



# Wellenlehre

Zusammenfassung

- **Grundgrößen und ihre Einheiten**
- **Fortschreitende Wellen**
- **Stehende Wellen**
- **Interferenz**
- **Schallwellen**

**Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.**

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Übersicht der verwendeten physikalischen Größen</b>	<b>3</b>
1.1. Die wichtigsten physikalischen Größen bei Wellen . . . . .	3
<b>2. Wellen</b>	<b>4</b>
2.1. Wellenarten . . . . .	4
2.1.1. Transversalwellen . . . . .	4
2.1.2. Longitudinalwellen . . . . .	4
2.1.3. Die Wellenlänge . . . . .	4
2.2. Darstellung sinusförmiger Wellen . . . . .	4
2.2.1. Die Wellengleichung . . . . .	4
2.2.2. Äquivalente Darstellungsmöglichkeiten der Wellengleichung . . . . .	5
2.3. Interferenz mechanischer Wellen . . . . .	5
2.3.1. Konstruktiv . . . . .	6
2.3.2. Destruktiv . . . . .	6
2.4. Stehende Wellen . . . . .	7
2.5. Stehende Wellen, die durch Reflexion entstehen . . . . .	8
2.5.1. Reflexion mechanischer Wellen an einem festen Ende . . . . .	8
2.5.2. Reflexion mechanischer Wellen an einem losen Ende . . . . .	8
2.5.3. Zwei feste Enden (z. B. eine eingespannte Saite) . . . . .	8
2.5.4. Zwei lose Enden (z. B. eine beidseitig offene Röhre) . . . . .	9
2.5.5. Ein festes und ein loses Ende (z. B. eine halboffene Röhre) . . . . .	10
2.6. Vergleich fortschreitender und stehender Wellen . . . . .	11
2.7. Mittlere Leistung bei einer sinusförmigen Welle . . . . .	11
2.8. Der Doppler-Effekt . . . . .	12
2.8.1. Quelle bewegt sich, der Beobachter ruht . . . . .	12
2.8.2. Quelle ruht, der Beobachter bewegt sich . . . . .	13
2.8.3. Quelle und Beobachter bewegen sich aufeinander zu . . . . .	13
2.8.4. Quelle und Beobachter bewegen sich voneinander weg . . . . .	13
2.9. Der Doppler-Effekt für Lichtwellen . . . . .	14
2.10. Schallintensität und Schallpegel . . . . .	15

## 1. Übersicht der verwendeten physikalischen Größen

### 1.1. Die wichtigsten physikalischen Größen bei Wellen

Physikalische Größe	Formelbuchstaben	Einheit
Auslenkung (Elongation):	$y(t, x)$	[m]
Maximalauslenkung:	$\hat{y}$	[m]
Ausbreitungsgeschwindigkeit:	$c$	$[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$
Frequenz:	$f$	$[\frac{1}{\text{s}}]$
Kreisfrequenz:	$\omega$	$[\frac{1}{\text{s}}]$
Wellenlänge:	$\lambda$	[m]
Wellenzahl:	$k$	$[\frac{1}{\text{m}}]$
Phase:	$\varphi$	[1]
Gangunterschied:	$\delta$	[m]
Massenbelegung:	$\mu$	$[\frac{\text{kg}}{\text{m}}]$
Leistung:	$P$	[W]
Schallintensität:	$I$	$[\frac{\text{W}}{\text{m}^2}]$

## 2. Wellen

### 2.1. Wellenarten

#### 2.1.1. Transversalwellen

Die Auslenkung  $y(t, x)$  (Elongation) und auch die Teilchengeschwindigkeit (Schnelle  $v(t, x)$ ) erfolgt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung.

Es handelt sich um eine fortschreitende Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \text{const.}$

(z. B. Seilwellen)

Bei einer Sinuswelle ist dies ein raumzeitlicher Vorgang, bei dem die elastisch aneinander gekoppelten Masseteilchen des Trägers erzwungene Sinusschwingungen ausführen, deren Phasenverschiebung gegenüber dem Erreger in der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  linear zunimmt.

#### 2.1.2. Longitudinalwellen

Die Auslenkung  $y(t, x)$  (Elongation) und auch die Teilchengeschwindigkeit (Schnelle  $v(t, x)$ ) erfolgt parallel zur Ausbreitungsrichtung.

Es handelt sich um eine fortschreitende Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c = \text{const.}$

(z. B. Schallwellen)

Schwingen die Teilchen in Ausbreitungsrichtung, so herrscht dort Überdruck, schwingen die Teilchen gegen die Ausbreitungsrichtung, so herrscht Unterdruck.

Bei Teilchen maximaler Auslenkung ist die Teilchengeschwindigkeit (Schnelle  $v(t, x)$ ) Null und der Druck ungestört.

#### 2.1.3. Die Wellenlänge

Die Wellenlänge  $\lambda$  ist die Entfernung zweier benachbarter Wellenberge, allgemein zwischen zwei benachbarten Punkten gleicher Phase.

### 2.2. Darstellung sinusförmiger Wellen

#### 2.2.1. Die Wellengleichung

Der Wellenträger besteht aus Massenpunkten (Teilchen), die alle um  $\Delta t = \frac{x}{c}$  zeitlich verzögert eine sinusförmige Schwingung durchführen.

Für das Anfangsteilchen gelte:

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t)$$

Je nach dem, wie das Anfangsteilchen erregt wird, gilt für dieses allgemein:

$$y(t) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$$

$\varphi_0$  hängt hierbei von den Anfangsbedingungen der Wellenerregung ab.

Es sind:

$$y(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

$$v(t, x) = \dot{y}(t, x) = \underbrace{\omega \hat{y}}_{\hat{v}} \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

$$a(t, x) = \ddot{y}(t, x) = \underbrace{-\omega^2 \hat{y}}_{\hat{a}} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Das Minuszeichen im Argument der Sinus-Funktion besagt, dass sich die Welle mit der konstanten Geschwindigkeit  $c$  in positive  $x$ -Richtung ausbreitet.

Ein Pluszeichen würde bedeuten, dass sich die Welle in negative  $x$ -Richtung ausbreitet.

### Benutzte physikalische Größen

Periode:	$T$
Frequenz:	$f = \frac{1}{T}$
Kreisfrequenz:	$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$
Ort:	$x$
Wellenlänge:	$\lambda$ (Abstand zweier benachbarter Wellenberge)
Wellenzahl:	$k = \frac{2\pi}{\lambda}$
Ausbreitungsgeschwindigkeit:	$c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$
Phase:	$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{x}{\lambda} = \frac{t}{T}$

### 2.2.2. Äquivalente Darstellungsmöglichkeiten der Wellengleichung

$$y(t, x) = \hat{y} \sin \left[ \omega \cdot \left( t - \frac{x}{c} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$y(t, x) = \hat{y} \sin[k(c \cdot t - x) + \varphi_0]$$

$$y(t, x) = \hat{y} \sin \left[ 2\pi \left( \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$$

$$y(t, x) = \hat{y} \sin \left[ 2\pi \left( f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right]$$

### 2.3. Interferenz mechanischer Wellen

Zwei sinusförmige Wellen  $y_1(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$  und  $y_2(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$  derselben Wellenlänge  $\lambda$ , derselben Frequenz  $f$  und derselben Amplitude  $\hat{y}$ , jedoch unterschiedlicher Phase  $\varphi$  breiten sich entlang desselben Seils in dieselbe Richtung aus.

Die resultierende Welle  $y(t, x)$  erhält man mittels des Superpositionsprinzips durch Addition der beiden Wellen, also:

$$y(t, x) = y_1(t, x) + y_2(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$$

$$y(t, x) = \hat{y} [\sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)]$$

Mit dem trigonometrischen Trick

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(x + y) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(x - y) \right]$$

folgt für die überlagerte Welle  $y(t, x)$

$$y(t, x) = \underbrace{2\hat{y} \cos \left( \frac{1}{2}\varphi \right)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin \left( \omega \cdot t - k \cdot x + \frac{1}{2}\varphi \right)}_{\text{Schwingungsterm}}$$

### 2.3.1. Konstruktiv

Die resultierende Amplitude wird bei diesem Gangunterschied maximal (Verstärkung).

Dies ist der Fall, wenn  $\cos \left( \frac{1}{2}\varphi \right) = \pm 1$  gilt:

$$\cos \left( \frac{1}{2}\varphi \right) = \pm 1 \text{ liefert } \frac{1}{2}\varphi = n\pi$$

$$\Rightarrow \varphi = \underbrace{2n}_{\text{ger}} \pi$$

geradzahlige Vielfache von  $\pi$

Mit der Beziehung zwischen dem Gangunterschied  $\delta$  und der Wellenlänge  $\lambda$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \delta = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \lambda$$

Der Gangunterschied beträgt also:

$$\delta = \frac{2n\pi}{2\pi} \cdot \lambda = n\lambda, \text{ mit } n \in \mathbb{N}^0, \text{ also } \delta = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$$

Ganzzahlige Vielfache der Wellenlänge.

### 2.3.2. Destruktiv

Die resultierende Amplitude wird bei diesem Gangunterschied Null (Auslöschung).

Dies ist der Fall, wenn  $\cos \left( \frac{1}{2}\varphi \right) = 0$  gilt:

$$\cos \left( \frac{1}{2}\varphi \right) = 0 \text{ liefert } \frac{1}{2}\varphi = (2n + 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \varphi = \underbrace{(2n + 1)}_{\text{ung}} \pi \text{ ungeradzahlige Vielfache von } \pi$$

Mit der Beziehung zwischen dem Gangunterschied  $\delta$  und der Wellenlänge  $\lambda$

$$\frac{\delta}{\lambda} = \frac{\varphi}{2\pi} \Rightarrow \delta = \frac{\varphi}{2\pi} \cdot \lambda$$

Der Gangunterschied beträgt also:

$$\delta = \frac{(2n + 1)\pi}{2\pi} \cdot \lambda = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ mit } n \in \mathbb{N}^0, \text{ also } \delta = \frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2}, 5\frac{\lambda}{2}, \dots$$

Ungeradzahlige Vielfache der halben Wellenlänge.

## 2.4. Stehende Wellen

Stehende Wellen  $y(t, x)$  entstehen durch Überlagerung (Interferenz) zweier entgegengesetzt laufender sinusförmiger Wellen  $y_1(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x)$  und  $y_2(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$  gleicher Wellenlänge  $\lambda$ , Frequenz  $f$  und Amplitude  $\hat{y}$ .

Die resultierende stehende Welle  $y(t, x)$  erhält man mittels des Superpositionsprinzips durch Addition der beiden Wellen, also:

$$y(t, x) = y_1(t, x) + y_2(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x) \\ = \hat{y} [\sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)]$$

Mit dem trigonometrischen Trick

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left[ \frac{1}{2}(x + y) \right] \cos \left[ \frac{1}{2}(x - y) \right]$$

folgt für die überlagerte Welle  $y(t, x)$

$$y(t, x) = \underbrace{2\hat{y} \sin(k \cdot x)}_{\text{Amplitude}} \cdot \underbrace{\sin(\omega \cdot t)}_{\text{Schwingungsterm}}$$

Es entstehen dabei Bewegungs- oder Schnelleknoten, Teilchen der Welle, die dauernd in Ruhe bleiben - bei denen die Amplitude verschwindet.

$$\sin(k \cdot x) = 0 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right) = 0 \\ \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = n\pi \text{ mit } n \in \mathbb{N}^0$$

Dies liefert

$$x = n \frac{\lambda}{2}$$

Der Abstand zweier benachbarter Knoten beträgt  $\frac{\lambda}{2}$ .

Zwischen zwei benachbarten Knoten befinden sich sogenannte Bewegungs- oder Schnellebäuche, Teilchen mit maximaler Auslenkung (Elongation).

$$\sin(kx) = \pm 1 \Leftrightarrow \sin \left( \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right) = \pm 1 \\ \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \text{ mit } n \in \mathbb{N}^0$$

Dies liefert

$$x = \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{2}$$

Der Abstand zweier benachbarter Bäuche beträgt ebenfalls  $\frac{\lambda}{2}$ .

Links und rechts eines Knotens schwingen die Teilchen gegenphasig. Sämtliche Teilchen haben verschiedene Bewegungsamplituden, sie erreichen sie zum selben Zeitpunkt. Im Moment maximaler Auslenkung sind alle Teilchen in Ruhe. Alle Teilchen gehen gleichzeitig durch die Nullage und haben dort maximale Geschwindigkeit (Schnelle).

Es findet kein Energietransport statt.

## 2.5. Stehende Wellen, die durch Reflexion entstehen

Stehende Wellen als Überlagerung (Superposition) einer Welle mit ihrer am festen/losen Ende reflektierten Welle:

Es kommt zur Ausbildung einer stehenden Welle bei jeder Frequenz.

### 2.5.1. Reflexion mechanischer Wellen an einem festen Ende

- Berg wird zu Tal und Tal wird zu Berg
- Richtung der Schnelle dreht sich um  
Phasensprung um  $\pi$

- Knoten am Ende

Konstruktion: Punktspiegelung am Knoten am Ende

$$y(t, x) = y_{\text{hin}}(t, x) + y_{\text{rück}}(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \pi)$$

- Hin- und rücklaufende Welle bilden eine stehende Welle aus:

$$y(t, x) = -2\hat{y} \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

### 2.5.2. Reflexion mechanischer Wellen an einem losen Ende

- Berg bleibt Berg, Tal bleibt Tal
- Richtung der Schnelle wird beibehalten  
Kein Phasensprung

- Bauch am Ende

Konstruktion: Achsenspiegelung an Achse parallel zur  $y$ -Achse am Bauch am Ende

$$y(t, x) = y_{\text{hin}}(t, x) + y_{\text{rück}}(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x)$$

- Hin- und rücklaufende Welle bilden eine stehende Welle aus:

$$y(t, x) = 2\hat{y} \sin(k \cdot x) \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Ist die Welle beidseitig eingesperrt, so gibt es nur stehende Wellen bei bestimmten Frequenzen, den sogenannten Eigenfrequenzen.

### 2.5.3. Zwei feste Enden (z. B. eine eingespannte Saite)

An den festen Enden bei  $x = 0$  und  $x = L$  ist jeweils ein Knoten der Schwingung. Die festen Enden befinden sich im Abstand  $L$  auseinander.

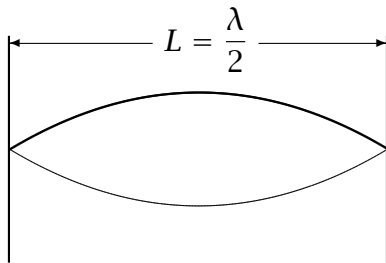
$$y(t, x) = y_{\text{hin}}(t, x) + y_{\text{refl}}(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi)$$
$$y(t, x) = 2\hat{y} \underbrace{\cos\left(k \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right)}_{a(x)} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Bedingung, dass sich eine stehende Welle ausbilden kann:

$$\begin{aligned}
 a(0) = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = (2s + 1)\frac{\pi}{2} \\
 a(L) = 0 &\Leftrightarrow \cos\left(kL + \frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow kL + (2s + 1)\frac{\pi}{2} = (2m + 1)\frac{\pi}{2} \\
 &\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = \underbrace{(m - s)}_n \pi \\
 &\Rightarrow L = n\frac{\lambda}{2} \text{ physikalisch sinnvoll f\u00fcr } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$n = 1$  entspricht dann der Grundfrequenz  $f_1$ , d. h. der kleinst m\u00f6glichen Eigenfrequenz. F\u00fcr Oberschwingungen gilt dann mit

$$f_1 = \frac{c}{2L} \Rightarrow f_n = n f_1$$



#### 2.5.4. Zwei lose Enden (z. B. eine beidseitig offene R\u00f6hre)

An den losen Enden  $x = 0$  und  $x = L$  ist jeweils ein Bauch der Schwingung. Die losen Enden befinden sich im Abstand  $L$  auseinander.

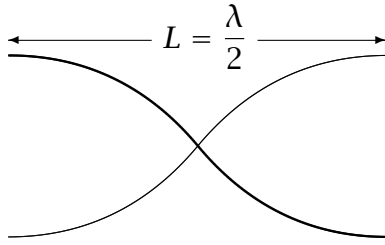
$$\begin{aligned}
 y(t, x) &= y_{\text{hin}}(t, x) + y_{\text{refl}}(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi) \\
 y(t, x) &= 2\hat{y} \underbrace{\cos\left(k \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right)}_{a(x)} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Bedingung, dass sich eine stehende Welle ausbilden kann:

$$\begin{aligned}
 a(0) = \pm 1 &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = s\pi \\
 a(L) = \pm 1 &\Leftrightarrow \cos\left(kL + \frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow kL + s\pi = m\pi \\
 &\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = \underbrace{(m - s)}_n \pi \\
 &\Rightarrow L = n\frac{\lambda}{2} \text{ physikalisch sinnvoll f\u00fcr } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$n = 1$  entspricht dann der Grundfrequenz  $f_1$ , d. h. der kleinst m\u00f6glichen Eigenfrequenz. F\u00fcr Oberschwingungen gilt dann mit

$$f_1 = \frac{c}{2L} \Rightarrow f_n = n f_1$$



### 2.5.5. Ein festes und ein loses Ende (z. B. eine halboffene Röhre)

An einem Ende befindet sich ein Knoten  $x = 0$ , am anderen Ende ein Bauch der Schwingung  $x = L$ . Die beiden Enden befinden sich im Abstand  $L$  auseinander.

$$y(t, x) = y_{\text{hin}}(t, x) + y_{\text{refl}}(t, x) = \hat{y} \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + \hat{y} \sin(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi)$$

$$y(t, x) = 2\hat{y} \underbrace{\cos\left(k \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right)}_{a(x)} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Bedingung, dass sich eine stehende Welle ausbilden kann:

$$a(0) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = (2s + 1)\frac{\pi}{2}$$

$$a(L) = \pm 1 \Leftrightarrow \cos\left(kL + \frac{\varphi}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow kL + (2s + 1)\frac{\pi}{2} = m\pi$$

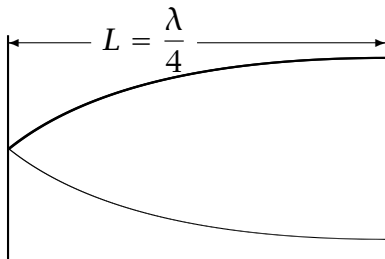
$$\Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = (2\underbrace{(m - s)}_n) - 1) \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow L = (2n - 1)\frac{\lambda}{4} \text{ physikalisch sinnvoll für } n \in \mathbb{N}$$

$n = 1$  entspricht dann der Grundfrequenz  $f_1$ , d. h. der kleinst möglichen Eigenfrequenz.

Für die Oberschwingungen gilt dann mit

$$f_1 = \frac{c}{4L} \Rightarrow f_n = (2n - 1)f_1$$



## 2.6. Vergleich fortschreitender und stehender Wellen

Fortschreitende Welle	Stehende Welle
Das räumliche Kurvenbild erfährt eine dauernde Verschiebung mit der Geschwindigkeit $c$ .	Das räumliche Kurvenbild bleibt auf der Stelle; es erfährt periodische Streckung/Stauchung in $y$ -Richtung
Alle Punkte haben gleiche Bewegungsamplitude, erreichen sie aber nacheinander, und zwar um so später, je weiter sie vom Erreger entfernt sind.	Die Bewegungsamplitude ist in den Schnellenbäuchen am größten. Sie nimmt nach den Knoten zu ab und ist am Knoten gleich Null.
Zu keiner Zeit ist überall Stillstand.	Zum Zeitpunkt größter Auslenkung ist überall Stillstand.
Es ist niemals überall die Auslenkung Null.	Alle Punkte gehen gleichzeitig durch die Gleichgewichtslage und haben dort maximale Geschwindigkeit.
Kein Punkt ist ständig in Ruhe.	Die Knoten sind ständig in Ruhe.
Jeder Punkt auf der Strecke einer Wellenlänge hat eine andere Phase.	Alle Punkte zwischen zwei benachbarten Knoten haben gleiche Phase.
Modell: Schatten einer rotierenden Schraubenlinie	Modell: Schattenbild einer rotierenden Sinuslinie
Energie schreitet fort.	Energie bleibt im Träger; kein Energietransport

## 2.7. Mittlere Leistung bei einer sinusförmigen Welle

Die mittlere Leistung  $\bar{P}$  einer sinusförmigen Welle (gemittelt über eine Wellenlänge) auf einem gespannten Seil ist gegeben durch

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \mu c \omega^2 \hat{y}^2$$

$$c = f \lambda = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{\rho A L}{L} = \rho A$$

Folgende Größen werden benützt:

$c$	Wellengeschwindigkeit in $[\frac{\text{m}}{\text{s}}]$
$f = \frac{\omega}{2\pi}$	Frequenz der Welle in $[\frac{1}{\text{s}}]$
$\lambda$	Wellenlänge in [m]
$F$	Spannkraft des Seils in [N]
$\mu$	Massenbelegung des Seils in $[\frac{\text{kg}}{\text{m}}]$
$A$	Querschnittsfläche des Seils in $[\text{m}^2]$
$\rho$	Dichte des Seils in $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}]$

Somit sieht man, dass die mittlere Leistung sowohl von Material und Spannkraft ( $c$  und  $\mu$ ) als auch von den wellenerzeugenden Faktoren  $\omega$  und  $\hat{y}$  abhängt.

Anmerkung:

Man nennt die mittlere Leistung auch **gemittelte Transportrate der Energie** (potentielle Energie und kinetische Energie).

## 2.8. Der Doppler-Effekt

### 2.8.1. Quelle bewegt sich, der Beobachter ruht

Es entsteht beim ruhenden Beobachter eine Wellenlängenänderung, denn die Wellenfronten werden vor der Quelle (in Bewegungsrichtung) zusammengedrängt und hinter der Quelle (entgegen der Bewegungsrichtung) auseinandergezogen.

$$\lambda_{\text{vor}} = \frac{c - v_Q}{f}$$

$$\lambda_{\text{hinter}} = \frac{c + v_Q}{f}$$

Diese Wellenlängen ziehen über den ruhenden Beobachter mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  hinweg. Er hört die von der Quelle ausgesandte Frequenz  $f$

- Die Quelle bewegt sich auf Beobachter zu, die Wellenfronten werden vor dem Beobachter zusammengedrängt wahrgenommen, also die Frequenz erhöht:

$$f_{\text{vor}} = \frac{c}{\lambda_{\text{vor}}} = f \frac{c}{c - v_Q} = f \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{1 - \frac{v_Q}{c}} \right)}_{>1 \text{ für } v_Q < c}$$

- Die Quelle bewegt sich vom Beobachter weg, die Wellenfronten werden hinter dem Beobachter auseinandergezogen wahrgenommen, also die Frequenz erniedrigt:

$$f_{\text{hinter}} = \frac{c}{\lambda_{\text{hinter}}} = f \frac{c}{c + v_Q} = f \cdot \underbrace{\left( \frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c}} \right)}_{<1 \text{ für } v_Q < c}$$

- Hieraus ergibt sich das Frequenzverhältnis:

$$\frac{f_{\text{vor}}}{f_{\text{hinter}}} = \frac{c + v_Q}{c - v_Q}$$

### 2.8.2. Quelle ruht, der Beobachter bewegt sich

Es entsteht eine Ausbreitungsgeschwindigkeitsänderung, denn für den bewegten Beobachter bleibt die Wellenlänge erhalten.

- Bewegt sich der Beobachter auf die ruhende Quelle zu, so erreichen ihn die von der Quelle ausgesandten Wellenfronten früher, er hört also die ausgesandte Frequenz  $f$  erhöht:

$$f_{\text{zu}} = \frac{c_{\text{zu}}}{\lambda} = \frac{c + v_B}{\lambda} = f \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right)$$

- Bewegt sich der Beobachter von der ruhenden Quelle weg, so erreichen ihn die von der Quelle ausgesandten Wellenfronten verspätet, er hört die ausgesandte Frequenz  $f$  erniedrigt:

$$f_{\text{weg}} = \frac{c_{\text{weg}}}{\lambda} = \frac{c - v_B}{\lambda} = f \cdot \left(1 - \frac{v_B}{c}\right)$$

- Hieraus ergibt sich das Frequenzverhältnis:

$$\frac{f_{\text{zu}}}{f_{\text{weg}}} = \frac{c + v_B}{c - v_B}$$

### 2.8.3. Quelle und Beobachter bewegen sich aufeinander zu

Es entsteht eine Ausbreitungsgeschwindigkeitsänderung und eine Wellenlängenänderung.

Die Quelle bewege sich mit  $v_Q$  auf den bewegten Beobachter zu und der Beobachter bewege sich mit  $v_B$  auf die bewegte Quelle zu. Die ausgesandte Frequenz  $f$  wird wie folgt gehört:

$$f_{\text{rel}} = f_{\text{vor}} \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = f \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 - \frac{v_Q}{c}}\right)}_{f_{\text{vor}}} \cdot \left(1 + \frac{v_B}{c}\right) = f \cdot \frac{1 + \frac{v_B}{c}}{1 - \frac{v_Q}{c}} = f \cdot \frac{c + v_B}{c - v_Q}$$

Die einfachen Fälle sind hier mitenthalten:

Ruhender Beobachter:  $v_B = 0$

Ruhende Quelle:  $v_Q = 0$

### 2.8.4. Quelle und Beobachter bewegen sich voneinander weg

Es entsteht eine Ausbreitungsgeschwindigkeitsänderung und eine Wellenlängenänderung.

Die Quelle bewege sich mit  $v_Q$  vom bewegten Beobachter weg und der Beobachter bewege sich mit  $v_B$  von der bewegten Quelle weg. Die ausgesandte Frequenz  $f$  wird wie folgt gehört:

$$f_{\text{rel}} = f_{\text{hinter}} \cdot \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = f \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c}}\right)}_{f_{\text{hinter}}} \cdot \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) = f \cdot \frac{1 - \frac{v_B}{c}}{1 + \frac{v_Q}{c}} = f \cdot \frac{c - v_B}{c + v_Q}$$

Die einfachen Fälle sind hier mitenthalten:

Ruhender Beobachter:  $v_B = 0$

Ruhende Quelle:  $v_Q = 0$

**Allgemein:**

$$f_{\text{rel}} = f \cdot \frac{c \pm v_B}{c \mp v_Q}$$

Es gibt also vier mögliche Kombinationen.

- Die oberen Vorzeichen gelten, wenn sich die Quelle und der Beobachter aufeinander zu bewegen.
- Die unteren Vorzeichen gelten, wenn sich die Quelle und der Beobachter voneinander weg bewegen.

**Zusammenfassend:**

- Bewegt sich die Quelle, so ändert sich die Wellenlänge.
- Bewegt sich der Beobachter, so ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit.
- Bewegt sich die Quelle und der Beobachter, so ändert sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit und die Wellenlänge.

## 2.9. Der Doppler-Effekt für Lichtwellen

Bei Lichtwellen (und anderen elektromagnetischen Wellen) hängt die wahrgenommene Frequenz  $f$  nur von der Relativgeschwindigkeit  $\vec{v}$  zwischen Quelle und Beobachter ab und  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$  beschreibt die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle und  $f_0$  die ausgesandte Frequenz.

- Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist von der Quelle weg gerichtet

Es gilt

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}$$

und für den Fall  $v \ll c$

$$f \approx f_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) < f_0$$

und damit wird  $\lambda > \lambda_0$  und man spricht von **Rotverschiebung**.

- Die Geschwindigkeit  $\vec{v}$  ist zu der Quelle hin gerichtet

Es gilt

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}$$

und für den Fall  $v \ll c$

$$f \approx f_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) > f_0$$

und damit wird  $\lambda < \lambda_0$  und man spricht von **Blauverschiebung**.

### Anmerkung:

Den Ausdruck  $\Delta\lambda = |\lambda - \lambda_0|$  nennt man in der Astronomie die **Doppler-Verschiebung der Wellenlänge** der Lichtwelle.

Die Geschwindigkeit, mit der ein Stern radial auf die Erde zufliegt oder von der Erde wegfliegt, berechnet sich mit Hilfe der Dopplerverschiebung zu

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}c$$

## 2.10. Schallintensität und Schallpegel

Die Schallintensität  $I(r)$  nimmt mit  $\frac{1}{r^2}$  ab, weil Kugeloberflächen um die Schallquelle proportional zu  $r^2$  zunehmen. Die Amplitude  $y(r)$  der Schallwelle nimmt mit  $\frac{1}{r}$  ab.

Es gilt also:

$$I(n \cdot r) = \frac{1}{n^2}I(r)$$

$$y(n \cdot r) = \frac{1}{n}y(r)$$

Der Schallpegel  $L$  ist definiert als:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I(r)}{I_0}$$

mit der Hörschwelle

$$I_0 = 10^{-12} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

und wird in dB gemessen.

### Anmerkung:

Sind mehrere Schallquellen  $I_i(r_i)$  vorhanden, also  $I_1(r_1), I_2(r_2), \dots, I_n(r_n)$ , so addieren sich diese zur Gesamtschallintensität

$$I_{\text{ges}}(r) = I_1(r_1) + I_2(r_2) + \dots + I_n(r_n)$$

Aber:

Die Einzelschallpegel  $L_i$  addieren sich **nicht** zum Gesamtschallpegel  $L_{\text{ges}}$ .

Man bestimmt erst die Einzelschallintensitäten  $I_i(r_i)$  aus den gegebenen Einzelschallpegeln  $L_i$  und addiert diese auf zur Gesamtschallintensität  $I_{\text{ges}}(r)$ .

Aus diesem bestimmt man dann den Gesamtschallpegel  $L_{\text{ges}}$ .

$$L_{\text{ges}} = 10 \cdot \lg \frac{I_{\text{ges}}(r)}{I_0}$$