Strömungslehre

Zusammenfassung

- Grundgrößen in der Strömungslehre
- Hydrostatik
- Hydrodynamik

Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.

 · E-Mail: gilg@acrotex.net · Webseite: www.acrotex.net **Februar 2008**

Inhaltsverzeichnis

1. Strömungslehre

Unter einer Strömung versteht man die Bewegung von Flüssigkeiten oder Gasen. Die Gesetze strömender Flüssigkeiten gelten auch für strömende Gase, solange die Strömungsgeschwindigkeit unter der Schallgeschwindigkeit bleibt, d. h. die strömenden Gase als praktisch inkompressibel angesehen werden können. Ursache von Strömungen sind u. a. Schwerkraft und Druckdifferenzen.

Jedes Teilchen einer Strömung hat in jedem Augenblick eine in Betrag und Richtung bestimmte Geschwindigkeit. Den Raum, den die strömenden Teilchen erfüllen, bezeichnet man als Strömungsfeld. Zur Kennzeichnung der Geschwindigkeitsrichtungen der Teilchen verwendet man Stromlinien. Die in einen Punkt der Stromlinie gelegte Tangente gibt die Strömungsrichtung in diesem Punkt an. Die Verhältnisse sind besonders übersichtlich, wenn die Bahnen der Teilchen mit den Stromlinien übereinstimmen. Das ist der Fall, wenn die Stromlinien für eine längere Zeit ihre Form behalten, die Strömung heißt dann stationär.

1.1. Einige wichtige Größen

1.1.1. Druck

Der Druck ist definiert als Verhältnis von Kraft pro Fläche.

$$p = \frac{F}{A}$$

Seine SI-Basiseinheit ist Pascal: $1\ [\mathrm{Pa}] = 1 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}\right]$

Andere gebräuchliche Einheiten:

$$1\ [\mathrm{bar}] = 10^5\ [\mathrm{Pa}] = 1000\ [\mathrm{hPa}]$$
$$1\ [\mathrm{atm}] = 0{,}981\ [\mathrm{bar}] = 736\ [\mathrm{Torr}] = 736\ [\mathrm{mm\,Hg}]$$

1.1.2. Hydrostatischer Druck

$$p = \rho h g$$

mit der Dichte ρ und deren Einheit $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$

Hier einige Dichten von bekannten Flüssigkeiten bei Normalbedingungen:

$$\rho_{\mathrm{H_2O}} = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
$$\rho_{\mathrm{Hg}} = 1{,}35 \cdot 10^4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

1.1.3. Dynamischer Druck

$p = \frac{1}{2}\rho v^2$, mit der Dichte ρ und deren Einheit $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$ und der Geschwindigkeit v des strömenden Mediums.

1.1.4. Gleichgewicht in U-Röhren

$$\rho_1 g h_1 + p_1 = \rho_2 g h_2 + p_2$$

2. Hydrostatik

2.1. Auftrieb

Die Auftriebskraft eines Körpers ist gleich der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit (Gas):

$$F_\mathrm{A} = \rho_\mathrm{Fl} V_\mathrm{Kö} g = m_\mathrm{Fl} g$$

Es gilt:

ρ_Fl:	Dichte der Flüssigkeit (Gas)
$V_\mathrm{Kö}$:	Volumen des eingetauchten Körpers
m_Fl:	Masse der vom Körper verdrängten Flüssigkeit (Gas)
$F_\mathrm{G,Kö}$:	Gewichtskraft des Körpers

$F_\mathrm{G,\ Kö} > F_\mathrm{A}$:	Der Körper sinkt.
$F_\mathrm{G,\ Kö} = F_\mathrm{A}$:	Der Körper taucht vollkommen ein und schwebt.
$F_\mathrm{G,\ Kö} < F_\mathrm{A}$:	Der Körper taucht nur teilweise ein und schwimmt.

2.2. Druckkräfte auf senkrechte ebene Flächen

Mit F_res bezeichnen wir im folgenden die resultierende Kraft auf eine Wand (Fläche A). S bezeichnet den Schwerpunkt der Fläche, p_S den Druck am Schwerpunkt, h_S die Schwerpunktstiefe und S' den Druckmittelpunkt, $h_{\mathrm{S}'}$ die Druckmittelpunktstiefe. a sei der Abstand zwischen Schwerpunkt und Druckmittelpunkt und I_S das Flächenträgheitsmoment bezogen auf den Schwerpunkt S der Fläche. Die resultierende Kraft greift nicht im Schwerpunkt S an, sondern im tiefer gelegenen Druckmittelpunkt S'.

Hier zwei Flächenträgheitsmomente einfacher Flächen:

Rechteck mit Breite b, Höhe h und Fläche $A = bh$:

$$I_\mathrm{S} = \frac{1}{12} b h^3$$

Kreis mit Durchmesser d und Fläche $A = \frac{\pi}{4} d^2$:

$$I_\mathrm{S} = \frac{1}{64} \pi d^4$$

Es gilt:

$$F_\mathrm{res} = \rho g h_\mathrm{S} A = p_\mathrm{S} A$$

$$h_{\mathrm{S}'} = \frac{I_\mathrm{S}}{h_\mathrm{S} A} + h_\mathrm{S}$$

$$a = h_{\mathrm{S}'} - h_\mathrm{S} = \frac{I_\mathrm{S}}{h_\mathrm{S} A}$$

2.3. Druckkräfte auf schräge ebene Flächen

Die Fläche A sei um den Winkel φ gegenüber der Flüssigkeitsoberfläche geneigt. Die Begriffe von oben gelten.

$$a = \frac{I_S}{h_S A} \sin\varphi$$

3. Hydrodynamik

3.1. Reibungsfreie Strömungen

Sieht man von Wirbelbildung und vor allem von innerer Reibung ab, spricht man von einer idealen Flüssigkeit, die den Gesetzmäßigkeiten von reibungsfreien Strömungen gehorcht.

3.1.1. Durchfluß von Röhren

Ohne innere Reibung

$$V = Avt$$

oder anders:

$$V = Av$$

auch Volumenstrom oder (Durchflußmenge) genannt.

3.1.2. Durchflußgesetz (Kontinuitätsgleichung)

Bei reibungsfreien Strömungen ist der Durchfluß (Volumenstrom) konstant.

$$V = A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{const.}$$

Querschnitt A und Geschwindigkeit v sind umgekehrt proportional.

3.1.3. Druck in Strömungen (Bernoulli-Gleichung)

In einer stationären Strömung ist die Summe aus dem statischen Druck, hydrostatischen Druck und dem dynamischen Druck konstant.

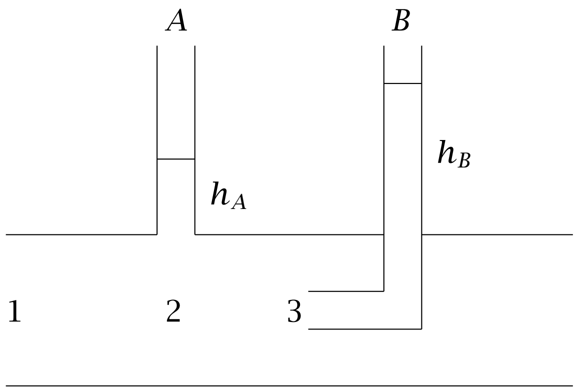
Bernoulli-Gleichung:

$$p_{\text{ges}} = p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = \text{const.}$$

3.1.4. Druckmessungen in Strömungen

Ein Rohr mit konstantem Querschnitt wird mit einer Flüssigkeit der Dichte ρ und konstanter Geschwindigkeit v horizontal durchflossen. Der Gesamtdruck ergibt sich – da das Rohr horizontal verläuft – zu:

$$p_{\text{ges}} = \underbrace{p_1}_{p_{\text{stat}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho v_1^2}_{p_{\text{dyn}}}$$



Das Rohr A mißt den statischen Druck p_2 der Strömung an dieser Stelle, also den statischen Druck p_{stat} der Strömung.

Bernoulli mit Punkt 1 und Punkt 2:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \text{ mit } v_2 = v_1 \text{ folgt:}$$
$$p_2 = p_1 = \rho g h_A$$

Das Rohr B mißt statischen Druck p_3 der Strömung an dieser Staustelle, also den Gesamtdruck p_{ges} der Strömung.

Bernoulli mit Punkt 1 und Punkt 3:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2 \text{ mit } v_3 = 0 \text{ folgt:}$$
$$p_3 = p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_{\text{ges}} = \rho g h_B$$

Die Druckdifferenz der Flüssigkeitssäulen $\Delta p = p_3 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g(h_B - h_A)$ an den Stellen 2 und 3 mißt den dynamischen Druck p_{dyn} der Strömung.

3.1.5. Ausfluß aus Gefäßen

Die Ausflußgeschwindigkeit hängt nur von der Höhe der drückenden Flüssigkeitssäule ab.

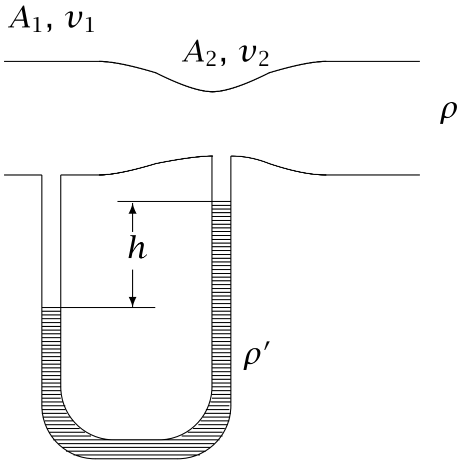
$$v = \sqrt{2gh}$$

In Wirklichkeit ist die Ausflußgeschwindigkeit vor allem an scharfkantigen Ausströmöffnungen erheblich kleiner. Das wird mit einer dimensionslosen Ausflußzahl μ berücksichtigt.

$$v = \mu\sqrt{2gh}$$

3.1.6. Die Venturi-Düse

Mit der Venturi-Düse bestimmt man durch Druckdifferenzmessung die Strömungsgeschwindigkeit und die Durchflußmenge einer Flüssigkeit (eines Gases).



Die Kontinuitätsgleichung liefert:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$$

Die Bernoulli-Gleichung liefert:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right) v_1^2$$

Die Differenzdruckmessung liefert:

$$\Delta p = (\rho' - \rho) g h$$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit:

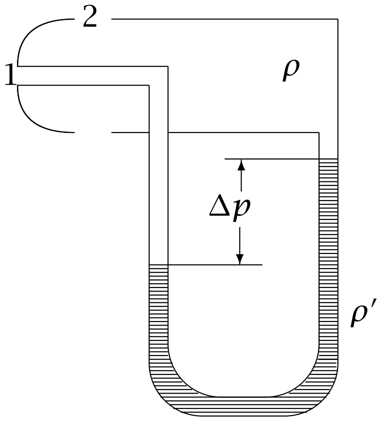
$$v_1 = A_2 \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho(A_1^2 - A_2^2)}}$$

Für die Durchflußmenge gilt:

$$V = A_1 v_1$$

3.1.7. Das Prandtl´sche Staurohr

Mit dem Prandtl´schen Staurohr mißt man mittels Druckdifferenzmessung den dynamischen Druck eines Gases.



Die Bernoulli-Gleichung liefert mit $v_2 = 0$:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2$$
$$p_2 - p_1 = \Delta p = \frac{1}{2}\rho v_1^2$$

Die Differenzdruckmessung liefert:

$$\Delta p = (\rho' - \rho)gh \text{ mit } \rho' >> \rho$$

Die Dichte der Manometerflüssigkeit ist viel größer als die Dichte des strömenden Gases.

$$\Delta p = \rho' gh$$

Hieraus folgt für die Geschwindigkeit:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho}}$$

3.1.8. Kräfte von strömenden Flüssigkeiten auf gekrümmte Rohre: Impulserhaltungssatz

Der eintretende Flüssigkeitsquerschnitt sei A_1, der austretende Flüssigkeitsquerschnitt sei A_2 und die jeweiligen Normalen seien um den Winkel φ gedreht. Man legt die eintretende Normale $\vec{n}_1$ der Einfachheit halber in positive y-Richtung $\vec{n}_1 = (0\,;\,1)$, die austretende Normale $\vec{n}_2$ hat dann die Richtung $\vec{n}_2 = (\sin\varphi\,;\,\cos\varphi)$. Die jeweiligen Beträge der Geschwindigkeiten seien konstant und über die Kontinuitätsgleichug miteinander verknüpft, die Geschwindigkeitsrichtungen zeigen in die jeweiligen Normalenrichtungen.

Es gilt also:

$$V = A_1|\vec{v}_1| = A_2|\vec{v}_2| \text{ mit } |\vec{v}_1| = v_1 \text{ und } |\vec{v}_2| = v_2$$
$$\vec{v}_1 = v_1\vec{n}_1 \text{ und } \vec{v}_2 = v_2\vec{n}_2$$

Bei nur einem Zufluß und nur einem Abfluß lautet der Impulserhaltungssatz bezogen auf die Flüssigkeit innerhalb des Rohres:

Die Summe aller angreifenden Kräfte bewirkt eine Impulsänderung

$$\sum \vec{F}_\mathrm{i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \rho V\vec{v}_2 - \rho V\vec{v}_1$$

Wird die Kraft auf das Wasser mit $\vec{F} = (F_x\,;\,F_y)$ bezeichnet, die von der einströmenden Flüssigkeit verursachte Kraft $\vec{F}_\mathrm{ein}$ und die von der ausströmenden Flüssigkeit verursachte Kraft $\vec{F}_\mathrm{aus}$, so lautet die Vektorgleichung:

$$\vec{F} + \vec{F}_\mathrm{ein} - \vec{F}_\mathrm{aus} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \Rightarrow \vec{F} = \vec{F}_\mathrm{aus} - \vec{F}_\mathrm{ein} + m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

In Komponenten geschrieben lautet dies:

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = p_2A_2\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} - p_1A_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + mv_2\begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} - mv_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um die Kraft $\vec{F}'$ auf das Rohr zu berechnen, muss man noch die vom äußeren Luftdruck p_0 bewirkte Kraft $\vec{F}_{\text{Luft}} = p_0(A_2\vec{n}_2 - A_1\vec{n}_1)$ berücksichtigen.
Es gilt:

$$\vec{F}' = \vec{F}_{\text{Luft}} - \vec{F}$$

Die Kraft $\vec{F}''$ mit der das Rohr festgehalten werden muss ist damit $\vec{F}'' = -\vec{F}'$
Anmerkung:
Hat ein System mehrere Einflüsse und mehrere Ausflüsse, so ersetzt man:

$$F_{\text{ein}} = \sum F_{i,\text{ein}}$$

die Summe aller von der einströmenden Flüssigkeit verursachten Kräfte

$$F_{\text{aus}} = \sum F_{j,\text{aus}}$$

die Summe aller von der ausströmenden Flüssigkeit verursachten Kräfte

$$m\vec{v}_1 = \sum m_i \vec{v}_{i,1}$$
$$m\vec{v}_2 = \sum m_j \vec{v}_{j,2}$$

und somit

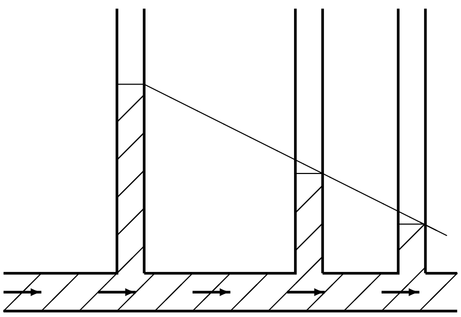
$$\sum m_j \vec{v}_{j,2} - \sum m_i \vec{v}_{i,1}$$

die Summe aller Impulsänderungen.

3.2. Strömungen mit innerer Reibung

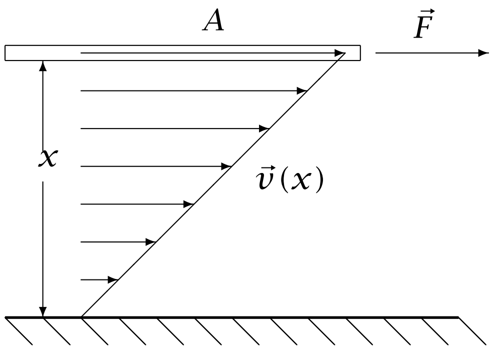
Strömungen mit innerer Reibung, aber ohne Wirbelbildung, bezeichnet man als laminar. Die innere Reibung ist eine Folge der Kraftwirkung zwischen den Molekülen (Viskosität). Sie ist besonders groß bei schlechter Verschiebbarkeit der Moleküle. Man spricht dann von Zähflüssigkeit.

3.2.1. Laminare Strömungen



Läßt man eine Flüssigkeit gleichmäßig mit der Geschwindigkeit v durch ein horizontales Rohr mit konstantem Querschnitt strömen, so müßte nach Bernoulli der statische Druck überall derselbe sein. Das bedeutet, dass zum durchströmen eines derartigen Rohres keine Druckdifferenz zwischen den Enden notwendig ist. Diese Aussage widerspricht jeglicher Erfahrung. Man stellt ein lineares Gefälle des statischen Drucks fest.

3.2.2. Newton´sche Reibung



Zwischen einem festen Boden und einer beweglichen Platte mit der Fläche A befinde sich eine Flüssigkeitsschicht der Dicke x. Da die am Boden und an der Platte angrenzenden Flüssigkeitsschichten an diesen haften, bildet sich beim Bewegen der Platte ein Geschwindigkeitsgefälle $\frac{d\vec{v}}{dx}$ aus. Dies ist auf die innere Reibung der Flüssigkeitsschichten zurückzuführen.

Es handelt sich also nicht um die Reibung zwischen festen und flüssigen Körpern.

$$\vec{F} = \eta A \frac{d\vec{v}}{dx}$$

3.2.3. Hagen-Poiseuille

Bei laminaren Strömungen haben die einzelnen Flüssigkeitsschichten unterschiedliche Geschwindigkeiten. Unmittelbar an den Wandungen ist sie am kleinsten. Die ein Rohr durchfließende Flüssigkeitsmenge berechnet sich unter Berücksichtigung der inneren Reibung zu:

$$V = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{(p_1 - p_2)}{l} R^4$$

Es gilt:

η: dynamische Viskosität mit der Einheit $\left[\frac{\mathrm{Ns}}{\mathrm{m}^2}\right]$
R: Radius des durchflossenen Rohres mit glatter Wandung
l: Länge des Rohres

3.2.4. Strömungsprofil eines Rohres mit dem Radius R

Das Strömungsprofil ist parabolisch.

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

Die maximale Geschwindigkeit beträgt:

$$v_{\max} = v(0) = \frac{\Delta p}{4\eta l} R^2$$

Die mittlere Geschwindigkeit beträgt:

$$\bar{v} = \frac{V}{A} = \frac{\Delta p}{8\eta l} R^2 = \frac{1}{2} v_{\mathrm{max}}$$

Daraus ergibt sich eine Reibungskraft

$$F_{\mathrm{R}} = \Delta p A = \frac{8\eta l V}{R^2} = 8\pi\eta l \bar{v}$$

3.2.5. Stokes

Die Bewegung einer kleinen Kugel in einer zähen Flüssigkeit erfährt folgende Reibungskraft:

$$F_{\mathrm{R}} = 6\pi\eta r v$$

Wird eine Kugel (mit r, $V_{\mathrm{K}} = \frac{4}{3}\pi r^3$, ρ_{K}) in ein zähes Medium (mit ρ_{Fl}, η) gegeben, so sinkt sie mit konstanter Geschwindigkeit v. Konstante Sinkgeschwindigkeit fordert, dass die Summe aller angreifenden Kräfte Null ist.
Es gilt:

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$

Damit wird

$$F_{\mathrm{A}} - F_{\mathrm{G}} + F_{\mathrm{R}} = 0$$

$$\rho_{\mathrm{Fl}} g V_{\mathrm{K}} - \rho_K g V_{\mathrm{K}} + 6\pi\eta r v = 0$$

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}})}{9v}$$

3.2.6. Strömungswiderstand

$$F_{\mathrm{W}} = \frac{1}{2} c A \rho v^2$$

mit dem formabhängigen Widerstandsbeiwert c (dimensionslos) und der angeströmten Fläche A

3.2.7. Reynolds´sche Zahl

Erreicht die Reynolds´sche Zahl bestimmte Grenzwerte, so schlägt eine laminare Strömung in eine turbulente Strömung um. Für die Strömung in glatten Röhren hat die kritische Reynolds-Zahl den Wert:

$$Re_{\mathrm{krit}} \approx 2320$$

Ansonsten berechnet sie sich wie folgt:

$$Re = \frac{d\rho v}{\eta}$$

Es gilt:

d: eine für den jeweiligen Körper charakteristische Länge (z. B. Kugelradius, Rohrradius, ...)
ρ: Dichte des strömenden Mediums
η: Dynamische Viskosität
v: Strömungsgeschwindigkeit

3.2.8. Rohrreibungszahl λ bei laminaren Strömungen

Druckabfall einer laminaren Strömung

$$\Delta p = \frac{8\eta l V}{\pi R^4}$$

mit

$$R^4 = \frac{d^4}{16}, V = \frac{\pi d^4}{4}\bar{v}$$

und

$$Re = \frac{d\rho\bar{v}}{\eta}$$

folgt

$$\Delta p = \frac{64}{Re}\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2$$

mit

$$\lambda = \frac{64}{Re}$$

folgt

$$\Delta p = \lambda\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2$$

Die Bernouilli-Gleichung mit Reibung lautet

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \Delta p$$

Mit $\Delta p = \lambda\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2$ kann man eine sogenannte Reibungsverlusthöhe h_V berechnen.

$$\Delta p = \rho g h_V = \lambda\frac{l}{d}\frac{1}{2}\rho\bar{v}^2$$

oder

$$h_\mathrm{V} = \lambda\frac{l}{d}\frac{1}{2}\frac{\bar{v}^2}{g}$$

3.3. Turbulente Strömungen

Bei turbulenten Strömungen entstehen Wirbel. Es handelt sich um eine regellose Bewegung der Teilchen, ihre Stromlinien sind verflochten. Die Grenze zwischen zwischen der laminaren und der turbulenten Strömung wird bei Rohren und Kanälen durch die kritische Reynoldszahl gesetzt. $Re_\mathrm{krit} = 2320$

Für turbulente Strömungen muss auch die Rauhigkeit k [mm] beachtet werden. Man gibt in der Regel $\frac{d}{k}$ an, die sogenannte relative Wandrauhigkeit. Die Reynoldszahl sei $Re = \frac{d\rho\bar{v}}{\eta} > Re_\mathrm{krit}$

3.3.1. Rohrreibungszahl λ bei turbulenten Strömungen

Man unterscheidet grundsätzlich:

- **Hydraulisch glattes Verhalten an einer Wand**

  $$\frac{k}{d} \cdot Re < 65$$

  oder

  $$\lambda = \lambda(Re) = \frac{0,3164}{\sqrt[4]{Re}}$$

- **Hydraulisch rauhes Verhalten an einer Wand**

  $$\frac{k}{d} \cdot Re > 1300$$

  oder

  $$\lambda = \lambda(\frac{d}{k}) = \frac{1}{(2\lg\frac{d}{k} + 1,14)^2}$$

- **Hydraulisches Verhalten im Übergangsbereich**

  $$65 < \frac{k}{d} \cdot Re < 1300$$

  oder

  $$\lambda = \lambda(Re, \frac{d}{k})$$
  $$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\lg\left[\frac{2,51}{Re\sqrt{\lambda}} + \frac{0,269}{\frac{d}{k}}\right]$$

Die Werte sind einem Diagramm zu entnehmen.