Mathematische Grundlagen

für den Grundkurs Physik

› Analysis
› Vektorrechnung
› Geometrie

Anregungen sowie Korrekturhinweise sind herzlich willkommen.

© Jürgen Gilg · Austr. 59 · 70376 Stuttgart · Tel.: 0711/59 27 88 · E-Mail: gilligan01@worldonline.de **Juni 2004**

1 Analysis

1.1 Termumformungen

Gegeben sei folgende Gleichung, die nach *v* aufzulösen ist.

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}cx^2$$

Alle Terme (in Gedanken) mit Vorzeichen und Rechenzeichen versehen

$$+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 + m\cdot g\cdot h = +\frac{1}{2}\cdot c\cdot x^2$$

Durch Äquivalenzumformungen (ÄU) – also Umformungen, die die Lösungsmenge einer Gleichung nicht verändern – Schritt für Schritt nach *v* auflösen (niederste Rechenarten zuerst).
Zu den ÄU gehören Addition, Subtraktion, Multiplikation (ohne Null), Division (ohne Null).
Potenzieren und Wurzelziehen gehören nicht zu den ÄU, da diese evtl. die Lösungsmenge der Gleichung verändern können. (Gerade Potenz einer negativen Zahl wird positiv.) Deshalb hier immer eine Probe machen.

Wie ist *v* strukturiert?
Rangfolge der Rechenoperationen
Man kennt sicherlich den Spruch:
'Klammer vor Potenz vor Punkt vor Strich'
Auf die Aufgabenstellung angewandt:

- Potenz 2
- Multiplikation/Division mit den gleichberechtigten Faktoren $\frac{1}{2}$ und m
- Addition/Subtraktion mit den gleichberechtigten Termen $m\cdot g\cdot h$ und $\frac{1}{2}\cdot c\cdot x^2$

Strategie:
Niederste Rechenoperation zuerst, also Additionen und Subtraktionen
'PLUS wechselt die Seite der Gleichung mit MINUS'
'MINUS wechselt die Seite der Gleichung mit PLUS'

$$+\frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 = -m\cdot g\cdot h + \frac{1}{2}\cdot c\cdot x^2$$

Dann zweitniederste Rechenoperation, also Multiplikationen und Divisionen
'MAL wechselt die Seite der Gleichung mit GETEILT (oder MAL KEHRBRUCH)'
'GETEILT wechselt die Seite der Gleichung mit MAL'

$$v^2 = \frac{2}{1}\cdot\frac{1}{m}(-m\cdot g\cdot h + \frac{1}{2}\cdot c\cdot x^2)$$

Dies auf eine übersichtlichere Form bringen

$$v^2 = \frac{2\cdot(\frac{1}{2}\cdot c\cdot x^2 - m\cdot g\cdot h)}{m} = \frac{c\cdot x^2 - 2\cdot m\cdot g\cdot h}{m}$$

$$= \frac{c}{m}x^2 - 2gh$$

Höchste Rechenoperation, also Potenzen und Wurzeln
'HOCH wechselt die Seite der Gleichung mit WURZEL AUS'
'WURZEL AUS wechselt die Seite der Gleichung mit HOCH'

$$v_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{c}{m}x^2 - 2gh}$$

1.2 Nützliches für Termumformungen

- **Binomische Formeln**

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ oder $(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- **Potenzgesetze**

$b^n \cdot b^m = b^{n+m}$

$\dfrac{b^n}{b^m} = b^{n-m}$

$(b^n)^m = b^{n \cdot m}$

$b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$

Es gilt zusätzlich

$b^0 = 1$

- **Logarithmengesetze**

$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$

$\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$

$\ln(x^n) = n \cdot \ln x$

$\ln e = 1$ und $\ln 1 = 0$

Exponentialgleichung:

$b^x = c \quad |\ln$ (das nennt man 'durchlogarithmieren')

$\ln(b^x) = \ln(c)$

$x \cdot \ln b = \ln c$

$x = \dfrac{\ln c}{\ln b}$

'ln' bedeutet 'logarithmus naturalis', das ist der Logarithmus zur Basis e

1.3 Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungssysteme

1.3.1 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, eins ist. Man kann eine lineare Gleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$ax + b = 0, \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

$$x_1 = \frac{-b}{a}$$

1.3.2 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, zwei ist. Man kann eine quadratische Gleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf folgende Gestalt bringen:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

Man unterscheidet qualitativ folgende drei Fälle:

1. $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$

   Die quadratische Gleichung lautet dann:

   $$ax^2 + c = 0$$

   $$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

   Man erhält nur Lösungen, wenn a und c unterschiedliche Vorzeichen haben.

2. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$

   Die quadratische Gleichung lautet dann:

   $$ax^2 + bx = 0$$

   $$x(ax + b) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{-b}{a}$$

3. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$

   Die quadratische Gleichung lautet dann:

   $$ax^2 + bx + c = 0$$

   Diese löst man mit der 'Mitternachtsformel'

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$, mit der Diskriminante: $D = b^2 - 4ac$

   - Ist $D > 0$, so erhält man zwei verschiedene reelle Lösungen.
   - Ist $D = 0$, so erhält man eine reelle Lösung (Doppellösung).
   - Ist $D < 0$, so gibt es keine reelle Lösung.

1.3.3 Optische Unterstützung beim Lösen von quadratischen Gleichungen

Gegeben sei die folgende quadratische Gleichung in der Variablen x:

$$4x^2 + 5x - 7 = 2x^2 + 9x - 8$$

Festlegung der Vorzeichen aller an der Gleichung beteiligten Terme

$$+4x^2 + 5x - 7 = +2x^2 + 9x - 8$$

Gleichartige Terme herausfinden – in diesem Fall sind dies Terme in x^2 (quadratische Terme), in x (lineare Terme) und Terme ohne x (Absolutglieder) – und in unterschiedlichen Farben markieren

$$+4x^2 + 5x - 7 = +2x^2 + 9x - 8$$

Alle gleichartigen Terme (quadratische Terme zu quadratischen Termen, lineare Terme zu linearen Termen, Absolutglieder zu Absolutgliedern) auf einer Seite der Gleichung sortieren

$$+4x^2 - 2x^2 + 5x - 9x - 7 + 8 = 0$$

Zusammenfassen aller gleichartigen Terme

$$+2x^2 - 4x + 1 = 0$$

(NORMALFORM EINER QUADRATISCHEN GLEICHUNG)

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

Hierbei ist a der Faktor vor x^2 (quadratischer Faktor), b der Faktor vor x (linearer Faktor) und c der Term ohne x (Absolutglied)

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

Zuordnung zur Mitternachtsformel

$$+2x^2 - 4x + 1 = 0 \text{ mit}$$
$$a = +2, b = -4, c = +1$$

Einsetzen in die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (+2) \cdot (+1)}}{2 \cdot (+2)}$$

Ausrechnen und vereinfachen

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4}$$

Diskriminante D (das, was unter der Wurzel steht) prüfen, um über die Anzahl der Lösungen zu entscheiden. In unserem Fall ist $D = +8 > 0$, es existieren also 2 verschiedene reelle Lösungen. Diese lauten

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \overbrace{\sqrt{8}}^{2\sqrt{2}}}{4} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

1.3.4 Anwendung auf ein physikalisches Problem (hier aus der Kinematik)

Gegeben sei die folgende quadratische Gleichung in der Variablen *t*:

$$\frac{1}{2}a_1t^2 + v_1t + s_1 = \frac{1}{2}a_2t^2 + v_2t + s_2$$

Festlegung der Vorzeichen aller an der Gleichung beteiligten Terme

$$+\frac{1}{2}a_1t^2 + v_1t + s_1 = +\frac{1}{2}a_2t^2 + v_2t + s_2$$

Gleichartige Terme herausfinden (in diesem Fall sind dies Terme in t^2, t und Terme ohne *t*) in unterschiedlichen Farben markieren

$$+\frac{1}{2}a_1t^2 + v_1t + s_1 = +\frac{1}{2}a_2t^2 + v_2t + s_2$$

Alle gleichartigen Terme auf einer Seite der Gleichung sortieren

$$+\frac{1}{2}a_1t^2 - \frac{1}{2}a_2t^2 + v_1t - v_2t + s_1 - s_2 = 0$$

Zusammenfassen aller gleichartigen Terme

$$+\frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^2 + (v_1 - v_2)t + (s_1 - s_2) = 0$$

(NORMALFORM EINER QUADRATISCHEN GLEICHUNG)

$$\mathrm{a} \cdot \mathrm{x}^2 + \mathrm{b} \cdot \mathrm{x} + \mathrm{c} = 0$$

Hierbei ist a der Faktor vor t^2, b der Faktor vor *t* und c der Term ohne *t*

$$\mathrm{x}_{1,2} = \frac{-\mathrm{b} \pm \sqrt{\mathrm{b}^2 - 4 \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{c}}}{2 \cdot \mathrm{a}}$$

Zuordnung zur Mitternachtsformel

$$+\frac{1}{2}(a_1 - a_2)t^2 + (v_1 - v_2)t + (s_1 - s_2) = 0 \quad \text{mit}$$

$$\mathrm{a} = +\frac{1}{2}(a_1 - a_2), \mathrm{b} = +(v_1 - v_2), \mathrm{c} = +(s_1 - s_2)$$

Einsetzen in die Lösungsformel

$$t_{1,2} = \frac{-(v_1 - v_2) \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \cdot (s_1 - s_2)}}{2 \cdot \frac{1}{2}(a_1 - a_2)}$$

Ausrechnen und vereinfachen

$$t_{1,2} = \frac{v_2 - v_1 \pm \sqrt{(v_1 - v_2)^2 - 2 \cdot (a_1 - a_2) \cdot (s_1 - s_2)}}{a_1 - a_2}$$

Zahlenwerte für die Größen einsetzen und verfahren wie vorher.

1.3.5 Lösung von ganzrationalen Gleichungen 3. Grades

- Hat die Gleichung die Form
  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, mit $a \neq 0$,
  so muss man eine Lösung x_1 erraten und diese durch Polynomdivision (Horner-Schema) abspalten und reduziert diese damit auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung man mit Hilfe der Mitternachtsformel bestimmen kann.
- Hat die Gleichung die Form
  $ax^3 + bx^2 + cx = 0$, mit $a \neq 0$,
  so klammert man x aus und erhält dieselbe Gleichung in der faktorisierten Darstellung
  $x(ax^2 + bx + c) = 0$
  Diese kann man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt lösen
  $x_1 = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$
  Die möglichen weiteren Lösungen erhält man wieder mit der Mitternachtsformel.
- Hat die Gleichung die Form
  $ax^3 + bx^2 = 0$, mit $a \neq 0$,
  so klammert man x^2 aus und erhält dieselbe Gleichung in der faktorisierten Darstellung
  $x^2(ax + b) = 0$
  Diese kann man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt lösen
  $x_{1,2} = 0 \vee x_3 = -\frac{b}{a}$
- Hat die Gleichung die Form
  $x^3 = a$
  Die Lösungsmenge ist dann
  Für $a > 0$ $\quad x_1 = \sqrt[3]{a}$
  Für $a < 0$ $\quad x_1 = -\sqrt[3]{|a|}$
  Für $a = 0$ $\quad x_1 = 0$

1.3.6 Lösung von ganzrationalen Gleichungen 4. Grades

- Hat die Gleichung die Form
  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, mit $a \neq 0$,
  so muss man zwei Lösungen x_1 und x_2 erraten und diese durch Polynomdivision (Horner-Schema) abspalten und reduziert diese damit auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung man mit Hilfe der Mitternachtsformel bestimmen kann.
- Hat die Gleichung die Form
  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx = 0$, mit $a \neq 0$,
  so klammert man x aus und erhält dieselbe Gleichung in der faktorisierten Darstellung
  $x(ax^3 + bx^2 + cx + d) = 0$
  Diese kann man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt lösen
  $x_1 = 0 \vee ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
  Die möglichen weiteren Lösungen erhält man wieder mit dem Erraten einer Lösung x_2 der Gleichung 3. Grades und Abspalten dieser Lösung mittels Polynomdivision (Horner-Schema) reduziert diese auf eine quadratische Gleichung deren mögliche Lösungen mit der Mitternachtsformel zu bestimmen sind.
- Hat die Gleichung die Form
  $ax^4 + bx^3 + cx^2 = 0$, mit $a \neq 0$,
  so klammert man x^2 aus und erhält dieselbe Gleichung in der faktorisierten Darstellung
  $x^2(ax^2 + bx + c) = 0$
  Diese kann man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt lösen
  $x_{1,2} = 0 \vee ax^2 + bx + c = 0$
  Die möglichen weiteren Lösungen erhält man wieder mit der Mitternachtsformel.
- Hat die Gleichung die Form
  $ax^4 + bx^3 = 0$, mit $a \neq 0$,
  so klammert man x^3 aus und erhält dieselbe Gleichung in der faktorisierten Darstellung
  $x^3(ax + b) = 0$
  Diese kann man mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt lösen
  $x_{1,2,3} = 0 \vee x_4 = -\frac{b}{a}$
- Hat die Gleichung die Form
  $ax^4 + cx^2 + e = 0$, mit $a \neq 0$, diese heißt **biquadratisch**
  so substituiert man $x^2 = z$ und erhält somit die Gleichung
  $az^2 + cx + e = 0$
  Diese löst man mit der Mitternachtsformel und erhält evtl. die Lösungen z_1 und z_2.
  Nur wenn diese Werte positiv oder Null sind kann man zurücksubstituieren. Die Lösungen wären in diesem Fall
  $x_{1,2} = \pm\sqrt{z_1}$ und $x_{3,4} = \pm\sqrt{z_2}$

- Hat die Gleichung die Form

  $x^4 = a$

  Die Lösungsmenge ist dann

  Für $a > 0$ $\quad x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{a}$

  Für $a < 0$ $\quad$ keine Lösung

  Für $a = 0$ $\quad x_1 = 0$

1.3.7 Lösung von ganzrationalen Gleichungen n-ten Grades

Durch eventuelles Ausklammern und Erraten von Lösungen mit anschließenden Polynomdivisionen (Horner-Schema), führt man diese Gleichung auf eine quadratische Gleichung zurück, die man mit Hilfe der Mitternachtsformel berechnen kann.

1.3.8 Lösung von Bruchgleichungen

Durch Termumformungen kann man jede Bruchgleichung auf die folgende Form bringen:

$$\frac{z(x)}{n(x)} = 0 \text{ mit } n(x) \neq 0$$

Diese Bruchgleichung wird durch folgende Gleichung gelöst

$$z(x) = 0$$

In Worten:
Ein Bruch, dessen Nenner von Null verschieden ist, wird dann Null, wenn der Zähler Null ist.

1.3.9 Lineare Ungleichungen

Lineare Ungleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, eins ist. Statt dem Gleichheitszeichen bei linearen Gleichungen hat man jetzt Ungleichheitszeichen ($>$, $<$, $\geq, \leq$).
Für unsere Rechnung wählen wir $>$, jedoch ist dies willkürlich und könnte auch für jedes andere Ungleichheitszeichen gelten. Demnach kann man eine lineare Ungleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf die folgende Gestalt bringen:

$$ax + b > 0, \quad \text{mit} \quad a \neq 0$$

1. Fall $a > 0$
   $$x > \frac{-b}{a}$$
2. Fall $a < 0$
   $$x < \frac{-b}{a}$$

Im zweiten Fall dreht sich das Ungleichheitszeichen um, da durch eine negative Zahl geteilt wurde.

1.3.10 Quadratische Ungleichungen

Quadratische Ungleichungen erkennt man daran, dass die höchst vorkommende Potenz der Variablen, nach der man auflösen möchte, zwei ist. An Stelle des Gleichheitszeichens bei quadratischen Gleichungen hat man jetzt ein Ungleichheitszeichen ($>$, $<$, $\geq, \leq$). Demnach kann man eine quadratische Ungleichung durch Äquivalenzumformungen immer auf die folgende Gestalt bringen:

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit (o. B. d. A.) wählen wir hier das 'größer gleich'-Zeichen

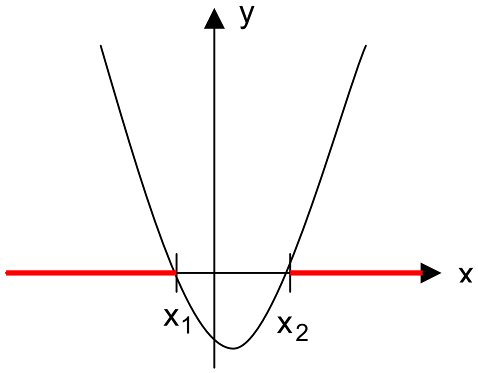
1. Fall $a > 0$ (nach oben geöffnete Parabeln)

Man löst zunächst die Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

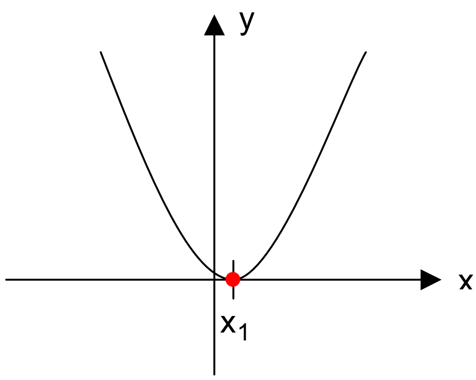
Hat diese zwei verschiedene reelle Lösungen x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$, so sieht eine Skizze einer solchen Parabel wie folgt aus und die Lösungsmenge kann grafisch bestimmt werden.

$L = \{x \in \Re | x \leq x_1 \vee x \geq x_2\}$



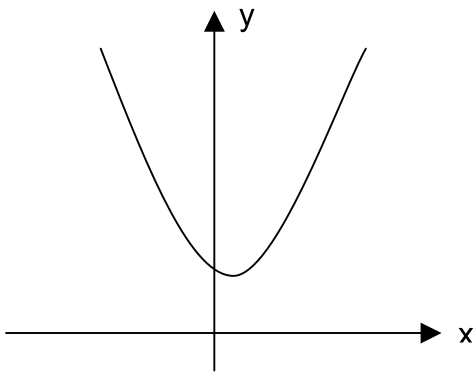
Hat diese eine reelle Doppellösung x_1, so sieht eine Skizze einer solchen Parabel wie folgt aus und die Lösungsmenge kann grafisch bestimmt werden.

$L = \{x \in \Re | x = x_1\}$



Hat diese keine reelle Lösung. so sieht eine Skizze einer solchen Parabel wie folgt aus und die Lösungsmenge kann grafisch bestimmt werden.

$L = \{\ \}$



Für den 2. Fall – nämlich $a < 0$ (nach unten geöffnete Parabeln) – kann man sich das sehr schnell grafisch selbst überlegen.
Genauso geht man mit den anderen Ungleichheitszeichen vor.

1.3.11 Lösung von Gleichungssystemen (2 Gleichungen mit 2 Unbekannten)

Allgemeines Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten
Man löst die vermeintlich 'einfachere' der beiden Gleichungen – wenn möglich – nach einer der Unbekannten z. B. $x = x(y)$ auf und setzt diese in die andere Gleichung ein.
Diese beinhaltet dann nur noch eine Unbekannte y. Dieses y kann man nun bestimmen.
Mit dem so bestimmten y kann man mit der gewählten Gleichung $x = x(y)$ das zugehörige x bestimmen.
Kann man beide Gleichungen nicht explizit nach einer der beiden Variablen auflösen, so ist der Aufwand, dieses Gleichungssystem zu lösen, sehr groß und bedarf sehr großer Routine und Intuition und das Verfahren von oben versagt.

Beispiel
Man löse folgendes Gleichungssystem

$$2x + 4y = 2$$

$$x^2 + 2y^2 = 33$$

Lösung
Man löst die einfachere Gleichung – hier die lineare Gleichung – z. B. nach x auf

$$x = 1 - 2y$$

Man setzt dies in die quadratische Gleichung ein
(auf binomische Formel aufpassen)

$$\underbrace{(1-2y)^2}_{\text{bin. Formel}} + 2y^2 = 33$$

$$1 - 4y + 4y^2 + 2y^2 = 33$$

$$6y^2 - 4y - 32 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 768}}{12} = \frac{4 \pm 28}{12}$$

$$y_1 = -2$$

$$y_2 = \frac{8}{3}$$

Diese Ergebnisse setzt man wieder in die lineare Gleichung ein und erhält

$$x_1 = 1 - 2y_1 = 5$$

$$x_2 = 1 - 2y_2 = -\frac{13}{3}$$

Lineares Gleichungssystem von 2 Gleichungen mit 2 Unbekannten

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2$$

Man identifiziert:

Den Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Die Koeffizientenmatrix $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Die Inhomogenität $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

Somit ist das inhomogene lineare Gleichungssystem in Matrixschreibweise gegeben durch $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Man definiert:

- $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

  'links oben mal rechts unten minus links unten mal rechts oben'
- $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1a_{22} - b_2a_{12}$

  Man ersetzt die erste Spalte der Koeffizientenmatrix durch die Inhomogenität.
- $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$

  Man ersetzt die zweite Spalte der Koeffizientenmatrix durch die Inhomogenität.

Cramersche Regel

Die Cramersche Regel dient zur einfachen Berechnung der Lösung von inhomogenen linearen Gleichungssystemen der Art $\underline{A} \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

- $\Delta \neq 0$ liefert die eindeutigen Lösungen x und y und man erhält:

  $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ und $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$
- $\Delta = 0$ Die Cramersche Regel versagt und das inhomogene lineare Gleichungssystem ist entweder unlösbar oder hat unendlich viele Lösungen.

1.4 Differentialrechnung

Differenzen- und Differentialquotient

Eine Funktion f heißt differenzierbar im Intervall I, wenn sie für jedes $x \in I$ differenzierbar ist.

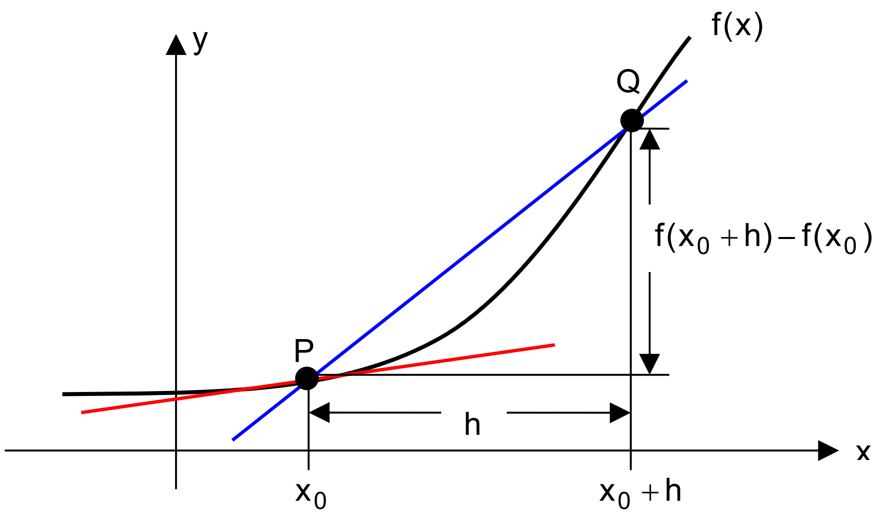
Definition der Ableitung:

$$f'(x_0) = y'(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Gesprochen wird dies:

f-Strich von x_0, y-Strich von x_0, df nach dx an der Stelle x_0

Der Differenzenquotient $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, bei Berechnung des Grenzwerts heißt dieser Differentialquotient $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ mit $h > 0$ und bedeutet geometrisch die Steigung der Sekante (blaue Gerade) in den Punkten $P(x_0 / f(x_0))$ und $Q(x_0 + h / f(x_0 + h))$ im Falle des Differenzenquotienten bzw. die Steigung der Tangente (rote Gerade) im Punkt $P(x_0 / f(x_0))$ im Grenzfall des Differentialquotienten. (Punkt Q läuft dann bis auf Punkt P)



Ist $f(x)$ für alle $x \in I$ differenzierbar, dann ordnet die Ableitungsfunktion $f'(x)$ jedem Argument $x \in I$ die Werte der Tangentensteigung der Kurve $f(x)$ zu.

1.4.1 Höhere Ableitungen

Die Schreibweise:

$$y = f(x)$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{d^2f}{dx^2} \quad \text{... usw.}$$

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d^nf(x)}{dx^n} = \frac{d^nf}{dx^n}$$

Gesprochen wird dies:
y-n-Strich, f-n-Strich von x, d-n-y nach dx-hoch n

1.4.2 Bedeutung der ersten Ableitung

Die erste Ableitung $f'(x)$ gibt das Steigungsverhalten der Funktion f an.

Ist $f'(x) > 0$, so **steigt** die Funktion streng monoton,
ist $f'(x) < 0$, so **fällt** die Funktion streng monoton,
ist $f'(x) = 0$, so besitzt die Funktion eine **waagrechte Tangente**.

1.4.3 Bedeutung der zweiten Ableitung

Die zweite Ableitung $f''(x)$ gibt das Krümmungsverhalten der Funktion f an.

Ist $f''(x) > 0$, also pos<u>i</u>tiv, so ist die Funktion **l<u>i</u>nksgekrümmt**,
ist $f''(x) < 0$, also n<u>e</u>gativ, so ist die Funktion **r<u>e</u>chtsgekrümmt**,
ist $f''(x) = 0$, so ist die Funktion **ohne Krümmung**.

1.4.4 Hier einige wichtige Ableitungsfunktionen

$f(x) = x^n$ mit $n \neq 0$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \ln x$ mit $x > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^{ax+b}$ mit $a \neq 0$	$f'(x) = ae^{ax+b}$
$f(x) = a^x$ mit $a > 0$	$f'(x) = (\ln a) \cdot a^x$
$f(x) = \sin(ax)$	$f'(x) = a\cos(ax)$
$f(x) = \cos(ax)$	$f'(x) = -a\sin(ax)$

1.4.5 Ableitungsregeln

- **Faktorregel**
  $$\frac{d(C\cdot f(x))}{dx}=C\cdot\frac{df(x)}{dx}\text{, wobei } C=\text{const.}\in R$$
  Konstante Faktoren werden beibehalten
- **Summenregel**
  $$\frac{d(f(x)+g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}+\frac{dg(x)}{dx}$$
  Es wird gliedweise abgeleitet
- **Produktregel**
  $$\frac{d(f(x)\cdot g(x))}{dx}=\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)+\frac{dg(x)}{dx}\cdot f(x)$$
  'Vorne abgeleitet mal hinten plus hinten abgeleitet mal vorne'
- **Quotientenregel**
  $$\frac{d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)}{dx}=\frac{\frac{df(x)}{dx}\cdot g(x)-\frac{dg(x)}{dx}\cdot f(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$
  'Oben abgeleitet mal unten minus unten abgeleitet mal oben durch unten zum Quadrat'
- **Kettenregel**
  $$\frac{df(u(x))}{dx}=\frac{df(u(x))}{du(x)}\cdot\frac{du(x)}{dx}$$
  'Äußere Ableitung mal innere Ableitung'

1.4.6 Differentielle Formulierung physikalischer Größen und ihr mathematischer Hintergrund

Aus der Kinematik bekannt ist der Zusammenhang zwischen Beschleunigung a und Geschwindigkeit v.

$$\frac{dv}{dt}=a$$

- Dies bedeutet mathematisch
  Die Beschleunigung ist die erste Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit.
- Dies bedeutet geometrisch
  Die Beschleunigung ist die Steigung der Tangente im v,t-Diagramm.

Weitere differentielle Zusammenhänge physikalischer Größen

- $\frac{ds}{dt}=v$ Ort und Geschwindigkeit
- $\frac{d\omega}{dt}=\alpha$ Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung
- $\frac{d\varphi}{dt}=\omega$ Winkel und Winkelgeschwindigkeit
- $\frac{dp}{dt}=F$ Impuls und Kraft

Beispiel
Gegeben ist folgendes Weg,Zeit-Gesetz

$$s(t) = 6\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot t + 4\text{ m}$$

Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_1 = 4\text{ s}$.

Lösung
Da die Geschwindigkeit die erste Ableitung des Wegs nach der Zeit ist, gilt

$$\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{s}(t) = v(t)$$

Mathematisch bedeutet diese Fragestellung
Berechnen Sie die erste Ableitung des Weg,Zeit-Gesetztes an der Stelle (zur Zeit) $t_1 = 4\text{ s}$, also gesucht ist $\dot{s}(t_1) = v(t_1)$

Eine äquivalente Formulierung wäre $v(t_1) = \left.\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}$

Bestimmen der ersten Ableitung

$$\dot{s}(t) = v(t) = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\dot{s}(t_1) = v(t_1) = v(4\text{ s}) = 12\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 4\text{ s} - 2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 46\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

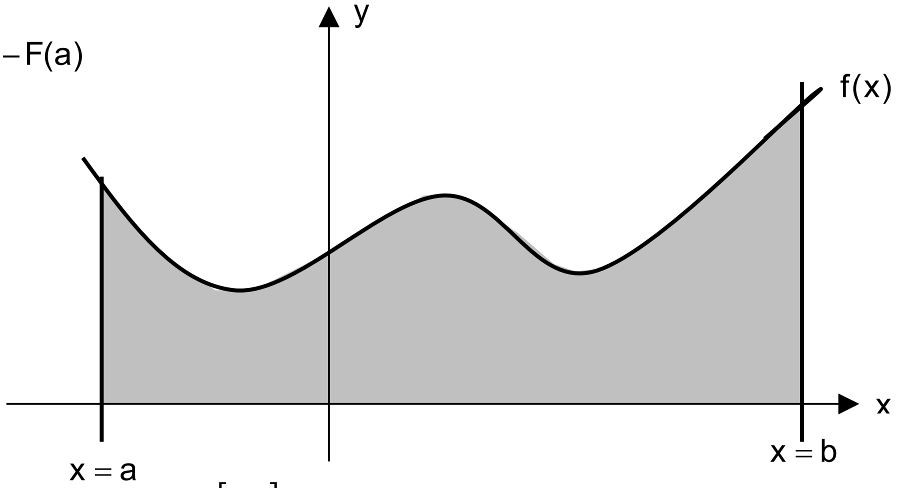
1.5 Integralrechnung

Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ berechnet die Differenz der Flächen, die mit einer Randkurve $f(x)$ begrenzt sind, oberhalb der x-Achse mit denjenigen unterhalb der x-Achse.

1.5.1 Flächeninhalt einer Funktion f mit der x-Achse

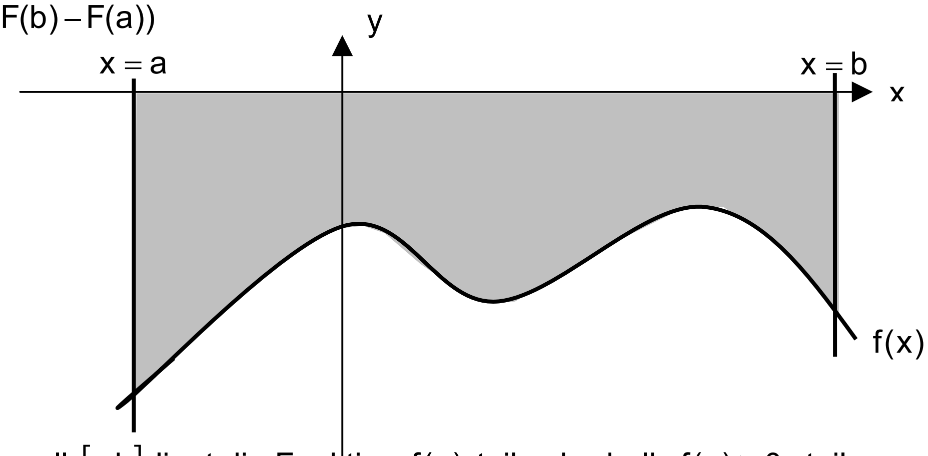
- Im gesamten Integrationsintervall $[a;b]$ liegt die Funktion $f(x)$ oberhalb der x-Achse:
  Ist F eine beliebige Stammfunktion der in $x \in [a;b]$ stetigen Randfunktion f mit $f(x) \geq 0$, so berechnet sich der Flächeninhalt von f mit der x-Achse:

  $$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



- Im gesamten Integrationsintervall $[a;b]$ liegt die Funktion $f(x)$ unterhalb der x-Achse:
  Ist F eine beliebige Stammfunktion der in $x \in [a;b]$ stetigen Randfunktion f mit $f(x) \leq 0$, so berechnet sich der Flächeninhalt von f mit der x-Achse:

  $$A = -\int_a^b f(x)\,dx = -(F(b) - F(a))$$



- Im Integrationsintervall $[a;b]$ liegt die Funktion $f(x)$ teils oberhalb $f(x) \geq 0$, teils unterhalb $f(x) \leq 0$ der x-Achse – es existieren also reelle Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen ungerader Ordnung):
  Hier teilt sich die Gesamtfläche im Intervall $[a;b]$ in Teilflächen auf, die oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegen. Begrenzt sind diese Teilflächen durch die obere und untere Grenze sowie durch die Nullstellen ungerader Ordnung. Man berechnet mit Hilfe der oben genannten Punkte die Teilflächen, addiert diese und erhält damit die Gesamtfläche.

Merke: Über Nullstellen ungerader Ordnung niemals drüberintegrieren!

1.5.2 Anmerkung

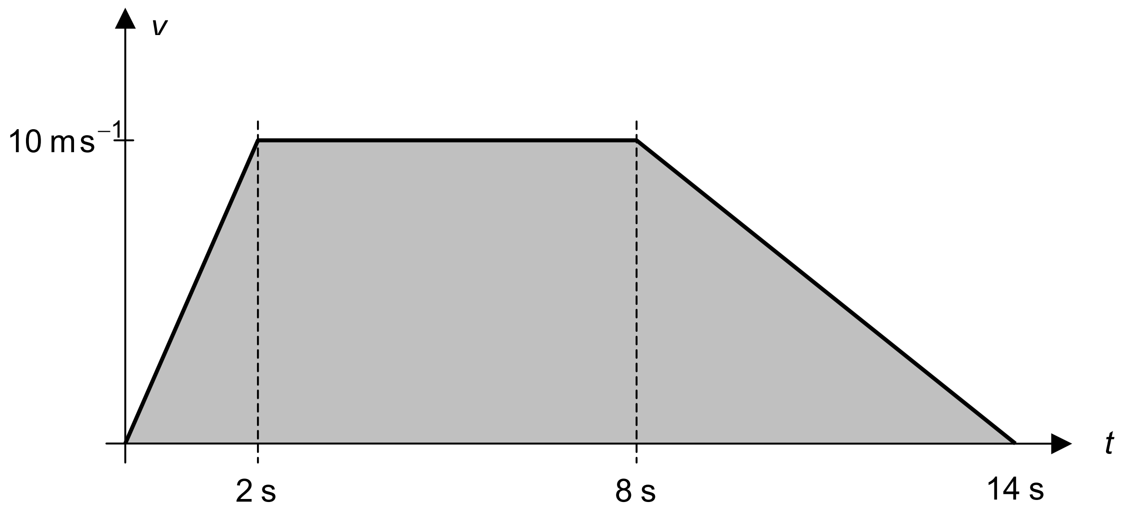
Ist eine Fläche mit Geradenstücken berandet, so ist es nicht notwendig die Geradengleichungen dieser Geradenstücke zu bestimmen – man kann dies elementargeometrisch lösen, da die auftretenden Flächen nur rechtwinklige Dreiecke, Rechtecke oder Trapeze sein können.

Für die möglich auftretenden Flächen gilt

- $A_{Dreieck} = \frac{1}{2}ab$
  (Kathete 1 mal Kathete 2 geteilt durch zwei)
- $A_{Rechteck} = ab$
  (Länge mal Breite)
- $A_{Trapez} = \frac{1}{2}(a+c)h$
  ((Parallele 1 + Parallele 2) geteilt durch zwei mal Abstand der Parallelen)

1.5.3 Beispiel aus der Kinematik

Gegeben sei folgender Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf einer eindimensionalen Bewegung. Wie groß ist der zurückgelegte Weg?



Der zurückgelegte Weg entspricht der blauen Fläche, die die Geradenstücke mit der *t*-Achse einschließen.
Die blaue Fläche ist ein Trapez

Untere Parallele $a = 14\text{ s}$

Obere Parallele $c = 6\text{ s}$

Abstand der Parallelen $h = 10\text{ m s}^{-1}$

$$A_{Trapez} = \frac{1}{2}(14\text{ s} + 6\text{ s}) \cdot 10\text{ m s}^{-1} = 100\text{ m}$$

Hier sieht man deutlich, dass dies der einfachste Weg ist die Fläche zu bestimmen. Es wäre äußerst aufwendig die Geradenstücke funktionsmäßig zu erfassen und dann die Fläche über Integration zu bestimmen.

1.5.4 Einige wichtige Stammfunktionen

$f(x) = x^n$ mit $n \neq -1$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$ mit $x \neq 0$	$F(x) = \ln\lvert x\rvert$
$f(x) = \ln x$ mit $x > 0$	$F(x) = x\ln x - x$
$f(x) = e^{ax+b}$ mit $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$
$f(x) = a^x$ mit $a > 0$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln a}$
$f(x) = \sin(ax)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax)$
$f(x) = \cos(ax)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax)$

1.5.5 Integrationsregeln

- **Bereich**

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

- **Linearität**

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

- **Produktintegration (partielle Integration)**

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)\,dx$$

- **Integration durch Substitution**

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

wobei gilt: $u = g(x), u' = \frac{du}{dx} = g'(x)$

Sonderfall: **Lineare Substitution**

$$\int_a^b f(px+q)\,dx = \frac{1}{p} \cdot [F(px+q)]_a^b \quad \text{mit } p \neq 0 \text{ und } F \text{ ist Stammfunktion zu } f$$

- **Spezialfälle, die man parat haben sollte**

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \left[\ln|f(x)|\right]_a^b$$

$$\int_a^b f'(x)\cdot f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[(f(x))^2\right]_a^b$$

- **Näherungsweise Integration mit Hilfe der Keplerschen Faßregel**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4\cdot f(\frac{a+b}{2})+f(b)\right)$$

1.5.6 Integrale Formulierung physikalischer Größen und ihr mathematischer Hintergrund

Aus der Kinematik bekannt ist der Zusammenhang zwischen Beschleunigung a und Geschwindigkeit v.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a$$

Trennung der Variablen und anschließende Integration
Die Indices 'A' und 'E' stehen jeweils für **A**nfang und **E**nde

$$\int_{v_A}^{v_E} \mathrm{d}v = \int_{t_A}^{t_E} a\,\mathrm{d}t$$

$$v_E - v_A = \underbrace{\int_{t_A}^{t_E} a\,\mathrm{d}t}_{\text{Fläche}}$$

- Dies bedeutet
  Die Änderung der Geschwindigkeit entspricht der Fläche im a,t-Diagramm.

Weitere differentielle Zusammenhänge physikalischer Größen, die wie oben in integrale Schreibweise umzuwandelbar sind

- $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v$ Ort und Geschwindigkeit
- $\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \alpha$ Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung
- $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \omega$ Winkel und Winkelgeschwindigkeit
- $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F$ Impuls und Kraft

Beispiel

Ein Wagen der Masse $m = 0{,}5\ \mathrm{kg}$ besitzt die Anfangsgeschwindigkeit $v_\mathrm{A} = 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und wird im Zeitintervall $0 \le t \le T_0 = 5\ \mathrm{s}$ von einer zeitabhängigen Kraft $F(t) = F_0 - \frac{F_0}{T_0} \cdot t$ mit $F_0 = 10\ \mathrm{N}$ beschleunigt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit am Ende des Zeitintervalls.

Lösung

Mit dem Kraftstoß folgt

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t} = F(t)$$

oder umgeschrieben für eine konstante Masse

$$m\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = F(t)$$

$$m\int_{v_\mathrm{A}}^{v_\mathrm{E}} \mathrm{d}v = \int_0^{T_0} F(t)\,\mathrm{d}t$$

$$m(v_\mathrm{E} - v_\mathrm{A}) = \int_0^{T_0} (F_0 - \frac{F_0}{T_0} \cdot t)\,\mathrm{d}t = [F_0 \cdot t - \frac{F_0}{2T_0} \cdot t^2]_0^{T_0} = \frac{F_0}{2} T_0$$

$$v_\mathrm{E} = \frac{F_0}{2m} T_0 + v_\mathrm{A} = \frac{10\ \mathrm{N}}{2 \cdot 0{,}5\ \mathrm{kg}} \cdot 5\ \mathrm{s} + 5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 55\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

1.6 Überblick über die wichtigsten ganzrationalen Funktionen

1.6.1 Ganzrationale Funktionen 1. Grades (Geraden)

Diese Funktionen sind darstellbar als: $f(x) = mx + b$ mit $x \in R$ und $m \neq 0$

Der Koeffizient m gibt die Steigung an und b den y-Achsenabschnitt (Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse). Ist m positiv ($m > 0$), so steigt die Gerade – sie verläuft von links unten nach rechts oben, ist m negativ ($m < 0$), so fällt die Gerade – sie verläuft von links oben nach rechts unten.
Die Steigung ist definiert als
'Erhebung' (Differenz in y-Richtung) durch 'Fortgang' (Differenz in x-Richtung)

$$m = \frac{\text{Erhebung}}{\text{Fortgang}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

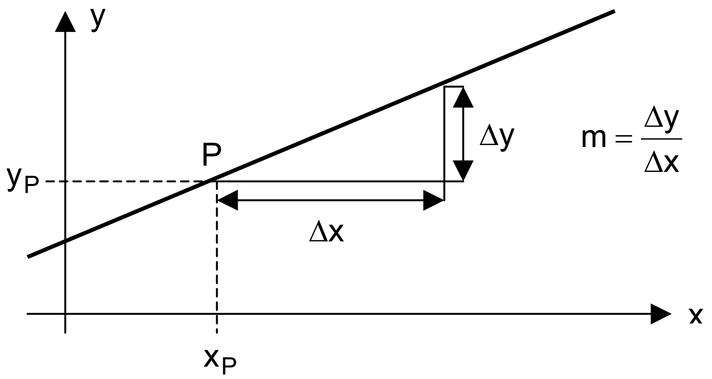
(Sind die Koordinatenachsen mit Einheiten behaftet – in der Physik so üblich – so ist auch die Steigung m und der y-Achsenabschnitt b mit Einheiten behaftet.)

Geraden sind eindeutig, wenn man einen Punkt und die Steigung kennt oder wenn man zwei Punkte kennt.

- Kennt man einen Punkt $P(x_P / y_P)$ und die Steigung m, so ergibt sich die Gleichung der Geraden nach der **Punkt-Steigungs-Form** zu:

  $$\frac{y - y_P}{x - x_P} = m$$

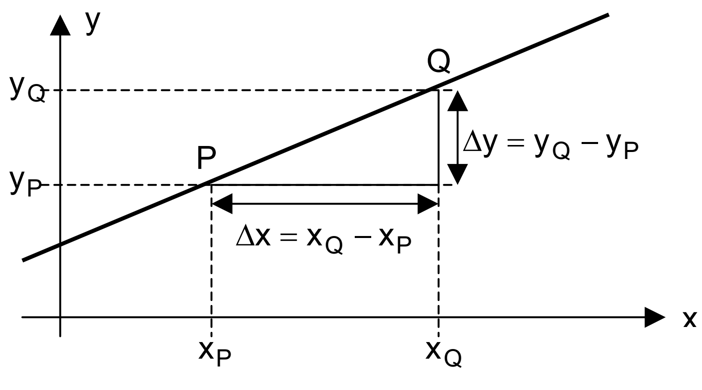
  Diese ist noch nach y aufzulösen.



- Kennt man zwei Punkte $P(x_P / y_P)$ und $Q(x_Q / y_Q)$, so ergibt sich die Gleichung der Geraden nach der **Zwei-Punkte-Form** zu:

  $$\frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$$

  Diese ist noch nach y aufzulösen.



Spezialfälle sind Geraden der Form:

$y = b$ Parallele zur x-Achse ($m = 0$)

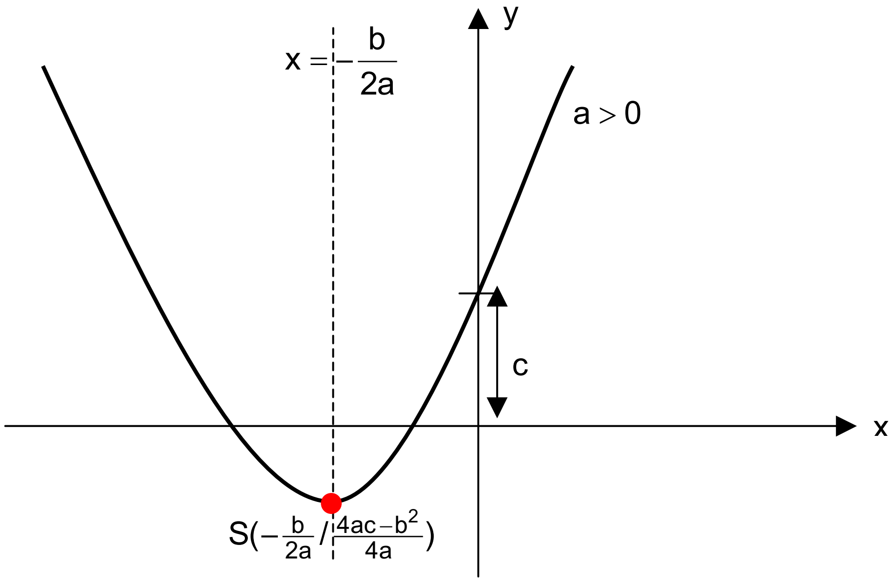
$x = d$ Parallele zur y-Achse (nicht durch obige Form darstellbar)

1.6.2 Ganzrationale Funktionen 2. Grades (Parabeln)

Diese Funktionen sind darstellbar als: $f(x) = ax^2 + bx + c$ mit $x \in R$ und $a \neq 0$

- Der Koeffizient a ist für den 'Öffnungswinkel' der Parabel verantwortlich.
- Ist $0 < |a| < 1$, so ist die Parabel gestaucht ('breit')
- Ist $|a| > 1$, so ist die Parabel gestreckt ('spitz')
- Ist a positiv ($a > 0$), so ist sie nach oben geöffnet, ist a negativ ($a < 0$), so ist sie nach unten geöffnet.
- Jede Parabel besitzt genau einen Scheitel mit den Koordinaten: $S(-\frac{b}{2a} / \frac{4ac - b^2}{4a})$
- Jede Parabel ist achsensymmetrisch zu der Parallelen zur y-Achse durch ihren Scheitel.

  Also Achsensymmetrie zur Geraden mit der Gleichung: $x = -\frac{b}{2a}$



Spezialfälle:

$f(x) = ax^2$ mit $x \in R$ und $a \neq 0$ Achsensymmetrie zur y-Achse und $S(0/0)$

$f(x) = ax^2 + c$ mit $x \in R$ und $a \neq 0$ Achsensymmetrie zur y-Achse und $S(0/c)$

1.7 Trigonometrische Funktionen

Die Standard-Sinus-Funktion
$f(x) = \sin x$ schwingt mit der Amplitude $a = 1$ um die x-Achse, hat die Periode $p = 2\pi$ und beginnt bei $(0/0)$ mit einer Aufwärtsbewegung.

Die Standard-Cosinus-Funktion
$f(x) = \cos x$ schwingt mit der Amplitude $a = 1$ um die x-Achse, hat die Periode $p = 2\pi$ und beginnt bei $(0/1)$ mit einer Abwärtsbewegung.

Die einfachen trigonometrischen Funktionen (in Norm-Form dargestellt mit $b > 0$)
$f(x) = a\sin[b(x+c)] + d$ und $f(x) = a\cos[b(x+c)] + d$
sind für alle $x \in R$ definiert.

Die Parameter haben folgende Bedeutungen:

$\lvert a \rvert$	**Amplitude** der Funktion
$p = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$	**Periode** der Funktion $(f(x+p) = f(x))$
c	**Verschiebung in x-Richtung**
d	**Verschiebung in y-Richtung**

Ableitungen

$(\sin(ax))' = a\cos(ax)$

$(\cos(ax))' = -\sin(ax)$

Symmetrie

$\sin(-ax) = -\sin(ax)$ (punktsymmetrisch)

$\cos(-ax) = \cos(ax)$ (achsensymmetrisch)

1.7.1 Grafische Umsetzung

Wie erhält man aus diesen Angaben recht zügig das Schaubild ausgehend von der jeweiligen Standard-Funktion?

- Falls $b < 0$, Symmetriebedingung anwenden und somit auf **Norm-Form** bringen
- Vorzeichen von a sagt aus, ob Standard-Funktion genommen wird oder die an der y-Achse gespiegelte Standard-Funktion genommen wird
  $a > 0$ Standard-Funktion
  $a < 0$ an y-Achse gespiegelte Standard-Funktion
- Bestimmen (Ablesen) der Parameter **Periode** p, **Amplitude** $\lvert a \rvert$, **Verschiebung in x-Richtung** c **und Verschiebung in y-Richtung** d
- Festlegen des Wertebereichs: $W_f = \{y \in R \mid d - \lvert a \rvert \le y \le d + \lvert a \rvert\}$
  Funktion schwingt mit der Amplitude $\lvert a \rvert$ um die Niveaulinie $y = d$
  (Streckung/Stauchung der Standard-Funktion in y-Richtung und Verschiebung in y-Richtung um d)
- Die Periode $p = \frac{2\pi}{\lvert b \rvert}$ gibt an wann eine volle Schwingung (Berg und Tal) beendet ist und die Funktion sich periodisch wiederholt
  (Streckung/Stauchung der Standard-Funktion in x-Richtung)
- Um c in x-Richtung verschieben:
  Ist Funktion in Norm-Form und $c > 0$ dann Verschiebung nach links
  Ist Funktion in Norm-Form und $c < 0$ dann Verschiebung nach rechts

Beispiel 1

$f(x) = -2\sin(-2x+\pi)+5$

Umschreiben in Norm-Form unter Ausnutzen der Symmetrie der Sinus-Funktion

$f(x) = -2\sin(-2(x-\frac{\pi}{2}))+5 = 2\sin(2(x-\frac{\pi}{2}))+5$

$a > 0$, deshalb geht man von der Standard-Sinus-Funktion aus und <u>nicht</u> von der an der y-Achse gespiegelten Standard-Sinus-Funktion

Bestimmung der Parameter:

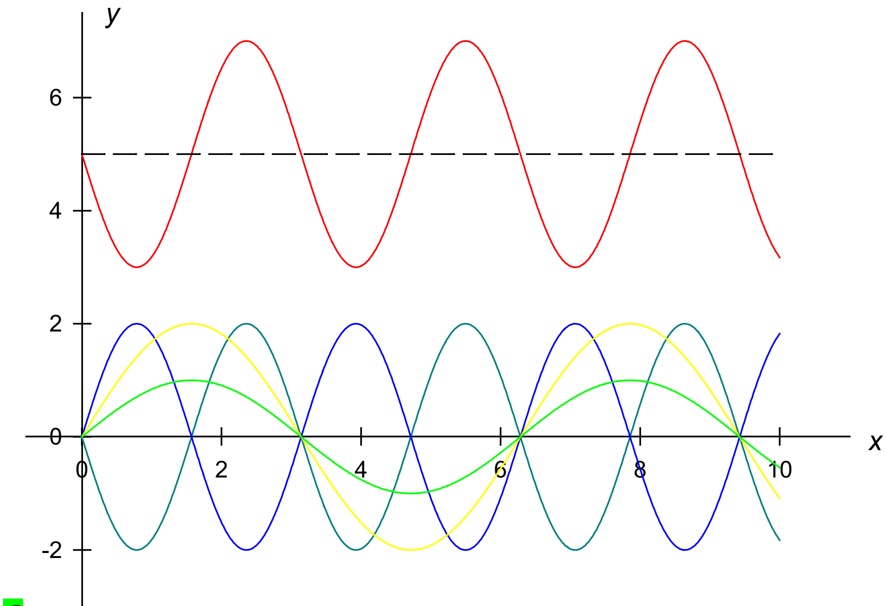
$f(x) = \underbrace{2}_{=a}\sin(\underbrace{2}_{=b}(x\underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{=c}))\underbrace{+5}_{=d}$

Amplitude $|a| = 2$

Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (eine volle Schwingung ist bereits nach π beendet)

Verschiebung in x-Richtung $c = -\frac{\pi}{2}$, also um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts

Verschiebung in y-Richtung $d = 5$, also um 5 nach oben



Grün:

$\sin x$ Standard-Sinus-Funktion

Gelb:

$2\sin x$ $\sin x$ gestreckt in y-Richtung um Faktor 2 (Amplitude verdoppelt)

Blau:

$2\sin(2x)$ $2\sin x$ gestaucht in x-Richtung um Faktor $\frac{1}{2}$ (Periode halbiert)

Violett:

$2\sin(2(x-\frac{\pi}{2}))$ $2\sin(2x)$ verschoben um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts

Rot:

$2\sin(2(x-\frac{\pi}{2}))+5$ $2\sin(2(x-\frac{\pi}{2}))$ verschoben um 5 nach oben

Beispiel 2

$f(x) = -2\cos(-2x - \pi) - 3$

Umschreiben in Norm-Form unter Ausnutzen der Symmetrie der Cosinus-Funktion

$f(x) = -2\cos(-2(x + \frac{\pi}{2})) - 3 = -2\cos(2(x + \frac{\pi}{2})) - 3$

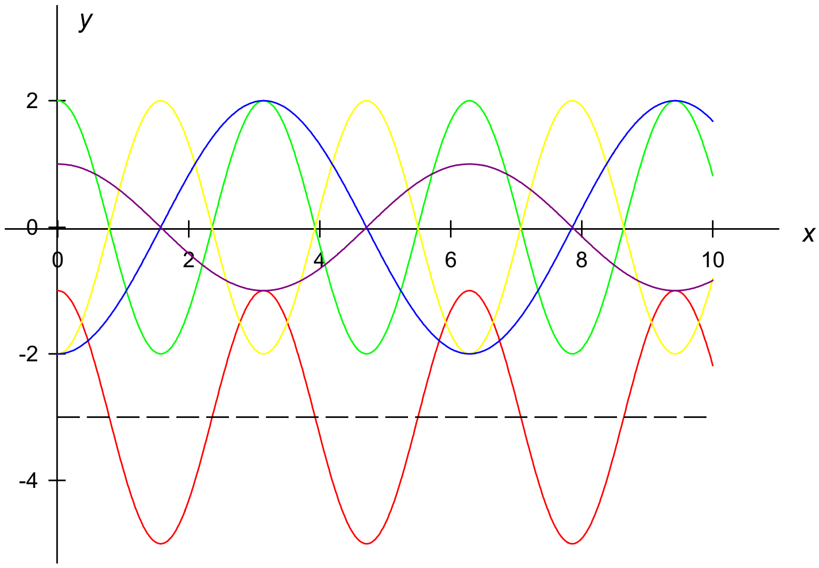
$a < 0$, deshalb geht man von der an der y-Achse gespiegelten Standard-Cosinus-Funktion aus

Bestimmung der Parameter:

$f(x) = \underbrace{-2}_{=a}\cos(\underbrace{2}_{=b}(x + \underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{=c}))\underbrace{-3}_{=d}$ Amplitude $|a| = 2$

Periode $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ (eine volle Schwingung ist bereits nach π beendet)

Verschiebung in x-Richtung $c = \frac{\pi}{2}$, also um $\frac{\pi}{2}$ nach linksVerschiebung in y-Richtung $d = -3$, also um 3 nach unten



Violett:

$\cos x$ Standard-Sinus-Funktion

Blau:

$-2\cos x$ $\cos x$ gestreckt in y-Richtung um Faktor -2

Gelb:

$-2\cos(2x)$ $-2\cos x$ gestaucht in x-Richtung um Faktor $\frac{1}{2}$

Grün:

$-2\cos(2(x + \frac{\pi}{2}))$ $-2\cos(2x)$ verschoben um $\frac{\pi}{2}$ nach links

Rot:

$-2\cos(2(x + \frac{\pi}{2})) - 3$ $-2\cos(2(x + \frac{\pi}{2}))$ verschoben um 3 nach unten

1.7.2 Nullstellen der trigonometrischen Standard-Funktionen:

$\sin x = 0$

$\Rightarrow x_k = k\pi \quad k \in Z$

$\cos x = 0$

$\Rightarrow x_k = (2k+1)\dfrac{\pi}{2} \quad k \in Z$

Ferner gilt für $k \in Z$:

$\sin(k \cdot \pi) = 0$

$\sin(k \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(1-(-1)^k) \cdot (-1)^{\frac{k-1}{2}}$

$\cos(k \cdot \pi) = (-1)^k$

$\cos(k \cdot \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}(1-(-1)^{k+1}) \cdot (-1)^{\frac{k}{2}}$

1.7.3 Einfache trigonometrische Gleichungen:

Für die folgenden Gleichungen soll immer gelten $-1 \le e \le 1$, sonst sind diese nicht lösbar.

$\sin x = e$

Der Taschenrechner liefert

$x_1 = \arcsin e$ mit $-\frac{\pi}{2} \le x_1 \le \frac{\pi}{2}$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann zu

$\Rightarrow x_{1k} = x_1 + k2\pi$

$\Rightarrow x_{2k} = \pi - x_1 + k2\pi$

$= -x_1 + (2k+1)\pi$

jeweils mit $k \in Z$

$\cos x = e$

Der Taschenrechner liefert

$x_1 = \arccos e$ mit $0 \le x_1 \le \pi$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann zu

$\Rightarrow x_{1k} = x_1 + k2\pi$

$\Rightarrow x_{2k} = 2\pi - x_1 + k2\pi$

$= -x_1 + (2k+2)\pi$

jeweils mit $k \in Z$

1.7.4 Kompliziertere trigonometrische Gleichungen:

Für die folgenden Gleichungen soll immer gelten $-1 \le e \le 1$, sonst sind diese nicht lösbar.

$\sin(ax+b) = e$

Substitution $z = ax + b$ führt zu:

$\sin z = e$

Der Taschenrechner liefert

$z_1 = \arcsin e$ mit $-\frac{\pi}{2} \le z_1 \le \frac{\pi}{2}$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann zu

$z_{1k} = z_1 + 2k\pi$

$ax_{1k} + b = z_1 + 2k\pi$

$\Rightarrow x_{1k} = \dfrac{z_1 - b}{a} + 2k\dfrac{\pi}{a}$

$z_{2k} = \pi - z_1 + 2k\pi$

$= -z_1 + (2k+1)\pi$

$ax_{2k} + b = -z_1 + (2k+1)\pi$

$\Rightarrow x_{2k} = \dfrac{-z_1 - b}{a} + (2k+1)\dfrac{\pi}{a}$

jeweils mit $k \in Z$

$\cos(ax+b) = e$

Substitution $z = ax + b$ führt zu:

$\cos z = e$

Der Taschenrechner liefert

$z_1 = \arccos e \quad 0 \le z_1 \le \pi$

Die Gesamtlösung ergibt sich dann zu

$z_{1k} = z_1 + 2k\pi$

$ax_{1k} + b = z_1 + 2k\pi$

$\Rightarrow x_{1k} = \dfrac{z_1 - b}{a} + 2k\dfrac{\pi}{a}$

$z_{2k} = 2\pi - z_1 + 2k\pi$

$= -z_1 + (2k+2)\pi$

$ax_{2k} + b = -z_1 + (2k+2)\pi$

$\Rightarrow x_{2k} = \dfrac{-z_1 - b}{a} + (2k+2)\dfrac{\pi}{a}$

jeweils mit $k \in Z$

1.7.5 Der Zusammenhang zwischen Sinus und Cosinus:

- $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ Der Sinus ist ein um $\frac{\pi}{2}$ nach rechts verschobener Cosinus.

  Beispiel:
  Schreiben Sie folgende Sinus-Funktion als Cosinus-Funktion.
  $f(x) = 2\sin(2(x - \frac{\pi}{2})) + 5 = 2\cos(2(x - \frac{\pi}{2}) - \frac{\pi}{2}) + 5 = 2\cos(2(x - \frac{3\pi}{4})) + 5$

- $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ Der Cosinus ist ein um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschobener Sinus.

  Beispiel:
  Schreiben Sie folgende Cosinus-Funktion als Sinus-Funktion.
  $f(x) = -2\cos(2(x - \frac{\pi}{2})) - 3 = -2\sin(2(x - \frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2}) - 3 = -2\sin(2(x - \frac{\pi}{4})) - 3$

1.7.6 Weitere trigonometrische Zusammenhänge

- **Betrachtungen vom Einheitskreis**

  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ mit $\cos x \neq 0$ also für $x_k \neq (2k+1)\frac{\pi}{2} \quad k \in Z$

- **Summe/Differenz der Argumente der trigonometrischen Standard-Funktionen**

  $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$

  $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$

  $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

- **Doppelter Winkel der trigonometrischen Standard-Funktionen**

  $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

  $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

  $\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

- **Summe/Differenz der trigonometrischen Standard-Funktionen**

  $\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{1}{2}(x \pm y)\cos\frac{1}{2}(x \mp y)$

  $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{1}{2}(x + y)\cos\frac{1}{2}(x - y)$

  $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{1}{2}(x + y)\sin\frac{1}{2}(x - y)$

- **Produkt der trigonometrischen Standard-Funktionen**

  $\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

  $\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$

  $\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$

1.7.7 Einige wichtige Werte der einfachen trigonometrischen Funktionen

φ in Grad	0°	30°	45°	60°	90°
x in rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos x$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	ex. nicht

Merkregel:

$$\sin 0° = \frac{1}{2}\sqrt{0} = 0$$

$$\sin 30° = \frac{1}{2}\sqrt{1} = \frac{1}{2}$$

$$\sin 45° = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin 90° = \frac{1}{2}\sqrt{4} = 1$$

Umrechnung von Grad in rad:

φ ist Winkel in Grad.

x ist Winkel in rad.

$$\frac{\varphi}{360°} = \frac{x}{2\pi} \text{ oder } x = \frac{\varphi}{180°} \cdot \pi$$

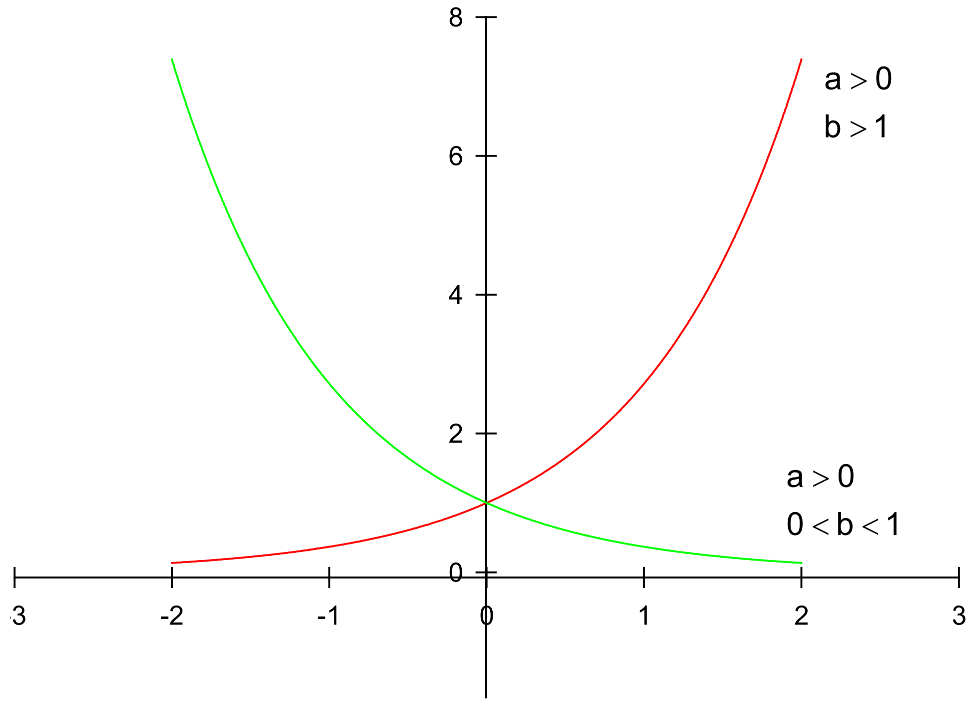
1.8 Exponentialfunktionen

Einfache Exponentialfunktionen sind Funktionen, die die unabhängige Variable x im Exponent stehen haben.

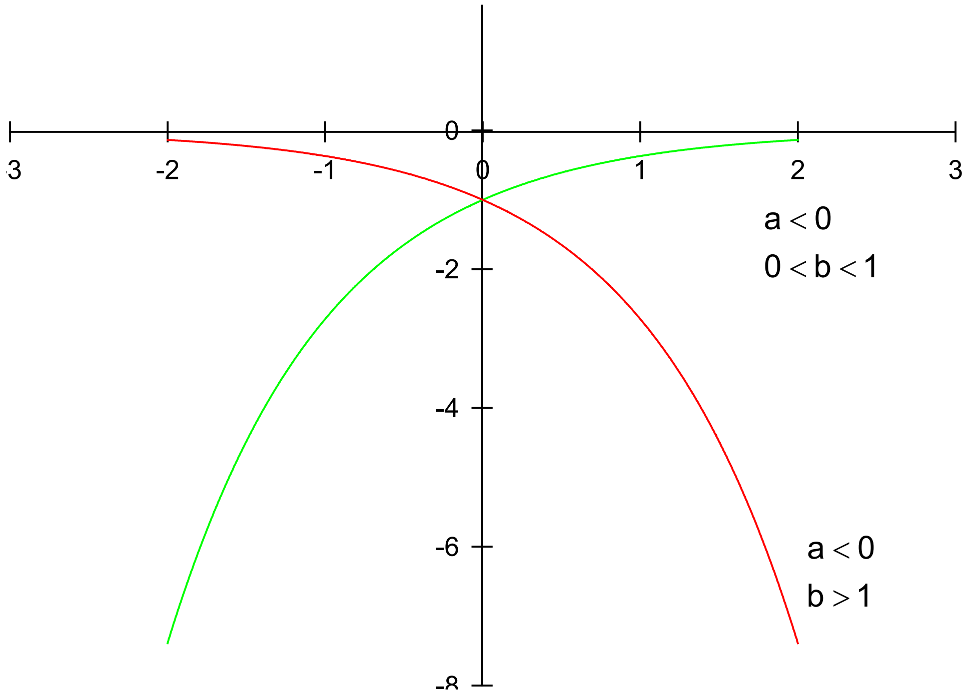
$$f(x) = a \cdot b^x$$

Man nennt a konstanten Faktor und b die Basis der Exponentialfunktion f.

- Für $a > 0$:
  Ist $0 < b < 1$, so ist die zugehörige Exponentialfunktion streng monoton fallend, ist $b > 1$, so ist sie streng monoton steigend.



- Für $a < 0$:
  Ist $0 < b < 1$, so ist die zugehörige Exponentialfunktion streng monoton steigend, ist $b > 1$, so ist sie streng monoton fallend.



Die oben genannten einfachen Exponentialfunktionen f liegen alle oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse, das hängt jeweils vom konstanten Faktor a ab:

- oberhalb:
  $f(x) > 0$ für alle $x \in R$ und alle $a > 0$
- unterhalb:
  $f(x) < 0$ für alle $x \in R$ und alle $a < 0$

Setzt man $a = 1$ und $b = e$, so erhält man die einfachste aller Exponentialfunktionen nämlich die sogenannte e-Funktion.

Die Zahl e nennt man Eulersche Zahl und man erhält sie, wie folgt:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e, \text{mit } e \approx 2{,}71828...$$

Wenngleich dies auf den ersten Blick doch recht kompliziert erscheint, so hat die Funktion $f(x) = e^x$ doch einige Vorteile.
Ihre Ableitung geht nämlich in sich selbst über:

$$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x \qquad f''(x) = e^x \quad \text{usw.}$$

Bei anderen, komplizierteren Exponentialfunktionen ist dies nicht mehr der Fall:

$$f(x) = a \cdot b^x = a \cdot e^{(\ln b)\cdot x} \qquad f'(x) = a \cdot (\ln b) \cdot b^x$$

$$f(x) = a \cdot b^{g(x)} = a \cdot e^{(\ln b)\cdot g(x)} \qquad f'(x) = a \cdot (\ln b) \cdot g'(x) \cdot b^{g(x)}$$

Anmerkung:
Jede einfache Exponentialfunktion kann man als e-Funktion umschreiben mit Hilfe der Potenz- und Logarithmusgesetze.

$$f(x) = 2 \cdot 3^x = 2 \cdot (e^{\ln 3})^x = 2 \cdot e^{(\ln 3) \cdot x}$$

$$f(x) = -2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x = -2 \cdot \left(e^{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right)^x = -2 \cdot e^{(\ln(\frac{2}{3})) \cdot x} = -2 \cdot e^{(-\ln(\frac{3}{2})) \cdot x}$$

Es gilt – 'mathematisch nicht korrekt geschrieben':

$$e^x > 0$$

$$e^{+\infty} \to +\infty$$

$$e^{-\infty} \to 0^+$$

2 Vektoren

Geometrisch gesprochen sind dies Pfeile, die durch eine **Parallelverschiebung** jedem Punkt der Ebene (des Raumes) einen Bildpunkt zuordnet. Dabei sind die jeweils von einem Punkt zu seinem Bildpunkt weisenden Pfeile **parallel**, **gleichlang** und **gleichgerichtet**. Jeder solcher Pfeil ist ein sogenannter **Repräsentant** dieser Verschiebung.
Man stellt Vektoren wie folgt dar:

$$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c},\ ...,\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z}$$

In der Physik gibt es Größen, die lediglich durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert sind – dies sind z. B. die Masse *m*, die Zeit *t*, usw.
Solche Größen werden als **skalare physikalische Größen** bezeichnet.

Es gibt in der Physik jedoch noch andere Größen, die zusätzlich zum Zahlenwert (Betrag) auch noch die Angabe ihrer Richtung benötigen – dies sind z. B. die Geschwindigkeit $\vec{v}$, die Beschleunigung $\vec{a}$, die Kraft $\vec{F}$ usw.
Solche Größen werden als **vektorielle physikalische Größen** bezeichnet.

Vektorielle physikalische Größen werden mit einem Pfeil über ihrem physikalischen Symbol gekennzeichnet. Die Pfeilspitze charakterisiert die Richtung. Die Länge des Pfeils stellt ein Maß für den Betrag $|\vec{a}| = a$ der vektoriellen Größe $\vec{a}$ dar.

Man definiert $-\vec{a}$ als **Gegenvektor**, also als einen Vektor mit demselben Betrag wie Vektor $\vec{a}$, jedoch entgegengesetzter Richtung.

Zwei Vektoren sind dann und nur dann gleich, wenn sie in Betrag und Richtung übereinstimmen.

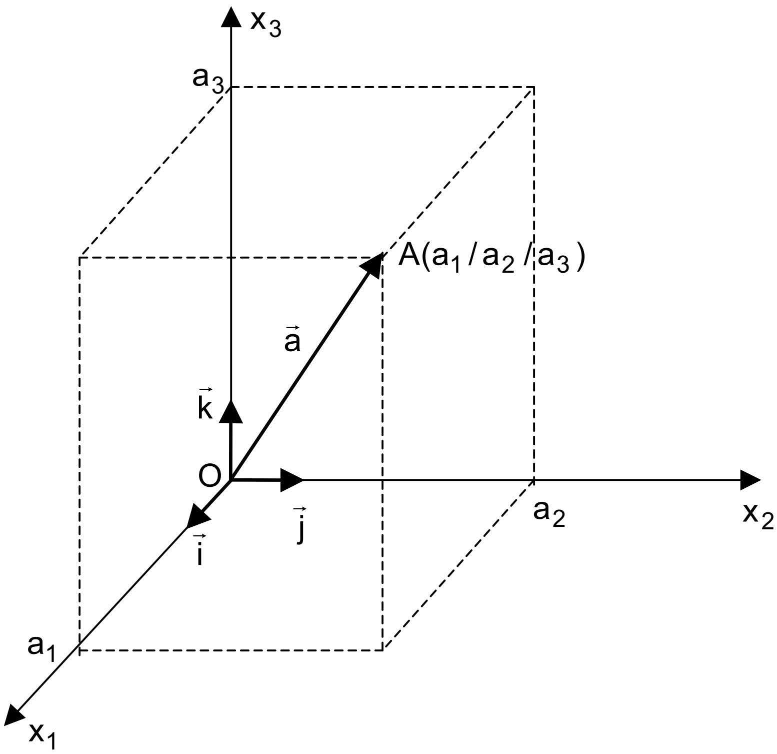
2.1 Darstellung von Vektoren im Raum

Der Einfachheit halber legt man immer ein **kartesisches Koordinatensystem** zugrunde.
Ein kartesisches Koordinatensystem zeichnet sich durch drei zueinander orthogonal stehenden zur Norm 1 geeichten Achsen $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ (**Einheitsvektoren** – Vektoren der Länge Eins – in den drei Koordinatenrichtungen, die ein **Rechtssystem** bilden) und den **Ursprung** O aus.

Rechtssystem
Wenn man mit der rechten Hand den Vektor $\vec{i}$ im mathematisch positiven Sinn – also gegen den Uhrzeiger und auf dem kürzesten Weg – auf den Vektor $\vec{j}$ dreht, so zeigt der Daumen in Richtung des zu beiden Vektoren orthogonalen Vektors $\vec{k}$.

$A(a_1 / a_2 / a_3)$ a_i, mit $i = 1, 2, 3$ nennt man **Koordinaten** eines **Punktes** aus R^3.

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ a_i, mit $i = 1, 2, 3$ nennt man **Komponenten** eines **Vektors** aus R^3.



$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.2 Anmerkung

Vektoren, die im Ursprung starten und auf einen bestimmten Punkt im Koordinatensystem weisen, nennt man **Ortsvektoren**.
Man spricht von einem dem Punkt zugehörigen Ortsvektor.

Vektoren, die lediglich dazu dienen eine Richtung anzugeben (also unabhängig von ihrem Anfangspunkt sind), nennt man **Richtungsvektoren**.

2.3 Darstellung von Vektoren in der Ebene

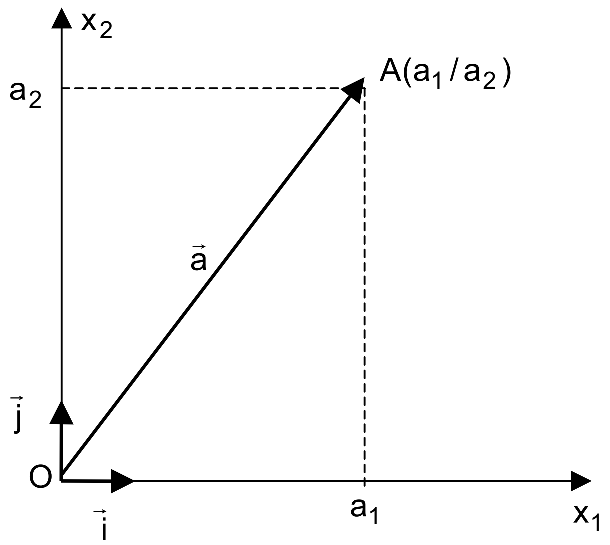
Der Einfachheit halber legt man immer ein **kartesisches Koordinatensystem** zugrunde.
Ein kartesisches Koordinatensystem zeichnet sich durch zwei zueinander orthogonal stehenden zur Norm 1 geeichten Achsen $\vec{i}, \vec{j}$ (**Einheitsvektoren** in den zwei Koordinatenrichtungen, die ein **Rechtssytem** bilden) und den **Ursprung** O aus.

$$A(a_1 / a_2)$$

a_i, mit $i = 1, 2$ nennt man **Koordinaten** eines **Punktes** aus R^2.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

a_i, mit $i = 1, 2$ nennt man **Komponenten** eines **Vektors** aus R^2.



$$\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2.4 Betrag eines Vektors

$$|\vec{a}| = a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Der Betrag eines Vektors ist ein Maß für seine Länge und somit eine skalare Größe. Bei der Darstellung läßt man entweder den Vektorpfeil einfach weg oder man schreibt den Vektor in Betragsstriche.

2.5 Normierung eines Vektors

Normierter Vektor (Vektor der Länge 1)

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

Jeder Vektor $\vec{a}$ hat einen zugehörigen normierten Vektor $\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, der in dieselbe Richtung zeigt, jedoch die Länge 1 besitzt.

2.6 Addition von Vektoren

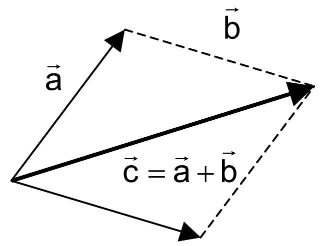
- **Geometrische Deutung**

Die additive Verknüpfung zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ergibt wieder einen Vektor

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

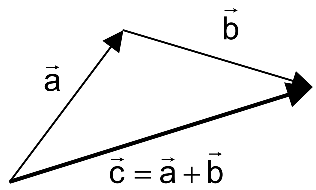
- **Konstruktionsvariante 1** (Parallelogrammregel)

  Man verschiebt beide Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ derart, dass ihre Anfangspunkte übereinstimmen. Dann konstruiert man ein Parallelogramm durch die Spitzen der beiden Vektoren. Der Vektor längs derjenigen Diagonalen des Parallelogramms vom gemeinsamen Anfangspunkt zum gegenüberliegenden Punkt des Parallelogramms ist dann der gesuchte Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



- **Konstruktionsvariante 2** (Vektorpolygon)

  Man verschiebt beide Vektoren derart, dass der Anfangspunkt von $\vec{b}$ mit dem Endpunkt von $\vec{a}$ übereinstimmt. Der Vektor zwischen Anfangspunkt von $\vec{a}$ und Endpunkt von $\vec{b}$ ist dann gleich dem gesuchten Summenvektor $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.



- **Algebraische Deutung**

Man schreibt die Vektoren mit all ihren Komponenten und es ist leicht ersichtlich, dass folgendes gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Vektoren werden komponentenweise addiert.

- **Anmerkung**

Die Subtraktion von Vektoren läßt sich auf eine Addition des Gegenvektors zurückführen. Es gilt also:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$

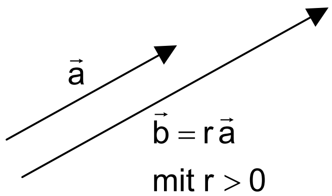
2.7 Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

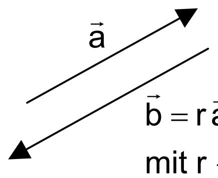
- **Geometrische Deutung**

Man kann einen Vektor $\vec{a}$ mit einem Skalar $r \in R$ multiplizieren.

Das r-fache eines solchen Vektors nennt man **S-Multiplikation** $\vec{b} = r\vec{a}$

- Ist $r > 0$, so bleibt die Richtung des Vektors erhalten (parallel $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$).
- Ist $r < 0$, so wird die Richtung des Vektors umgekehrt (antiparallel $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$).
- Ist $r = 0$, so erhält man den sogenannten **Nullvektor** $\vec{0}$.





- **Algebraische Deutung**

Man schreibt den Vektor mit all seinen Komponenten und es ist leicht ersichtlich, dass folgendes gilt:

$$r\vec{a} = r\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra_1 \\ ra_2 \\ ra_3 \end{pmatrix}$$

Bei einer Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar wird jede Komponente mit dem Skalar multipliziert.

- **Differenzieren und Integrieren von Vektoren**

Ohne einen mathematischen Beweis zu führen, gilt:

- **Differentiation eines Vektors**

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}a_1(t) \\ \frac{d}{dt}a_2(t) \\ \frac{d}{dt}a_3(t) \end{pmatrix}$$

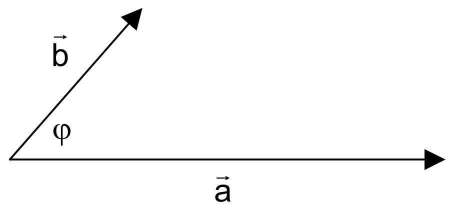
- **Integration eines Vektors**

$$\int \vec{a}(t)\,dt = \int \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \int a_1(t)\,dt \\ \int a_2(t)\,dt \\ \int a_3(t)\,dt \end{pmatrix}$$

Vektoren werden komponentenweise differenziert und integriert.

2.8 Skalarprodukt zweier Vektoren

Skalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in kartesischen Koordinaten im Raum R^3



- **Definition**

Das Skalarprodukt ist – wie der Name schon andeutet –

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

eine skalare Größe, also $\in R$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi \text{ mit } 0^o \le \varphi \le 360^o \text{ und } \varphi\angle\vec{a},\vec{b}$$

- **Folgerungen**
  - Winkel zwischen zwei Vektoren

    $$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$
  - Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in kartesischen Koordinaten sind orthogonal (senkrecht zueinander), wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt, also wenn gilt

    $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$
  - Ferner erkennt man rein formal

    $$\vec{a}\cdot\vec{a} = \vec{a}^2 = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$$

    $\vec{a}^2 = a^2$

    'Das Quadrat eines Vektors ist gleich dem Quadrat seines Betrags'

- **Rechenregeln**
  - Das Skalarprodukt ist kommutativ, d. h.

    $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

    Die Reihenfolge ist vertauschbar
  - Das Skalarprodukt ist distributiv, d. h.

    $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

    Man darf 'ausmultiplizieren'
  - Die Ableitung des Skalarprodukts

    $$\frac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\frac{d\vec{b}}{dt}$$

    Produktregel