^2))}{\sqrt{((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2)^3}} = 0$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) beginnen im Punkt (0/1) mit einer waagrechten Tangente

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{dV}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} -2 \frac{\eta(\eta^2 - (1 - 2D^2))}{\sqrt{((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2)^3}} = 0$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) werden für sehr große  $\eta$  waagrecht

## Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors $V(\eta)$ vom Kreisfrequenzverhältnis $\eta$



Nicht für alle Dämpfungsgrade  $D > 0$  bildet sich ein Maximum der Verstärkung aus - ist das System also resonanzfähig.

Für die Verstärkung gilt:

$$V(\eta) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Das System ist nur dann resonanzfähig, wenn sich ein Maximum der stationären Amplitude, somit auch für  $V$  ausbildet, d. h. wenn gilt:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\eta} &= 0 \wedge \frac{d^2V}{d\eta^2} < 0 \\ \frac{dV}{d\eta} &= -2 \frac{\eta(\eta^2 - (1 - 2D^2))}{\sqrt{((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2)^3}} = 0 \end{aligned}$$

Für  $\eta > 0$  ergibt sich genau eine Lösung, die dann ein globales Maximum ausbildet - (auf die hinreichende Bedingung  $\frac{d^2V}{d\eta^2} < 0$  sei hier verzichtet).

(Auf  $\eta_1 = 0$  - ebenfalls ein Punkt mit waagrechter Tangente, jedoch ein lokales Minimum, wird nicht näher eingegangen.)

$$\eta_{2,3} = \pm \sqrt{1 - 2D^2}$$

Die negative Lösung  $\eta_3$  macht physikalisch keinen Sinn.

Also bleibt noch die eine Lösung übrig.

Diese, sogenannte Amplitudenresonanzkreisfrequenz  $\eta_2 = \sqrt{1 - 2D^2} = \eta_{\text{res}} < 1$  existiert nur, wenn der Radikand positiv ist, also wenn gilt:

$$1 - 2D^2 > 0$$

Mit  $D > 0$  folgt somit:

$$0 < D < \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Ansonsten, also für  $D \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$ , schwächt die stationäre Amplitude ab. Man spricht dann von Überdämpfung.

**Die Phasenverschiebung  $\phi$  ergibt sich zu:**

- **Frequenzen kleiner der Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung**

$$0 \leq \omega_E < \omega_0 \text{ oder } 0 \leq \eta < 1$$

$$\phi = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

$$0 \leq \phi < \frac{\pi}{2}$$

- **Frequenzen größer der Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung**

$$\omega_E > \omega_0 \text{ oder } \eta > 1$$

$$\phi = \pi + \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}$$

$$\frac{\pi}{2} < \phi < \pi$$

- **Bei der Eigenkreisfrequenz der ungedämpften Schwingung**

$$\omega_E = \omega_0 \text{ oder } \eta = 1$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

**Diskussion der Phasenverschiebung:**

- **Verhalten an den Rändern:**

$$\phi = \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} \quad (+\pi)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} = 0$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) gehen durch  $(0/0)$

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 1^-} \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2} = \lim_{\eta \rightarrow 1^+} (\pi + \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}) = \frac{\pi}{2}$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) gehen durch den Punkt  $(1/\frac{\pi}{2})$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \phi(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\pi + \arctan \frac{2D\eta}{1 - \eta^2}) = \pi$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) nähern sich für sehr große  $\eta$  der Phase  $\pi$

- **Steigung an den Rändern:**

$$\frac{d\phi}{d\eta} = 2D \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d\phi}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} 2D \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} = 2D$$

Alle Kurven beginnen im Punkt (0/0) mit einer dämpfungsgradabhängigen Steigung  $2D$

Je größer  $D$  umso steiler beginnt die Kurve

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{d\phi}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 1} 2D \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} = \frac{1}{D}$$

Alle Kurven haben im Punkt  $(1/\frac{\pi}{2})$  eine dämpfungsgradabhängige Steigung  $\frac{1}{D}$

Je größer  $D$  umso flacher die Kurve in  $(1/\frac{\pi}{2})$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{d\phi}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} 2D \frac{1 + \eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2} = 0$$

Alle Kurven (unabhängig von  $D$ ) werden für sehr große  $\eta$  waagrecht

• **Untersuchung auf die Wendepunkte:**

$$\frac{d^2\phi}{d\eta^2} = -2D \frac{\eta(\eta^4 + 2\eta^2 + 4D^2 - 3)}{[(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2]^2} = 0$$

Ein Bruch ist Null, wenn der Zähler Null ist.

Es existiert immer ein Wendepunkt bei  $\eta_1 = 0$

Für die Existenz weiterer Wendepunkte muß gelten:

$$\eta^4 + 2\eta^2 + 4D^2 - 3 = 0$$

Dies ist eine biquadratische Gleichung, die mit der Substitution  $z = \eta^2$  zu lösen ist.

$$z^2 + 2z + 4D^2 - 3 = 0$$

$$z_{1,2} = -1 \pm 2 \underbrace{\sqrt{1 - D^2}}_{<1}$$

Diese existieren nur für  $0 \leq D \leq 1$  (Für  $D > 1$  gibt es nur einen Wendepunkt bei  $\eta_1 = 0$ )

Die negative Lösung  $z_2$  macht keinen Sinn, da nur positive Lösungen zurücks substituiert werden können.

$$z_1 = -1 + 2\sqrt{1 - D^2}$$

Dieser Wert ist nur positiv, also  $z_1 \geq 0$

$$-1 + 2\sqrt{1 - D^2} \geq 0 \Leftrightarrow D^2 \leq \frac{3}{4}$$

also für  $0 \leq D \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Wäre  $D > \frac{\sqrt{3}}{2}$ , so wäre  $z_1 < 0$  und lieferte keinen weiteren Wendepunkt

Damit gilt nach der Rücksubstitution  $\eta^2 = z_1$ :

$$\eta_{2,3} = \pm \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - D^2}}$$

Negative  $\eta$ -Werte sind nicht sinnvoll, also ergibt sich nur ein weiterer Wendepunkt bei

$$\eta_2 = \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - D^2}} < 1$$

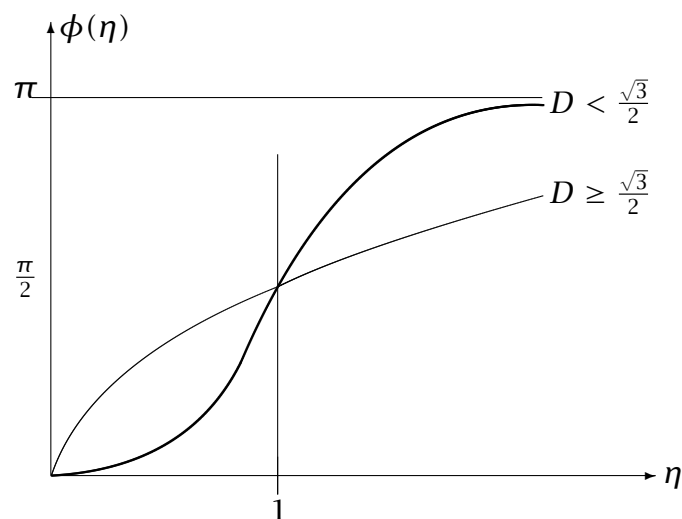
Dieser liegt links von  $\eta = 1$ , könnte aber auch noch mit  $\eta_1 = 0$  zusammenfallen.

Dies passiert für  $\eta_2 = \eta_1 = 0 \Rightarrow D = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Zusammenfassend gilt also:

- Die Funktion besitzt **zwei Wendepunkte** bei  $\eta_1 = 0$  und  $\eta_2 = \sqrt{-1 + 2\sqrt{1 - D^2}} < 1$ ,  
wenn  $0 < D < \frac{\sqrt{3}}{2}$
- Sie besitzt nur **einen Wendepunkt** bei  $\eta_1 = 0$ ,  
wenn  $D \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

### Abhängigkeit der Phasenverschiebung $\phi(\eta)$ vom Kreisfrequenzverhältnis $\eta$



#### 3.4.2. Dämpfungsfrei

$$\delta = 0 \Leftrightarrow D = 0$$

Die Resonanzkreisfrequenz im ungedämpften Fall liegt bei  $\omega_{\text{res}} = \omega_0$   
(Resonanzkatastrophe)

#### • Frequenzen außer der Resonanzkreisfrequenz

$$\omega_E \neq \omega_{\text{res}} = \omega_0 \text{ oder } \eta \neq 1$$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + \frac{1}{|1 - \eta^2|} \hat{x}_E \cos(\omega_E \cdot t)$$

Es stellt sich ein Schwingen mit veränderter Amplitude ein.

Der Verstärkungsfaktor ergibt sich zu:

$$V(\eta) = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \text{ für } \omega_E \neq \omega_{\text{res}} = \omega_0 \text{ oder } \eta \neq 1$$

• **Bei der Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega_E = \omega_{\text{res}} = \omega_0 \text{ oder } \eta_{\text{res}} = 1$$

Es gilt folgende Bewegungsgleichung:

$$x(t) = \hat{x} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) + \underbrace{\frac{\omega_0}{2} t \hat{x}_E \sin(\omega_0 \cdot t)}_{\text{Aufschaukler}}$$

Lineares Aufschaukeln der Amplitude bis zur Resonanzkatastrophe im Idealfall.

Der Verstärkungsfaktor ergibt sich zu:

$$V(\eta_{\text{res}}) = \lim_{\eta \rightarrow 1} V(\eta) = V_{\text{max}} \rightarrow \infty \text{ für } \omega_E = \omega_{\text{res}} = \omega_0 \text{ oder } \eta_{\text{res}} = 1$$

**Diskussion des Verstärkungsfaktors:**

• **Verhalten an den Rändern:**

$$V(\eta) = \frac{1}{|1 - \eta^2|}$$
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} V(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{|1 - \eta^2|} = 1$$

Die Kurve geht durch (0/1)

$$\lim_{\eta \rightarrow 1} V(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{1}{|1 - \eta^2|} \rightarrow +\infty$$

Die Kurve hat eine senkrechte Asymptote (Pol ohne Vorzeichenwechsel) bei  $\eta = 1$

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} V(\eta) = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{|1 - \eta^2|} = 0$$

Die Kurve nähert sich für sehr große  $\eta$  der  $\eta$ -Achse

• **Steigung an den Rändern:**

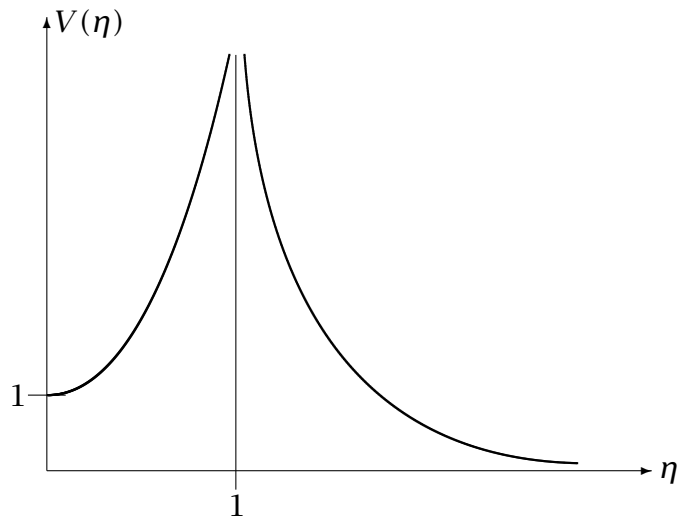
$$\frac{dV}{d\eta} = \frac{2\eta(1 - \eta^2)}{|1 - \eta^2|^3}$$
$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{dV}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{2\eta(1 - \eta^2)}{|1 - \eta^2|^3} = 0$$

Die Kurve beginnt im Punkt (0/1) mit einer waagrechten Tangente

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{dV}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{2\eta(1 - \eta^2)}{|1 - \eta^2|^3} = 0$$

Die Kurve wird für sehr große  $\eta$  waagrecht

## Abhängigkeit des Verstärkungsfaktors $V(\eta)$ vom Kreisfrequenzverhältnis $\eta$



Die Phasenverschiebung  $\phi$  ergibt sich zu:

- **Frequenzen kleiner der Resonanzkreisfrequenz**

$$0 \leq \omega_E < \omega_0 \text{ oder } 0 \leq \eta < 1$$

$$\phi = 0$$

- **Frequenzen größer der Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega_E > \omega_0 \text{ oder } \eta > 1$$

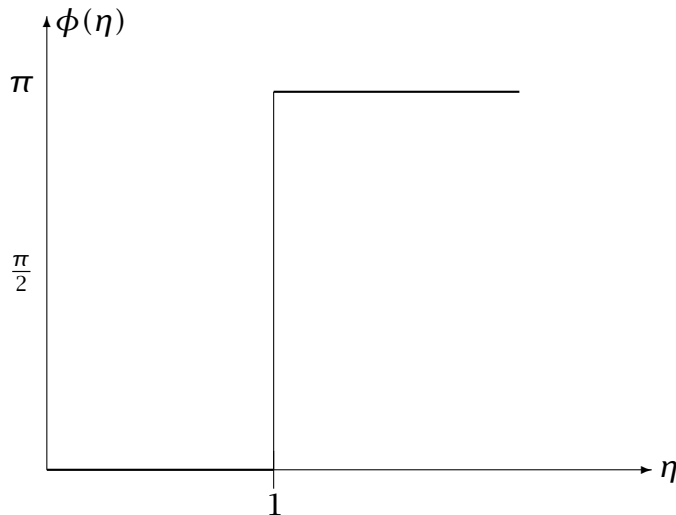
$$\phi = \pi$$

- **Bei der Resonanzkreisfrequenz**

$$\omega_E = \omega_0 \text{ oder } \eta = 1$$

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

## Abhängigkeit der Phasenverschiebung $\phi(\eta)$ vom Kreisfrequenzverhältnis $\eta$



### 3.4.3. Mittlere Leistung bei einer erzwungenen harmonischen Schwingung

Die Energie, die im stationären Zustand (nach Abklingen des Einschwingvorgangs) auf ein schwingungsfähiges System durch eine Zwangskraft übertragen wird, berechnet sich wie folgt:

$$dW(t) = F_E(t)dx = F_E(t) \cdot x_{\text{stat}}(t)dt$$

Wie in den vorigen Kapiteln erörtert wurde, ist:

$$F_E(t) = \hat{F}_E \cos(\omega_E \cdot t)$$

$$x_{\text{stat}}(t) = \frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \cos(\omega_E \cdot t - \phi)$$

$$x_{\text{stat}}(t) = -\omega_E \frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin(\omega_E \cdot t - \phi)$$

Hierbei ist  $\frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$  die Amplitudenfunktion und  $\phi$  ist die Phasenverschiebung zwischen Erreger und System.

Mit einigen trigonometrischen Umformungen erhält man

$$\tan \phi = \frac{2D\eta}{1-\eta^2} \Rightarrow \sin \phi = \frac{\tan \phi}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Die momentane, zeitabhängige Leistung ist definiert als

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = F_E(t) \cdot x_{\text{stat}}(t)$$

$$P(t) = \hat{F}_E \cos(\omega_E \cdot t) \cdot \left[ -\omega_E \frac{\hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin(\omega_E \cdot t - \phi) \right]$$

$$P(t) = -\frac{\hat{F}_E \omega_E \hat{x}_E}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin(\omega_E \cdot t - \phi) \cdot \cos(\omega_E \cdot t)$$

Weitere trigonometrische Umformungen ergeben

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2} \sin(x - y) + \frac{1}{2} \sin(x + y) \text{ und } \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

Angewandt

$$\sin(\omega_E \cdot t - \phi) \cdot \cos(\omega_E \cdot t) = \frac{1}{2} \sin(-\phi) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_E \cdot t - \phi) = -\frac{1}{2} \sin \phi + \frac{1}{2} \sin(2\omega_E \cdot t - \phi)$$

somit

$$\frac{1}{2} \sin(2\omega_E \cdot t - \phi) = \frac{1}{2} \cos \phi \cdot \sin(2\omega_E \cdot t) - \frac{1}{2} \sin \phi \cdot \cos(2\omega_E \cdot t)$$

Es folgt

$$P(t) = -\frac{\hat{F}_E \omega_E \hat{x}_E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \left[ \frac{1}{2} \cos \phi \cdot \sin(2\omega_E \cdot t) - \frac{1}{2} \sin \phi \cdot \cos(2\omega_E \cdot t) - \frac{1}{2} \sin \phi \right]$$

Gemittelt über eine Periode verschwinden die zeitabhängigen trigonometrischen Funktionen

$$\cos(2\omega_E \cdot t) \text{ und } \sin(2\omega_E \cdot t)$$

Übrig bleibt als mittlere Leistung  $\bar{P}$ :

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{\hat{F}_E \omega_E \hat{x}_E}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} \sin \phi$$

Wird die bekannte Beziehung für den Phasenwinkel eingesetzt

$$\sin \phi = \frac{2D\eta}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

das Kreisfrequenzverhältnis umgeschrieben

$$\omega_E = \eta \omega_0$$

die Amplitude der Erregerschwingung über das Hookesche Gesetz umgeschrieben

$$\hat{x}_E = \frac{\hat{F}_E}{c}$$

und der bekannte Zusammenhang zwischen Federkonstante, Masse und Eigenkreisfrequenz einer freien Schwingung eingesetzt

$$c = m\omega_0^2$$

so ergibt sich letztlich die Abhängigkeit der mittleren Leistung zu:

$$\bar{P}(\eta) = \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{D\eta^2}{(1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2}$$

Ableiten der mittleren Leistung nach  $\eta$  liefert:

$$\frac{d\bar{P}}{d\eta} = \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{2D\eta(1 - \eta^4)}{((1 - \eta^2)^2 + (2D\eta)^2)^2}$$

Mit  $\eta > 0$  erhält man die Extremstellen (Maxima und Minima):

$$\frac{d\bar{P}}{d\eta} = 0 \Rightarrow 2D\eta(1 - \eta^4) = 0 \Rightarrow (\eta_1 = 0), \eta_{\text{res,E}} = 1, (\eta_3 = -1)$$

- Die aufgenommene Leistung zeigt ein Maximum (auf die hinreichende Bedingung  $\frac{d^2\bar{P}}{d\eta^2} < 0$  sei hier verzichtet) - unabhängig von der Dämpfung  $D$  bei  $\eta_{\text{res,E}} = 1$ , also  $\omega_E = \omega_0$  - bei sogenannter **Energieresonanz**. Mit anderen Worten wird bei  $\omega_E = \omega_0$  die meiste Energie übertragen.

Die aufgenommene mittlere Leistung  $\bar{P}_{\text{res,E}}$  bei Energieresonanz, also bei  $\eta = \eta_{\text{res,E}} = 1$ , ist maximal und hängt wie folgt vom Dämpfungsgrad  $D$  ab:

$$\bar{P}_{\text{res,E}} = \bar{P}(\eta = \eta_{\text{res,E}} = 1) = \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{4D} = \bar{P}_{\text{max}}$$

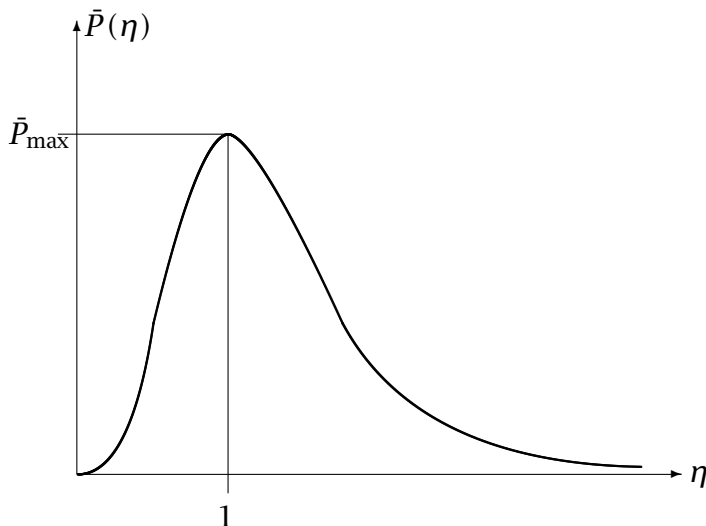
- Möchte man jedoch die aufgenommene mittlere Leistung bei Amplitudenresonanz, also bei

$$\eta = \eta_{\text{res,A}} = \sqrt{1 - 2D^2} \leq 1$$

berechnen, so ist die übertragene Energie etwas geringer und hängt folgendermaßen vom Dämpfungsgrad  $D$  ab:

$$\bar{P}_{\text{res,A}} = \bar{P}(\eta = \eta_{\text{res,A}} = \sqrt{1 - 2D^2}) = \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{4D} \cdot \frac{1 - 2D^2}{1 - D^2} = \frac{1 - 2D^2}{1 - D^2} \cdot \bar{P}_{\text{max}} \leq \bar{P}_{\text{max}}$$

### Abhängigkeit der mittleren Leistung $\bar{P}(\eta)$ vom Kreisfrequenzverhältnis $\eta$



Die Abhängigkeit der aufgenommenen mittleren Resonanzleistung vom Dämpfungsgrad

- Je größer die Dämpfung  $D$  ist, umso tiefer liegt das Maximum bei Resonanz. Im Grenzfall sehr großer Dämpfung  $D \rightarrow +\infty$  geht die mittlere Leistung bei Energieresonanz und bei Amplitudenresonanz gegen Null. Es gilt:

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \bar{P}_{\text{res,E}} = \lim_{D \rightarrow +\infty} \left( \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{4D} \right) = 0$$

$$\lim_{D \rightarrow +\infty} \bar{P}_{\text{res,A}} = \lim_{D \rightarrow +\infty} \left( \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{4D} \cdot \frac{1 - 2D^2}{1 - D^2} \right) = 0$$

- Bei (sehr) schwacher Dämpfung  $D \rightarrow 0$  ist jedoch  $\eta_{\text{res,A}} = \sqrt{1 - 2D^2} \approx \eta_{\text{res,E}} = 1$  und somit liegen Amplitudenresonanz und Energieresonanz bei derselben Kreisfrequenz  $\omega_0$ .

Ist das System gänzlich dämpfungsfrei (Idealfall), so entartet das Maximum zu einem Pol (senkrechte Asymptote) und die mittlere Leistung würde bei Resonanz unendlich groß werden.

Dies wäre wieder die Resonanzkatastrophe.

Es gilt:

$$\lim_{D \rightarrow 0} \bar{P}_{\text{res,E}} = \lim_{D \rightarrow 0} \left( \frac{\hat{F}_E^2}{m\omega_0} \cdot \frac{1}{4D} \right) \rightarrow +\infty$$

### 3.5. Mathematisches Pendel

Beim Pendel für kleine Auslenkungen:  $\sin \varphi \approx \varphi$

- $l$ : Länge des Pendels (Abstand Aufhängepunkt - Schwerpunkt)
- $g$ : Fallbeschleunigung
- $m$ : Schwingende Masse
- $\varphi$ : Auslenkungswinkel

Es gilt für die Periodendauer:  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

Es gelten folgende Bewegungsgleichungen mit linearer Näherung für eine Schwingung:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \hat{\varphi} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \\ \omega(t) &= \varphi(t) = \underbrace{\hat{\varphi} \omega_0}_{\hat{\omega}} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \\ \alpha(t) &= \omega(t) = \varphi(t) = \underbrace{-\hat{\varphi} \omega_0^2}_{\hat{\alpha}} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0) \end{aligned}$$

Der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  und die Amplitude  $\hat{\varphi}$  sind eindeutig von den Anfangsbedingungen  $\varphi(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$  abhängig.

Spezielle Ansätze:

- Startet der Körper vom rechten Umkehrpunkt:

$$\varphi(0) = +\hat{\varphi} \wedge \dot{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = +\hat{\varphi} \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Startet der Körper vom linken Umkehrpunkt:

$$\varphi(0) = -\hat{\varphi} \wedge \dot{\varphi}(0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = -\hat{\varphi} \cos(\omega_0 \cdot t)$$

- Startet der Körper aus der Gleichgewichtslage mit nach rechts:

$$\varphi(0) = 0 \wedge \dot{\varphi}(0) = +\hat{\omega} \Rightarrow \varphi(t) = \hat{\varphi} \sin(\omega_0 \cdot t)$$

- Startet der Körper aus der Gleichgewichtslage mit nach links:

$$\varphi(0) = 0 \wedge \dot{\varphi}(0) = -\hat{\omega} \Rightarrow \varphi(t) = -\hat{\varphi} \sin(\omega_0 \cdot t)$$

### 3.6. Physikalisches Pendel

Beim Pendel für kleine Auslenkungen:  $\sin \varphi \approx \varphi$

$s$ : Abstand Aufhängepunkt - Gesamtschwerpunkt

$g$ : Fallbeschleunigung

$J_A$ : Trägheitsmoment bezogen auf den Aufhängepunkt

$m$ : Schwingende Masse

$T_0$ : Periodendauer

$\varphi$ : Auslenkungswinkel

Es gilt für die Periodendauer:  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_A}{mgs}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgs}{J_A}}$

Es gelten folgende Bewegungsgleichungen mit linearer Näherung für eine Schwingung:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \underbrace{\hat{\varphi} \omega_0}_{\hat{\omega}} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t) = \underbrace{-\hat{\varphi} \omega_0^2}_{\hat{\alpha}} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  und die Amplitude  $\hat{\varphi}$  sind eindeutig von den Anfangsbedingungen  $\varphi(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$  abhängig.

Spezielle Ansätze: Siehe Mathematisches Pendel

### 3.7. Freie harmonische Drehschwingungen

$c^*$ : Winkelrichtgröße (Direktionsmoment oder Drehfederkonstante)

Die Winkelrichtgröße ist das Verhältnis des wirksamen Drehmoments zum Drehwinkel:

$$c^* = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi}$$

$J$ : Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse

$\varphi$ : Auslenkungswinkel

Es gilt für die Periodendauer:  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c^*}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c^*}{J}}$

Es gilt folgende Bewegungsdifferentialgleichung für eine freie harmonische Drehschwingung:

$$J\ddot{\varphi}(t) + c^*\varphi(t) = 0$$

Lösung ist analog zur freien harmonischen Schwingung.

Zwei konjugiert komplexe rein imaginäre Lösungen des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$$

Es gelten folgende Bewegungsgleichungen:

$$\varphi(t) = \hat{\varphi} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \underbrace{\hat{\varphi} \omega_0}_{\hat{\omega}} \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

$$\alpha(t) = \ddot{\varphi}(t) = \underbrace{-\hat{\varphi} \omega_0^2}_{\hat{\alpha}} \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi_0)$$

Der Nullphasenwinkel  $\varphi_0$  und die Amplitude  $\hat{\varphi}$  sind eindeutig von den Anfangsbedingungen  $\varphi(0)$ ,  $\dot{\varphi}(0)$  abhängig.

Spezielle Ansätze: Siehe Mathematisches Pendel

### 3.8. Freie gedämpfte harmonische Drehschwingungen

$c^*$ : Winkelrichtgröße (Direktionsmoment oder Drehfederkonstante)

Die Winkelrichtgröße ist das Verhältnis des wirksamen Drehmoments zum Drehwinkel:

$$c^* = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi}$$

$J$ : Trägheitsmoment bezüglich der Drehachse

$L$ : Abstand der Reibungskraftwirkung zur Drehachse

$R$ : Reibungskonstante

$\varphi$ : Auslenkungswinkel

Eine Schwingung, bei der noch zusätzlich zum Direktionsmoment  $c^*$  eine zur Geschwindigkeit proportionale Reibungskraft  $\vec{F}_R = -R\vec{v}$  im Abstand  $L$  zur Drehachse (mit  $R$ : Reibungskonstante) auftritt. Diese wirkt immer der Geschwindigkeit entgegen, deshalb das Minuszeichen.

Es gilt folgende Bewegungsdifferentialgleichung für eine gedämpfte harmonische Drehschwingung

$$J\ddot{\varphi}(t) + RL^2\dot{\varphi}(t) + c^*\varphi(t) = 0$$

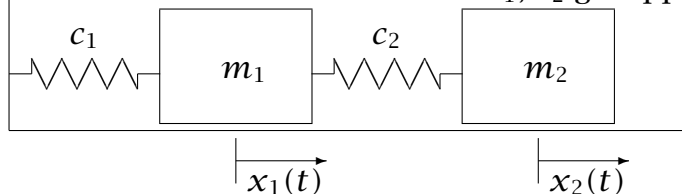
Die Lösungen sind analog zur gedämpften harmonischen Schwingung, mit:

$$\delta = \frac{RL^2}{2J} \text{ und } \omega_0^2 = \frac{c^*}{J}, \text{ somit wird } \omega_{\text{ged}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

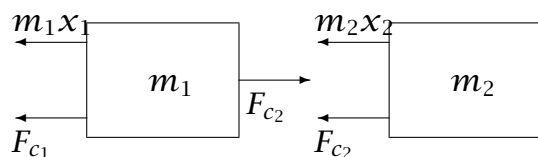
## 4. Beispiele für gekoppelte harmonische Schwingungen

### 4.1. Gekoppelte Schwingungen zweier Massen ohne Schwerkräfteinfluß

Hierbei handelt es sich um ein Zweikörperproblem mit zwei Massen  $m_1, m_2$ , die an zwei Federn mit den Federkonstanten  $c_1, c_2$  gekoppelt sind.



Freischneiden:



$$F_{c_1} = c_1 x_1$$

$$F_{c_2} = c_2 (x_2 - x_1)$$

Das dynamische Kräftegleichgewicht liefert:

$$m_1 \ddot{x}_1 + F_{c_1} - F_{c_2} = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + F_{c_2} = 0$$

Die Differentialgleichungen sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} m_1 x_1 + c_1 x_1 - c_2(x_2 - x_1) &= 0 & m_1 x_1 + (c_1 + c_2)x_1 - c_2 x_2 &= 0 \\ m_2 x_2 + c_2(x_2 - x_1) &= 0 & m_2 x_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir führen ein:

Den Vektor  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  Die Massenmatrix  $\underline{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$  Die Steifigkeitsmatrix  $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$

Somit erhalten wir für die beiden Differentialgleichungen folgendes homogenes lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\underline{M}\vec{x}(t) + \underline{c}\vec{x}(t) = \vec{0}$$

Folgender Ansatz führt zum Ziel:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \hat{x}e^{i\omega t} \\ \dot{\vec{x}}(t) &= i\omega\hat{x}e^{i\omega t} \\ \ddot{\vec{x}}(t) &= -\omega^2\hat{x}e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Eingesetzt liefert das:

$$\underbrace{(-\omega^2 \cdot \underline{M} + \underline{c})}_{\underline{A}} \hat{x} = \vec{0}$$

Bedingung für nicht-triviale Lösung:

Die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$  muss verschwinden.

$$\det \underline{A} = 0$$

Ausgeschrieben ergibt dies folgende quadratische Gleichung in  $\omega^2$ :

$$m_1 m_2 (\omega^2)^2 - (m_1 c_2 + m_2 (c_1 + c_2)) \omega^2 + c_1 c_2 = 0$$

Der Einfachheit halber wählen wir nun  $m_1 = m_2 = m$  und  $c_1 = c_2 = c$

Hiermit erhalten wir folgende Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$ :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2c - m\omega^2 & -c \\ -c & c - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

Die quadratische Gleichung in  $\omega^2$  vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned} m^2 (\omega^2)^2 - 3mc\omega^2 + c^2 &= 0 \omega_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \end{aligned}$$

Der Eigenvektor  $\vec{v}_1$  zu  $\omega_1^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2c - m\omega_1^2 & -c \\ -c & c - m\omega_1^2 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}c \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 > 0 \\ 1 - \sqrt{5} < 0 \end{pmatrix} \text{ gegenphasig} \end{aligned}$$

Der Eigenvektor  $\vec{v}_2$  zu  $\omega_2^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \frac{c}{m}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2c - m\omega_2^2 & -c \\ -c & c - m\omega_2^2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{1}{2}c \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 > 0 \\ 1 + \sqrt{5} > 0 \end{pmatrix} \text{ gleichphasig}$$

Hiermit ergibt sich die Lösung:

$$\vec{x}(t) = A_1 \vec{v}_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A_2 \vec{v}_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \cdot t + \varphi_1 \right]$$

$$+ A_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \cdot t + \varphi_2 \right]$$

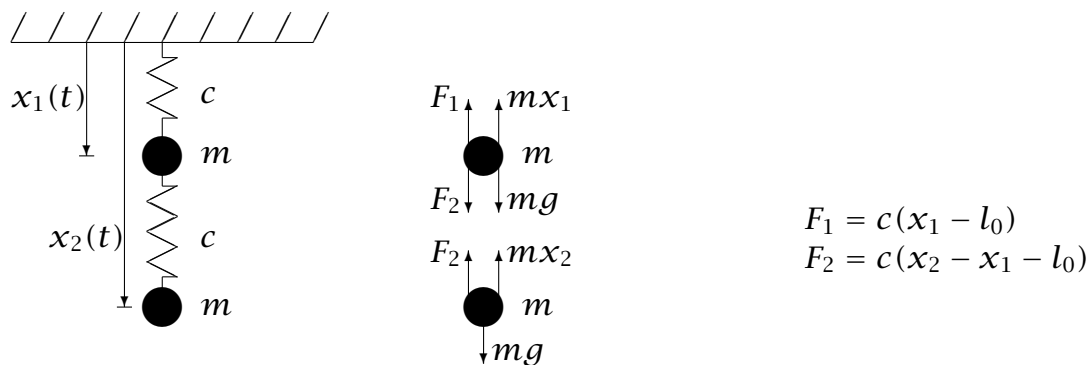
Die vier Konstanten  $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen der beiden Körper:

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$$

## 4.2. Gekoppelte Schwingungen zweier Massen mit Schwerkräfteinfluß

Hierbei handelt es sich um ein Zweikörperproblem mit zwei gleichen Massen  $m$ , die an zwei Federn mit den Federkonstanten  $c$  und den Ruhelängen  $l_0$  im Schwerfeld gekoppelt sind.

Freischneiden:



Das dynamische Kräftegleichgewicht liefert:

$$mx_1 + F_1 - F_2 - mg = 0$$

$$mx_2 + F_2 - mg = 0$$

Die Differentialgleichungen sehen folgendermaßen aus:

$$mx_1 + c(x_1 - l_0) - c(x_2 - x_1 - l_0) - mg = 0 \quad mx_1 + 2cx_1 - cx_2 = mg$$

$$mx_2 + c(x_2 - x_1 - l_0) - mg = 0 \quad mx_2 - cx_1 + cx_2 = mg + cl_0$$

Wir führen ein:

|                                                               |                                                                |                                                                   |                                                           |
|---------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| Den Vektor                                                    | Die Massenmatrix                                               | Steifigkeitsmatrix                                                | Die Inhomogenität                                         |
| $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ | $\underline{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ | $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$ | $\vec{a} = \begin{pmatrix} mg \\ mg + cl_0 \end{pmatrix}$ |

Somit erhalten wir für die beiden Differentialgleichungen folgendes inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\underline{M}\vec{x}(t) + \underline{c}\vec{x}(t) = \vec{a}$$

Folgender Ansatz führt zur Lösung des zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}\vec{x}_{\text{hom}}(t) &= \hat{x}e^{i\omega t} \\ \dot{\vec{x}}_{\text{hom}}(t) &= i\omega\hat{x}e^{i\omega t} \\ \ddot{\vec{x}}_{\text{hom}}(t) &= -\omega^2\hat{x}e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Eingesetzt liefert das:

$$\underbrace{(-\omega^2 \cdot \underline{M} + \underline{c})}_{\underline{A}} \hat{x} = \vec{0}$$

Bedingung für nicht-triviale Lösung:

Die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$  muß verschwinden.

$$\det \underline{A} = 0$$

Hiermit erhalten wir folgende Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$ :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 2c - m\omega^2 & -c \\ -c & c - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

Die quadratische Gleichung in  $\omega^2$  lautet:

$$\begin{aligned}m^2(\omega^2)^2 - 3mc\omega^2 + c^2 &= 0 \Rightarrow \omega_{1,2}^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m} \\ \omega_1 &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}}\end{aligned}$$

Der Eigenvektor  $\vec{v}_1$  zu  $\omega_1^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2c - m\omega_1^2 & -c \\ -c & c - m\omega_1^2 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}c \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 > 0 \\ 1 - \sqrt{5} < 0 \end{pmatrix} \text{ gegenphasig}\end{aligned}$$

Der Eigenvektor  $\vec{v}_2$  zu  $\omega_2^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \frac{c}{m}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2c - m\omega_2^2 & -c \\ -c & c - m\omega_2^2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} &\Leftrightarrow \frac{1}{2}c \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} & -2 \\ -2 & -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 > 0 \\ 1 + \sqrt{5} > 0 \end{pmatrix} \text{ gleichphasig}\end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich die homogene Lösung:

$$\vec{x}_{\text{hom}}(t) = A_1 \vec{v}_1 \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A_2 \vec{v}_2 \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

$$\vec{x}_{\text{hom}}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \cdot t + \varphi_1 \right] \\ + A_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \cdot t + \varphi_2 \right]$$

Die vier Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen der beiden Körper:

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$$

Für die spezielle Lösung macht man den Ansatz:

$$\vec{x}_{\text{spez}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{x}}_{\text{spez}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eingesetzt in das inhomogene lineare Differentialgleichungssystem folgt:

$$\underline{c} \vec{x}_{\text{spez}} = \vec{a}$$

$$\vec{x}_{\text{spez}} = \underline{c}^{-1} \vec{a}$$

$$\text{Mit } \underline{c}^{-1} = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{x}_{\text{spez}} = \begin{pmatrix} \frac{2mg}{c} + l_0 \\ \frac{3mg}{c} + 2l_0 \end{pmatrix}$$

Die spezielle Lösung entspricht der statischen Auslenkung der Massen. Die Lösung beschreibt die Schwingung um diese statische Gleichgewichtslage.

Die Gesamtlösung ist also:

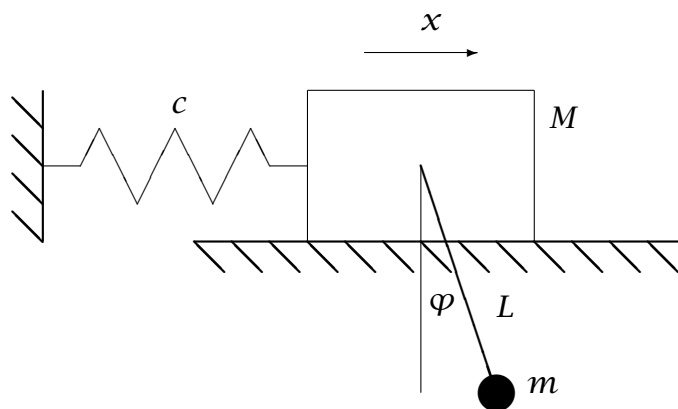
$$\vec{x}(t) = \vec{x}_{\text{hom}}(t) + \vec{x}_{\text{spez}}$$

$$\vec{x}(t) = A_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \cdot t + \varphi_1 \right] \\ + A_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} \cos \left[ \left( \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \right) \cdot t + \varphi_2 \right] + \begin{pmatrix} \frac{2mg}{c} + l_0 \\ \frac{3mg}{c} + 2l_0 \end{pmatrix}$$

Die vier Konstanten  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  ergeben sich aus den Anfangsbedingungen der beiden Körper:

$$\vec{x}(0) = \vec{x}_0, \quad \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0$$

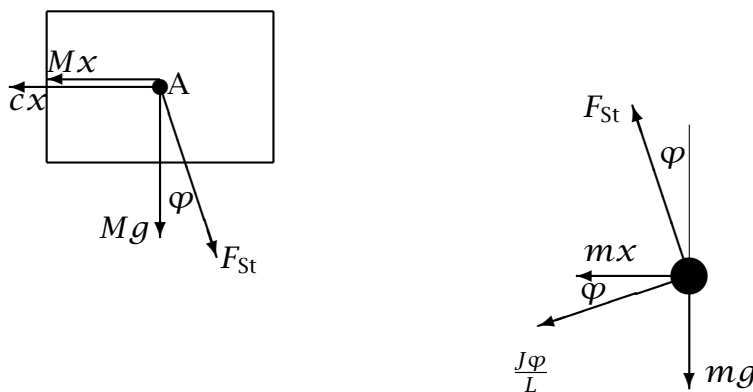
### 4.3. Mathematisches Pendel gekoppelt mit horizontalem Schwinger



Eine Masse  $M$  ist an einer Feder mit der Federkonstanten  $c$  festgemacht und so geführt, dass sie horizontale Translationsschwingungen ausführen kann. Sie ist gelenkig mit einem masselosen starren Stab der Länge  $L$  verbunden, an dessen Ende eine kleine punktförmige Masse  $m$  befestigt ist.

Die Koordinate  $x$  beschreibt die horizontale Auslenkung der Masse  $M$  und der Winkel  $\varphi$  die Auslenkung des Stabes aus der Gleichgewichtslage, die als klein angenommen wird. Die Pendellänge  $L$  sei festgelegt durch  $L = \frac{M+m}{c}g$

Freischneiden:



Die vertikalen Kräfte werden alle durch die Unterlage kompensiert.

Für die Masse  $M$  gilt in horizontaler Richtung folgendes dynamisches Kräftegleichgewicht:

$$[1] \quad Mx + cx - F_{St} \sin \varphi = 0$$

Für die Masse  $m$  gilt in horizontaler Richtung folgendes dynamisches Kräftegleichgewicht:

$$[2] \quad mx + \frac{J\varphi}{L} \cos \varphi + F_{St} \sin \varphi = 0$$

[1] + [2] liefert:

$$[3] \quad (M + m)x + cx + \frac{J\varphi}{L} \cos \varphi = 0$$

Für die Masse  $m$  gilt folgendes dynamisches Momentengleichgewicht um den Drehpunkt A:

$$[4] \quad mxL \cos \varphi + J\varphi + mgL \sin \varphi = 0$$

Für kleine Auslenkungen folgt  $\sin \varphi \rightarrow \varphi$  und  $\cos \varphi \rightarrow 1$

Für eine punktförmige Masse  $m$  folgt  $J = mL^2$

Dies in [3] und [4] eingesetzt liefert:

$$[3a] \quad (M + m)x + cx + mL\varphi = 0$$

$$[4a] \quad mxL + mL^2\varphi + mgL\varphi = 0$$

Division von [4a] mit  $L$  liefert:

$$[4b] \quad mx + mL\varphi + mg\varphi = 0$$

Entkoppeln von  $x$  und  $\varphi$

[3a] – [4b] liefert:

$$[5] \quad Mx + cx - mg\varphi = 0$$

$\frac{M+m}{m}[4b] - [3a]$  liefert:

$$ML\varphi - cx + (m + M)g\varphi = 0$$

Division mit  $L$  liefert:

$$[6] \quad M\varphi - \frac{c}{L}x + \frac{(m + M)g}{L}\varphi = 0$$

Einsetzen der Beziehung für  $L = \frac{M+m}{c}g$  in [5] und [6] liefert für das Differentialgleichungssystem:

$$Mx + cx - mg\varphi = 0$$

$$M\varphi - \frac{c^2}{(m + M)g}x + c\varphi = 0$$

Wir führen ein:

|                                                                 |                                                                |                                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| Den Vektor                                                      | Die Massenmatrix                                               | Die Steifigkeitsmatrix                                                             |
| $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \varphi(t) \end{pmatrix}$ | $\underline{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}$ | $\underline{c} = \begin{pmatrix} c & -mg \\ -\frac{c^2}{(m+M)g} & c \end{pmatrix}$ |

Somit erhalten wir für die beiden Differentialgleichungen folgendes homogenes lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\underline{M}\vec{x}(t) + \underline{c}\vec{x}(t) = \vec{0}$$

Folgender Ansatz führt zum Ziel:

$$\vec{x}(t) = \hat{x}e^{i\omega t}$$

$$\dot{\vec{x}}(t) = i\omega\hat{x}e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\vec{x}}(t) = -\omega^2\hat{x}e^{i\omega t}$$

Eingesetzt liefert das:

$$\underbrace{(-\omega^2 \cdot \underline{M} + \underline{c})}_{\underline{A}} \hat{\underline{x}} = \vec{0}$$

Bedingung für nicht-triviale Lösung:

Die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$  muß verschwinden.

$$\det \underline{A} = 0$$

Ausgeschrieben ergibt dies folgende quadratische Gleichung in  $\omega^2$ :

$$M^2(\omega^2)^2 - 2cM\omega^2 + c^2 \left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = 0$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2cM \pm \sqrt{4c^2M^2 - 4c^2M^2 \left(1 - \frac{m}{m+M}\right)}}{2M^2} = \frac{2cM \pm \sqrt{4c^2M^2 \frac{m}{m+M}}}{2M^2}$$

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{2cM \pm 2cM \sqrt{\frac{m}{m+M}}}{2M^2} = \left(1 \pm \sqrt{\frac{m}{m+M}}\right) \frac{c}{M}$$

Somit gilt für die Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\left(1 + \sqrt{\frac{m}{m+M}}\right) \frac{c}{M}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left(1 - \sqrt{\frac{m}{m+M}}\right) \frac{c}{M}}$$

Der Eigenvektor  $\vec{v}_1$  zu  $\omega_1^2 = \left(1 + \sqrt{\frac{m}{m+M}}\right) \frac{c}{M}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} c - M\omega_1^2 & -mg \\ -\frac{c^2}{(m+M)g} & c - M\omega_1^2 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow -c \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{m}{m+M}} & \frac{mg}{c} \\ \frac{c}{(m+M)g} & \sqrt{\frac{m}{m+M}} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{c} \\ \sqrt{\frac{m}{m+M}} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{mg}{c} < 0 \\ \sqrt{\frac{m}{m+M}} > 0 \end{pmatrix} \text{ gegenphasig}$$

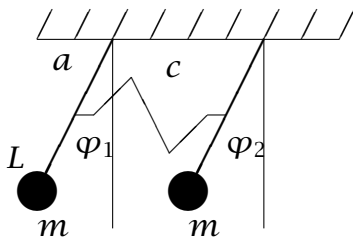
Der Eigenvektor  $\vec{v}_2$  zu  $\omega_2^2 = \left(1 - \sqrt{\frac{m}{m+M}}\right) \frac{c}{M}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} c - M\omega_2^2 & -mg \\ -\frac{c^2}{(m+M)g} & c - M\omega_2^2 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow -c \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m}{m+M}} & \frac{mg}{c} \\ \frac{c}{(m+M)g} & -\sqrt{\frac{m}{m+M}} \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0}$$

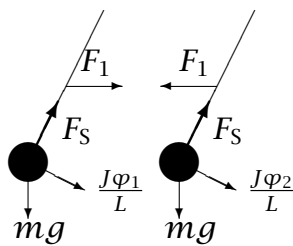
$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{mg}{c} \\ \sqrt{\frac{m}{m+M}} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{mg}{c} > 0 \\ \sqrt{\frac{m}{m+M}} > 0 \end{pmatrix} \text{ gleichphasig}$$

#### 4.4. Gekoppelte Pendel

Hierbei handelt es sich um ein Zweikörperproblem mit zwei gleichen als punktförmig anzunehmende Pendelmassen  $m$  jeweils im Abstand  $L$  von den Drehpunkten, die durch eine Feder mit den Federkonstante  $c$  im Abstand  $a$  von den Drehpunkten gekoppelt sind. Die Auslenkungen  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  seien als klein angenommen.



Freischneiden:



$$F_1 = ca(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2)$$

Das dynamische Momentengleichgewicht liefert ( $F_S$  bewirkt kein Moment – die Wirkungslinie geht durch den Drehpunkt):

$$\begin{aligned} J\varphi_1 + mgL \sin \varphi_1 + F_1 a \cos \varphi_1 &= 0 \\ J\varphi_2 + mgL \sin \varphi_2 - F_1 a \cos \varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Kleine Auslenkungen bedingen  $\sin \varphi_i \rightarrow \varphi_i$  und  $\cos \varphi_i \rightarrow 1$  für  $i = 1, 2$  und punktförmige Massen bedingen  $J = mL^2$

Die Differentialgleichungen sehen folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} J\varphi_1 + mgL \sin \varphi_1 + ca^2(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_1 &= 0 & mL^2\varphi_1 + mgL\varphi_1 + ca^2\varphi_1 - ca^2\varphi_2 &= 0 \\ J\varphi_2 + mgL \sin \varphi_2 - ca^2(\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) \cos \varphi_2 &= 0 & mL^2\varphi_2 + mgL\varphi_2 - ca^2\varphi_1 + ca^2\varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dies liefert endgültig:

$$\begin{aligned} m\varphi_1 + \left(\frac{mg}{L} + c\frac{a^2}{L^2}\right)\varphi_1 - c\frac{a^2}{L^2}\varphi_2 &= 0 \\ m\varphi_2 - c\frac{a^2}{L^2}\varphi_1 + \left(\frac{mg}{L} + c\frac{a^2}{L^2}\right)\varphi_2 &= 0 \end{aligned}$$

Wir führen ein:

Den Vektor  $\vec{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix}$  Die Massenmatrix  $\underline{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$  Steifigkeitsmatrix  $\underline{c} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{L} + c\frac{a^2}{L^2} & -c\frac{a^2}{L^2} \\ -c\frac{a^2}{L^2} & \frac{mg}{L} + c\frac{a^2}{L^2} \end{pmatrix}$

Somit erhalten wir für die beiden Differentialgleichungen folgendes homogenes lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\underline{M}\ddot{\vec{\varphi}}(t) + \underline{c}\vec{\varphi}(t) = \vec{0}$$

Folgender Ansatz führt zur Lösung des zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichungssystems:

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}_{\text{hom}}(t) &= \hat{\varphi} e^{i\omega t} \\ \dot{\vec{\varphi}}_{\text{hom}}(t) &= i\omega \hat{\varphi} e^{i\omega t} \\ \ddot{\vec{\varphi}}_{\text{hom}}(t) &= -\omega^2 \hat{\varphi} e^{i\omega t}\end{aligned}$$

Eingesetzt liefert das:

$$\underbrace{(-\omega^2 \cdot \underline{M} + \underline{c})}_{\underline{A}} \hat{\varphi} = \vec{0}$$

Bedingung für nicht-triviale Lösung:

Die Determinante der Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$  muß verschwinden.

$$\det \underline{A} = 0$$

Hiermit erhalten wir folgende Koeffizientenmatrix  $\underline{A}$ :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - m\omega^2 & -c \frac{a^2}{L^2} \\ -c \frac{a^2}{L^2} & \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - m\omega^2 \end{pmatrix}$$

Die quadratische Gleichung in  $\omega^2$  lautet:

$$\begin{aligned}\left(\frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - m\omega^2\right)^2 - \left(c \frac{a^2}{L^2}\right)^2 &= 0 \\ \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - m\omega^2 &= \pm c \frac{a^2}{L^2} \\ \omega^2 &= \frac{g}{L} + \frac{c}{m} \frac{a^2}{L^2} \pm \frac{c}{m} \frac{a^2}{L^2} \\ \omega_1^2 &= \frac{g}{L} \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega_2^2 &= \frac{g}{L} + 2 \frac{c}{m} \frac{a^2}{L^2} \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2 \frac{c}{m} \frac{a^2}{L^2}}\end{aligned}$$

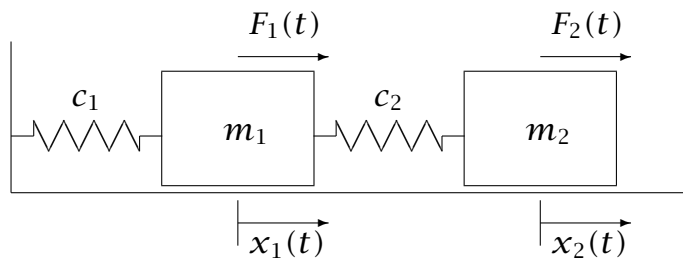
Der Eigenvektor  $\vec{v}_1$  zu  $\omega_1^2 = \frac{g}{L}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - \frac{mg}{L} & -c \frac{a^2}{L^2} \\ -c \frac{a^2}{L^2} & \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - \frac{mg}{L} \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} &\Leftrightarrow c \frac{a^2}{L^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \vec{v}_1 = \vec{0} \\ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 > 0 \\ 1 > 0 \end{pmatrix} \text{ gleichphasig}\end{aligned}$$

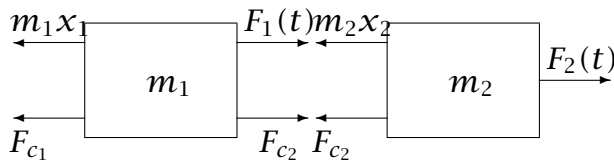
Der Eigenvektor  $\vec{v}_2$  zu  $\omega_2^2 = \frac{g}{L} + 2 \frac{c}{m} \frac{a^2}{L^2}$  ergibt sich aus der Gleichung:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - \frac{mg}{L} - 2c \frac{a^2}{L^2} & -c \frac{a^2}{L^2} \\ -c \frac{a^2}{L^2} & \frac{mg}{L} + c \frac{a^2}{L^2} - \frac{mg}{L} - 2c \frac{a^2}{L^2} \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} &\Leftrightarrow c \frac{a^2}{L^2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{v}_2 = \vec{0} \\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 > 0 \\ -1 < 0 \end{pmatrix} \text{ gegenphasig}\end{aligned}$$

#### 4.5. Gekoppelte Zwangsschwingungen bei harmonischer Erregung



Freischneiden:



$$F_{c_1} = c_1 x_1$$

$$F_{c_2} = c_2 (x_2 - x_1)$$

Das dynamische Kräftegleichgewicht liefert:

$$m_1 x_1 + F_{c_1} - F_{c_2} = F_1(t)$$

$$m_2 x_2 + F_{c_2} = F_2(t)$$

Die Differentialgleichungen sehen folgendermaßen aus:

$$m_1 x_1 + c_1 x_1 - c_2 (x_2 - x_1) - F_1(t) = 0 \quad m_1 x_1 + (c_1 + c_2) x_1 - c_2 x_2 = F_1(t)$$

$$m_2 x_2 + c_2 (x_2 - x_1) - F_2(t) = 0 \quad m_2 x_2 - c_2 x_1 + c_2 x_2 = F_2(t)$$

Wir führen ein:

Den Vektor  $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$  Die Massenmatrix  $\underline{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$  Die Steifigkeitsmatrix  $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}$  Den Erregervektor  $\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix}$

Somit erhalten wir für die beiden Differentialgleichungen folgendes lineares Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung:

$$\underline{M} \ddot{\vec{x}}(t) + \underline{c} \dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(t)$$

Ohne Berücksichtigung des Einschwingvorgangs wird nur die stationäre Schwingung untersucht. Die Erregung sei:

$$\vec{F}(t) = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{F}_1 \\ \hat{F}_2 \end{pmatrix} \sin(\omega_E \cdot t) = \hat{\vec{F}} \sin(\omega_E \cdot t)$$

Die Antwort des Systems ist dann:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \sin(\omega_E \cdot t) = \hat{\vec{x}} \sin(\omega_E \cdot t)$$

Diesen Ansatz in das Differentialgleichungssystem eingesetzt liefert:

$$\left[ -\omega_E^2 \cdot \underline{M} \hat{\vec{x}} + \underline{c} \hat{\vec{x}} \right] \sin(\omega_E \cdot t) = \hat{\vec{F}} \sin(\omega_E \cdot t)$$

oder

$$[-\omega_E^2 \cdot \underline{M} + \underline{c}] \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{F}}$$

Eine Beispielrechnung folgt für  $m_1 = m_2 = m$ ,  $c_1 = c_2 = c$  und  $\hat{F}_1 = 0$

Daraus ergibt sich:

|                                                                              |                                                                |                                                                   |                                                                      |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| Der Vektor                                                                   | Die Massenmatrix                                               | Die Steifigkeitsmatrix                                            | Der Erregervektor                                                    |
| $\hat{\underline{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ | $\underline{M} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ | $\underline{c} = \begin{pmatrix} 2c & -c \\ -c & c \end{pmatrix}$ | $\hat{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{F}_2 \end{pmatrix}$ |

Es gilt:

$$[-\omega_E^2 \cdot \underline{M} + \underline{c}] \hat{\underline{x}} = \hat{\underline{F}}$$

Hieraus folgt ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten  $\hat{x}_1$  und  $\hat{x}_2$

$$\begin{aligned} (-m\omega_E^2 + 2c) \cdot \hat{x}_1 - c \cdot \hat{x}_2 &= 0 \\ -c \cdot \hat{x}_1 + (-m\omega_E^2 + c) \cdot \hat{x}_2 &= \hat{F}_2 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Cramerschen Regel folgt relativ einfach:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 &= \frac{c\hat{F}_2}{(-m\omega_E^2 + 2c) \cdot (-m\omega_E^2 + c) - c^2} \\ \hat{x}_2 &= \frac{(-m\omega_E^2 + 2c)\hat{F}_2}{(-m\omega_E^2 + 2c) \cdot (-m\omega_E^2 + c) - c^2} \end{aligned}$$

Die Resonanzfrequenzen  $\omega_{E_{1,2}}$  erhält man:

$$\begin{aligned} (-m\omega_E^2 + 2c) \cdot (-m\omega_E^2 + c) - c^2 &= 0 \\ m^2(\omega_E^2)^2 - 3mc\omega_E^2 + c^2 &= 0 \\ \omega_{E_{1,2}}^2 &= \frac{3 \pm \sqrt{5} c}{2 m} \\ \omega_{E_1} &= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}}, \quad \omega_{E_2} = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \sqrt{\frac{c}{m}} \end{aligned}$$

Wenn man sich die Auslenkung

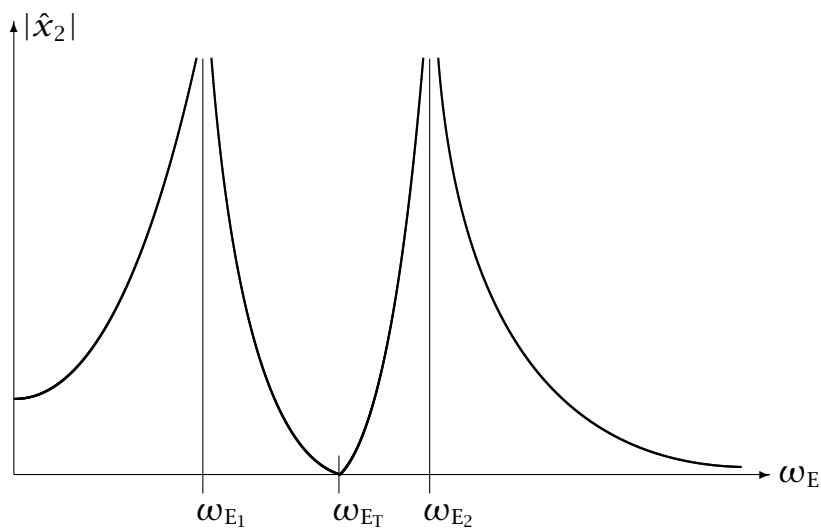
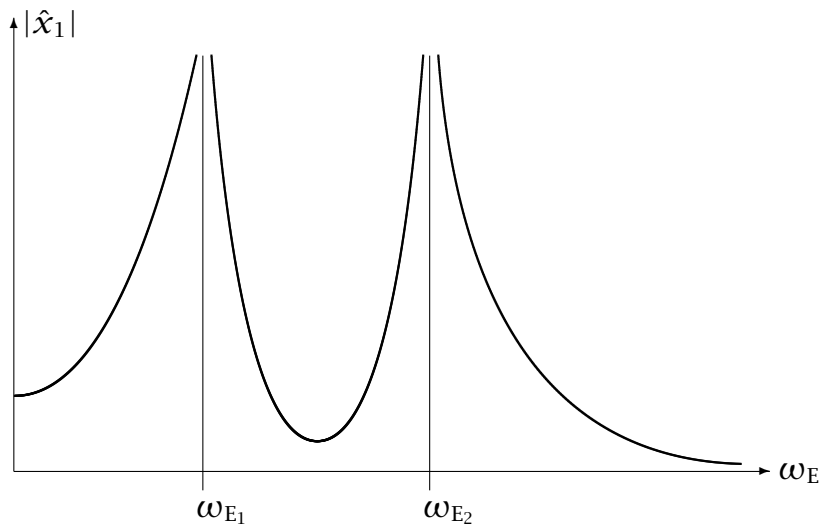
$$\hat{x}_2 = \frac{(-m\omega_E^2 + 2c)\hat{F}_2}{(-m\omega_E^2 + 2c) \cdot (-m\omega_E^2 + c) - c^2}$$

genau anschaut, so sieht man, dass diese bei einer bestimmten Erregerkreisfrequenz der sogenannten **Tilgerkreisfrequenz** zu Null wird. Das bedeutet, dass bei dieser Tilgerkreisfrequenz  $\omega_{E_T}$  die rechte Masse permanent ruht.

Diese Tilgerkreisfrequenz ist:

$$\begin{aligned} \hat{x}_2 &= 0 \\ 0 &= \frac{(-m\omega_E^2 + 2c)\hat{F}_2}{(-m\omega_E^2 + 2c) \cdot (-m\omega_E^2 + c) - c^2} \\ 0 &= (-m\omega_{E_T}^2 + 2c)\hat{F}_2 \\ \omega_{E_T} &= \sqrt{\frac{2c}{m}} \end{aligned}$$

Schaubilder der Beträge der Auslenkungen  $|\hat{x}_1|$  und  $|\hat{x}_2|$  über der Erregerkreisfrequenz  $\omega_E$ .



## 5. Ersatzfederkonstanten

### 5.1. Längsfedern

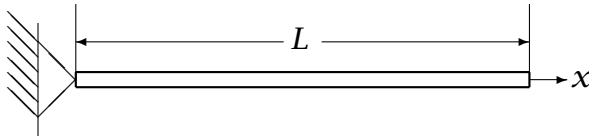
Es handelt sich hierbei um Stäbe, die evtl. einen veränderlichen Querschnitt  $A(x)$  über die Länge  $L$  des Stabes besitzen und Längsschwingungen (in  $x$ -Richtung) ausführen.  $E [\frac{N}{m^2}]$  bezeichnet den Elastizitätsmodul. Solchen Stäben kann man ebenfalls eine Federkonstante zuschreiben. Man bezeichnet sie mit  $c_x [\frac{N}{m}]$ , um anzudeuten, dass es sich um Längsschwingungen – also Schwingungen in  $x$ -Richtung handelt.

- Stab mit über die Stablänge  $L$  beliebig veränderlicher Querschnittsfläche  $A(x)$

Es gilt:

$$c_x = \frac{E}{\int_{x=0}^L \frac{1}{A(x)} dx}$$

- Stab (Seil) mit konstanter Querschnittsfläche  $A(x) = A = \text{const.}$

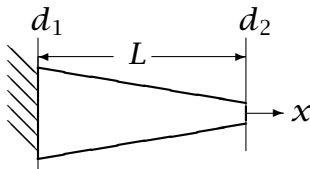


$$c_x = \frac{E}{\int_{x=0}^L \frac{1}{A} dx} = \frac{E}{\frac{1}{A} \int_{x=0}^L dx} = \frac{EA}{L}$$

Anmerkung:

Bei Seilen, z. B. patentverschlossene Stahlseile ist der Elastizitätsmodul kleiner als bei einem Stab gleichen Materials.  $E_{\text{Stahlseil}} \approx 0,83E_{\text{Stahlstab}}$

- Stab mit einer Kreisfläche als Querschnitt, deren Durchmesser linear mit der Stablänge  $L$  von  $d_1$  auf  $d_2$  abnimmt.



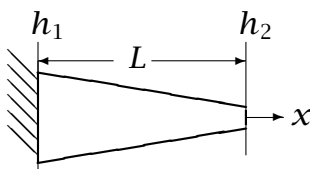
Es gilt für die lineare Abnahme des Durchmessers  $d(x)$

$$d(x) = d_2 - \frac{d_2 - d_1}{L}x \Rightarrow A(x) = \frac{\pi}{4}d(x)^2$$

folgt

$$c_x = \frac{E}{\int_{x=0}^L \frac{1}{\frac{\pi}{4}d(x)^2} dx} = \frac{\pi E}{4 \int_{x=0}^L \frac{1}{(d_2 - \frac{d_2 - d_1}{L}x)^2} dx} = \frac{\pi E}{4 \left[ \frac{L}{(d_2 - d_1) \cdot (d_2 - \frac{d_2 - d_1}{L}x)} \right]_{x=0}^L} = \frac{\pi E d_1 d_2}{4L}$$

- Stab mit einem Rechteck als Querschnitt, dessen Höhe linear mit der Stablänge  $L$  von  $h_1$  auf  $h_2$  abnimmt und die konstante Breite  $b$  besitzt.



Es gilt für die lineare Abnahme des Durchmessers  $h(x)$

$$h(x) = h_2 - \frac{h_2 - h_1}{L}x \Rightarrow A(x) = bh(x)$$

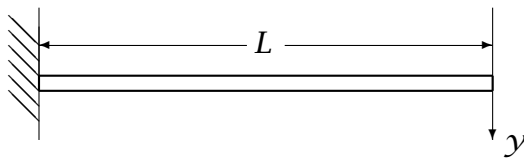
folgt

$$c_x = \frac{E}{\int_{x=0}^L \frac{1}{bh(x)} dx} = \frac{bE}{\int_{x=0}^L \frac{1}{(h_2 - \frac{h_2-h_1}{L}x)} dx} = \frac{bE}{\left[ \frac{L}{h_1-h_2} \cdot \ln(h_2 - \frac{h_2-h_1}{L}x) \right]_{x=0}^L} = \frac{bE(h_1 - h_2)}{L \cdot \ln \frac{h_1}{h_2}}$$

## 5.2. Biegefedern

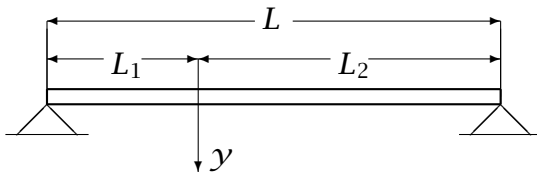
Es handelt sich hierbei um Stäbe mit konstanter Biegesteifigkeit über die Länge  $L$  des Stabes und Querschwingungen (in  $y$ -Richtung) ausführen.  $E [\frac{N}{m^2}]$  bezeichnet den Elastizitätsmodul,  $I [m^4]$  das axiale Flächenmoment zweiter Ordnung der Querschnittsfläche. Solchen Stäben kann man ebenfalls eine Federkonstante zuschreiben. Man bezeichnet sie mit  $c_y [\frac{N}{m}]$ , um anzudeuten, dass es sich um Querschwingungen – also Schwingungen in  $y$ -Richtung handelt.

- Einseitig eingespannter Stab



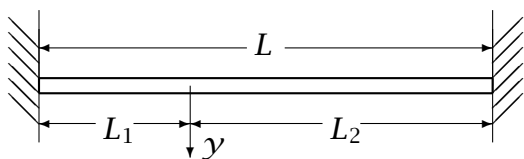
$$c_y = \frac{3EI}{L^3}$$

- Beidseitig frei aufliegender Stab



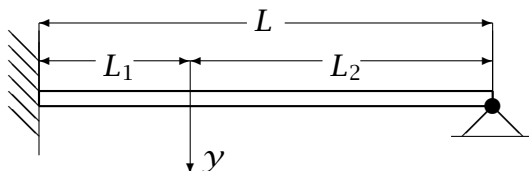
$$c_y = \frac{3EIL}{L_1^2 L_2^2}$$

- Beidseitig eingespannter Stab



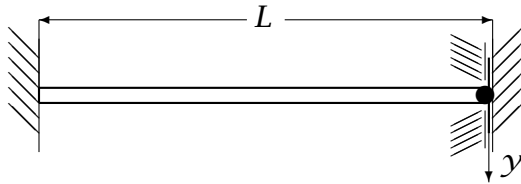
$$c_y = \frac{3EIL^3}{L_1^3 L_2^3}$$

- Stab mit Einspannung und frei drehbarem Lager



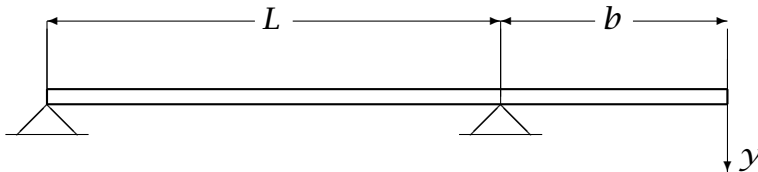
$$c_y = \frac{4EIL^2}{L_1^3 L_2^2 (1 + \frac{L_2}{3L})}$$

- Stab mit starrer und vertikal verschiebbarer Einspannung



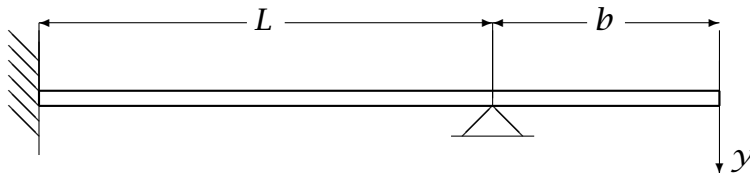
$$c_y = \frac{12EI}{L^3}$$

- Statisch bestimmt gelagerter Stab mit Kragarm



$$c_y = \frac{3EI}{b^2(L+b)}$$

- Statisch unbestimmt gelagerter Stab mit Kragarm



$$c_y = \frac{12EI}{b^2(4b+3L)}$$

### 5.3. Drehfedern

Es handelt sich hierbei um Stäbe, die einen bestimmten Querschnitt besitzen.  $G$  [ $\frac{N}{m^2}$ ] bezeichnet den Schubmodul. Solchen Stäben kann man ebenfalls eine Winkelrichtgröße (Drehfederkonstante) zuschreiben. Man bezeichnet sie mit  $c_D$  [Nm], um anzudeuten, dass es sich um Drehschwingungen - also um Torsions-Schwingungen handelt.

- Drehstab mit Kreisquerschnitt

$$c_D = \frac{G\pi d^4}{32L}$$

- Drehstab mit Kreisringquerschnitt

$$c_D = \frac{G\pi(d_a^4 - d_i^4)}{32L}$$

- Drehstab mit Rechteckquerschnitt

Mit  $h < b$

$$c_D = \psi \frac{Gbh^3}{L}$$

mit  $\psi = \frac{1}{3}(1 - 0,63\frac{h}{b} + 0,052\frac{h^5}{b^5})$

## 5.4. Einige wichtige Massenträgheitsmomente

| Körperart                 | Lage der Drehachse                      | Trägheitsmoment                    |
|---------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------|
| Kreisring (dünn)          | durch Mittelpunkt $\perp$ zur Ringebene | $J_S = mr^2$                       |
| Hohlzylinder (dünnwandig) | Längsachse                              | $J_S = mr^2$                       |
| Vollzylinder              | Längsachse                              | $J_S = \frac{m}{2}r^2$             |
| Hohlzylinder (dickwandig) | Längsachse                              | $J_S = \frac{m}{2}(r_1^2 + r_2^2)$ |
| Kreisscheibe              | $\perp$ zur Ebene durch Mittelpunkt     | $J_S = \frac{m}{2}r^2$             |
| Kreisscheibe              | Durchmesser                             | $J_S = \frac{m}{4}r^2$             |
| Kugel                     | durch Mittelpunkt                       | $J_S = \frac{2m}{5}r^2$            |
| Hohlkugel (dünnwandig)    | durch Mittelpunkt                       | $J_S = \frac{2m}{3}r^2$            |
| Stab mit Länge $L$ (dünn) | $\perp$ zur Stabmitte                   | $J_S = \frac{m}{12}L^2$            |

Die Angabe eines Trägheitsmoments ohne die Lage der Drehachse macht keinen Sinn.

### 5.4.1. Steinerscher Satz für Massenträgheitsmomente

Parallele Achsen:

Eine parallele Verlagerung einer Schwerpunktsdrehachse um  $s$  führt zu einer Vergrößerung des Trägheitsmomentes.

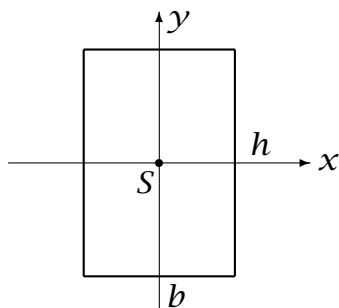
Steinerscher Satz:

$$J_A = J_S + ms^2$$

## 5.5. Einige wichtige axiale (äquatoriale) Flächenträgheitsmomente

Das axiale Flächenträgheitsmoment  $I$  durch den Schwerpunkt ist definiert als  $I_x = \int y^2 dA$  oder  $I_y = \int x^2 dA$ , dabei muss eine Bezugsachse gegeben sein, auf die sich das axiale Flächenträgheitsmoment bezieht. Das axiale Flächenträgheitsmoment ändert sich nicht, wenn beliebige Teile von  $A$  parallel zur Achse verschoben werden.

### • Rechteck



$$I_x = \int y^2 \underbrace{dA}_{=b dy} = \int_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b dy = \frac{b}{3} [y^3]_{y=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

und

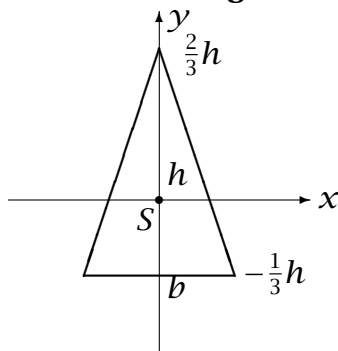
$$I_y = \int x^2 \underbrace{dA}_{=h dx} = \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 h dx = \frac{h}{3} [x^3]_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

$$I_y = \frac{1}{12} h b^3$$

**Quadrat (Spezialfall eines Rechtecks) für  $b = h = a$**

$$I_x = I_y = \frac{1}{12} a^4$$

• **Gleichschenkliges Dreieck**



Der Schwerpunkt  $S$  im Dreieck teilt die Seitenhalbierende  $h$  im Verhältnis 2:1.  
Bestimmung der Geradengleichung durch die Punkte  $(-\frac{1}{2}b / -\frac{1}{3}h)$  und  $(0 / \frac{2}{3}h)$

$$y = 2h \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{3} \right)$$

Ausnutzen der Symmetrie zur  $y$ -Achse

$$I_x = \int y^2 \underbrace{dA}_{=dx dy} = 2 \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 \int_{y=-\frac{h}{3}}^{2h(\frac{x}{b} + \frac{1}{3})} y^2 dy dx = 2 \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-\frac{h}{3}}^{2h(\frac{x}{b} + \frac{1}{3})} dx$$

$$I_x = \frac{2}{3} \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 [y^3]_{y=-\frac{h}{3}}^{2h(\frac{x}{b} + \frac{1}{3})} dx = \frac{2}{3} \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 \left( 8h^3 \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{3} \right)^3 + \frac{h^3}{27} \right) dx$$

$$I_x = \frac{2}{3} h^3 \left[ 2b \left( \frac{x}{b} + \frac{1}{3} \right)^4 + \frac{1}{27} x \right]_{x=-\frac{b}{2}}^0 = \frac{2}{3} h^3 \left( 2b \left( \frac{1}{3} \right)^4 - 2b \left( -\frac{1}{6} \right)^4 + \frac{b}{54} \right)$$

$$I_x = \frac{2}{3} b h^3 \left( \frac{2}{81} - \frac{1}{648} + \frac{1}{54} \right) = \frac{1}{36} b h^3$$

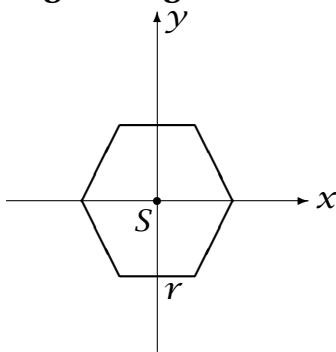
und

$$I_y = \int x^2 \underbrace{dA}_{=dx dy} = 2 \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 \int_{y=-\frac{h}{3}}^{2h(\frac{x}{b}+\frac{1}{3})} x^2 dy dx = 2 \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 [yx^2]_{y=-\frac{h}{3}}^{2h(\frac{x}{b}+\frac{1}{3})} dx$$

$$I_y = 2h \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 \left( \left( \frac{2x}{b} + 1 \right) x^2 \right) dx = 2h \int_{x=-\frac{b}{2}}^0 \left( \frac{2}{b} x^3 + x^2 \right) dx$$

$$I_y = 2h \left[ \frac{1}{2b} x^4 + \frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-\frac{b}{2}}^0 = 2h \left( -\frac{1}{32} b^3 + \frac{1}{24} b^3 \right) = \frac{1}{48} h b^3$$

• **Regelmäßiges Sechseck**



Bestimmung der Geraden durch die Punkte  $(-r/0)$  und  $(-\frac{1}{2}r/\frac{\sqrt{3}}{2}r)$

$$y = \sqrt{3}(x + r)$$

Ausnutzen der Symmetrie zur  $x$ - und  $y$ -Achse

$$I_x = \int y^2 \underbrace{dA}_{=dx dy} = 4 \left( \int_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{3}(x+r)} y^2 dy dx + \int_{x=-\frac{r}{2}}^0 \int_{y=0}^{\frac{r}{2}\sqrt{3}} y^2 dy dx \right)$$

$$I_x = 4 \left( \int_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\sqrt{3}(x+r)} dx + \int_{x=-\frac{r}{2}}^0 \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\frac{r}{2}\sqrt{3}} dx \right)$$

$$I_x = 4 \left( \int_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} \sqrt{3}(x+r)^3 dx + \int_{x=-\frac{r}{2}}^0 \frac{1}{8} \sqrt{3} r^3 dx \right)$$

$$I_x = 4\sqrt{3} \left( \left[ \frac{1}{4} (x+r)^4 \right]_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} + \left[ \frac{1}{8} r^3 x \right]_{x=-\frac{r}{2}}^0 \right) = \frac{5}{16} \sqrt{3} r^4$$

und

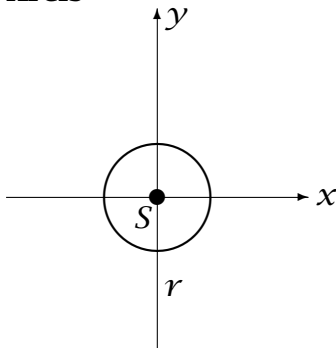
$$I_y = \int x^2 \underbrace{dA}_{=dx dy} = 4 \left( \int_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} \int_{y=0}^{\sqrt{3}(x+r)} x^2 dy dx + \int_{x=-\frac{r}{2}}^0 \int_{y=0}^{\frac{r}{2}\sqrt{3}} x^2 dy dx \right)$$

$$I_y = 4 \left( \int_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} [x^2 y]_{y=0}^{\sqrt{3}(x+r)} dx + \int_{x=-\frac{r}{2}}^0 [x^2 y]_{y=0}^{\frac{r}{2}\sqrt{3}} dx \right)$$

$$I_y = 4 \left( \int_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} \sqrt{3}(x+r)x^2 dx + \int_{x=-\frac{r}{2}}^0 \frac{r}{2}\sqrt{3}x^2 dx \right)$$

$$I_y = 4\sqrt{3} \left( \left[ \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}rx^3 \right]_{x=-r}^{-\frac{r}{2}} + \left[ \frac{r}{6}x^3 \right]_{x=-\frac{r}{2}}^0 \right) = \frac{5}{16}\sqrt{3}r^4$$

• **Kreis**



Einführen von Polarkoordinaten

( $r$  Abstand zum Ursprung,  $\varphi$  Winkel mit der positiven  $x$ -Achse)

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$dA = r dr d\varphi$$

Folgende Integrale treten auf:

$$\int \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi)$$

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{4}\sin(2\varphi)$$

Ausnutzen der Symmetrie zur  $x$ - und  $y$ -Achse

$$I_x = \int y^2 \underbrace{dA}_{=r dr d\varphi} = 4 \left( \int_{r=0}^r \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin^2 \varphi \cdot r dr d\varphi \right) = 4 \left( \int_{r=0}^r \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin^2 \varphi dr d\varphi \right)$$

$$I_x = 4 \left( \int_{r=0}^r r^3 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = 4 \left( \left[ \frac{1}{4}r^4 \right]_{r=0}^r \cdot \left[ \frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin(2\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$I_x = \frac{\pi}{4}r^4$$

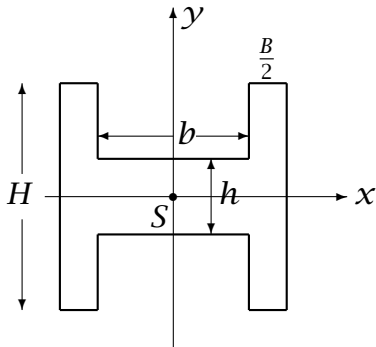
und

$$I_y = \int x^2 \underbrace{dA}_{=rdrd\varphi} = 4 \left( \int_{r=0}^r \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \varphi \cdot r dr d\varphi \right) = 4 \left( \int_{r=0}^r \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos^2 \varphi dr d\varphi \right)$$

$$I_y = 4 \left( \int_{r=0}^r r^3 dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi \right) = 4 \left( \left[ \frac{1}{4} r^4 \right]_{r=0}^r \cdot \left[ \frac{1}{2} \varphi + \frac{1}{4} \sin(2\varphi) \right]_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$I_y = \frac{\pi}{4} r^4$$

• **Doppel-T-Träger und Varianten**

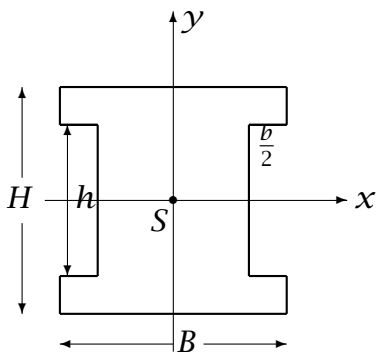


Ausnutzen der Symmetrie zur  $x$ - und  $y$ -Achse

$$I_x = \int y^2 \underbrace{dA}_{=dxdy} = 4 \left( \int_{x=0}^{\frac{b}{2}} \int_{y=0}^{\frac{h}{2}} y^2 dy dx + \int_{x=\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}+\frac{B}{2}} \int_{y=0}^{\frac{H}{2}} y^2 dy dx \right)$$

$$I_x = 4 \left( [x]_{x=0}^{\frac{b}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\frac{h}{2}} + [x]_{x=\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}+\frac{B}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\frac{H}{2}} \right)$$

$$I_x = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$$



Ausnutzen der Symmetrie zur  $x$ - und  $y$ -Achse

$$I_x = \int y^2 \underbrace{dA}_{=dx dy} = 4 \left( \int_{x=0}^{\frac{B}{2}-\frac{b}{2}} \int_{y=0}^{\frac{H}{2}} y^2 dy dx + \int_{x=\frac{B}{2}-\frac{b}{2}}^{\frac{B}{2}} \int_{y=\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} y^2 dy dx \right)$$
$$I_x = 4 \left( [x]_{x=0}^{\frac{B}{2}-\frac{b}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\frac{H}{2}} + [x]_{x=\frac{B}{2}-\frac{b}{2}}^{\frac{B}{2}} \cdot \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} \right)$$
$$I_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

### 5.5.1. Steinerscher Satz für Flächenträgheitsmomente

Ist das Flächenträgheitsmoment  $I$  für die Schwerpunktsachse  $S$  bekannt, so wird das Flächenträgheitsmoment bezogen auf eine zu  $S$  parallele Achse  $a$  im Abstand  $e$  zu  $S$  mit  $I_a$  bezeichnet.

Es gilt:

$$I_a = I + e^2 A$$