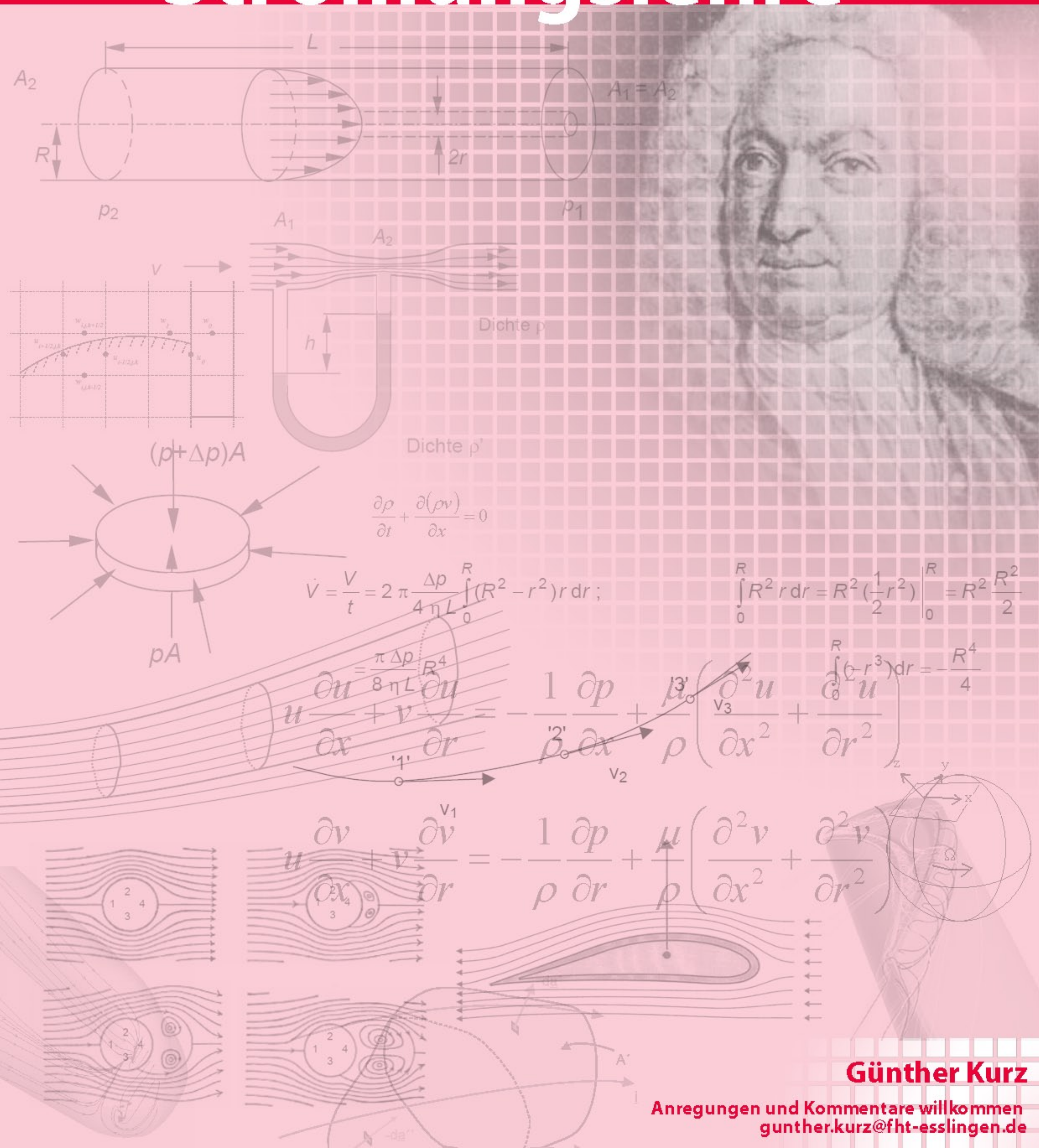
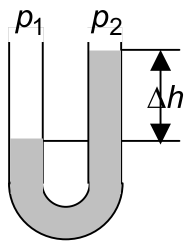
Strömungslehre Aufgaben



Günther Kurz
Anregungen und Kommentare willkommen
gunther.kurz@fht-esslingen.de

Aufgabe 1

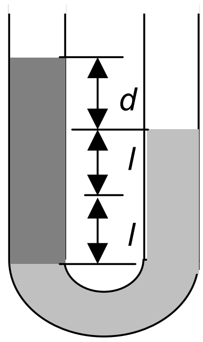
In einem Differenzdruckmanometer sind die statischen Drucke in den Schenkeln $p_1 = 2\ \text{bar}$ und $p_2 = 1{,}5\ \text{bar}$ (siehe Skizze). Die Meßflüssigkeit ist Quecksilber (Hg) mit einer Dichte von $\rho_{Hg} = 13{,}59\ \text{kg}\,\text{dm}^{-3}$.



Wie groß ist die sich einstellende Höhendifferenz Δh der Flüssigkeitssäulen in den beiden Schenkeln des U-Rohres? [$\Delta h = 0{,}375\ \text{m}$].

Aufgabe 2

Ein U-Rohr sei teilweise mit Wasser gefüllt. In einen der beiden Schenkel wird eine andere Flüssigkeit gegossen, die sich nicht mit Wasser mischt, bis die Oberfläche der Flüssigkeit um den Betrag $d = 3\ \text{cm}$ höher steht als das Wasser im anderen Schenkel. Dessen Meniskus hat sich während des Eingießens um den Betrag $l = 5\ \text{cm}$ gehoben (siehe Skizze).



Die Dichte von Wasser beträgt $\rho_{H_2O} = 1{,}0\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}$.

Wie groß ist die Dichte ρ_{Fl} der anderen Flüssigkeit? [$\rho_{Fl} = 0{,}77\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}$].

Aufgabe 3

Zwei gleiche Kugeln mit $d = 100\ \text{mm}$ Durchmesser werden in Wasser eingetaucht. Die erste Kugel ist aus Holz mit einer Dichte von $\rho_{Holz} = 0{,}80\ \text{kg}\,\text{dm}^{-3}$. Die zweite Kugel ist aus Stahl mit einer Dichte von $\rho_{Stahl} = 7{,}85\ \text{kg}\,\text{dm}^{-3}$.

(a) Wie groß ist die Auftriebskraft der Kugel aus Holz? [$F_{A,Holz} = -5{,}14\ \text{N}$].

(b) Wie groß ist die resultierende Kraft auf diese Kugel? [$F_{res,Holz} = -1{,}03\ \text{N}$].

(c) Wie groß ist die Auftriebskraft der Kugel aus Stahl? [$F_{A,Stahl} = -5{,}14\ \text{N}$].

(d) Wie groß ist die resultierende Kraft auf diese Kugel? [$F_{res,Stahl} = +35{,}2\ \text{N}$].

Aufgabe 4

Um festzustellen, ob ein Gegenstand aus reinem Gold mit der Dichte $\rho_{Au} = 19{,}3\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}$ ist, wird die Gewichtskraft in Luft $F_{G,L}$ (Auftrieb in Luft ist zu vernachlässigen) und die scheinbare Gewichtskraft in Wasser $F_{G,W}$ festgestellt.

Die Dichte von Wasser beträgt $\rho_{H_2O} = 1{,}0\ \text{g}\,\text{cm}^{-3}$.

Welches Verhältnis $f = \dfrac{F_{G,L}}{F_{G,W}}$ muss sich bei reinem Gold ergeben? [$f = 1{,}055$].

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Aufgabe 5
Der Querschnitt eines Glasrohres, das von Wasser durchströmt wird, verjüngt sich von $A_1 = 4\ \mathrm{cm}^2$ auf $A_1 = 1\,\mathrm{cm}^2$. Vor und hinter der Verjüngung sind auf dem Rohr Steigröhrchen aufgesetzt. Im ersten Steigröhrchen steht der Wasserspiegel $h_1 = 1{,}5\ \mathrm{cm}$ hoch.

(a) Wie hoch steht das Wasser im zweiten Steigröhrchen, wenn die Strömungsgeschwindigkeit im engen Rohrteil $v_2 = 80\ \mathrm{cm\,s^{-1}}$ ist und die Viskosität des Wassers vernachlässigt werden kann? [$h_2 = 12{,}0\ \mathrm{cm}$].

(b) Mit welcher Geschwindigkeit müsste das Wasser im engen Rohr fließen, wenn die Steighöhe im ersten Röhrchen unverändert $h_1 = 1{,}5\ \mathrm{cm}$, im zweiten jedoch $h_2 = 0\ \mathrm{cm}$ wäre? [$v_2 = 1{,}77\ \mathrm{m\,s^{-1}}$].

Aufgabe 6

In eine Wasserleitung soll ein Strömungsmesser (VENTURI-Düse) eingebaut werden, dessen Differenzdruckmanometer beim größten Volumenstrom $\dot{V}_{\max} = 2{,}0\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ gerade Vollausschlag $\Delta p = 3000\ \mathrm{Pa}$ anzeigen soll. Wie groß muss der Durchmesser d_2 der engsten Stelle gewählt werden, wenn der Leitungsdurchmesser $d_1 = 50\ \mathrm{mm}$ beträgt? [$d_2 = 31\,\mathrm{mm}$].

Aufgabe 7

Durch ein Rohr mit $d_1 = 70\ \mathrm{mm}$ Durchmesser fließt Öl (Dichte $\rho = 0{,}82\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$). Eine VENTURI-Düse verengt das Rohr auf die Hälfte seines Durchmessers. Sperrflüssigkeit im U-Rohr-Manometer ist Quecksilber. Der kleinste ablesbare Höhenunterschied des Manometers ist $\Delta h_{\min} = 2\ \mathrm{mm}$, der größte $\Delta h_{\max} = 50\ \mathrm{mm}$. Welche Volumenströme $\dot{V}_{\min}$ und $\dot{V}_{\max}$ entsprechen diesen Ablesungen? [$\dot{V}_{\min} = 0{,}8\ \mathrm{l\,s^{-1}}$ und $\dot{V}_{\max} = 4\ \mathrm{l\,s^{-1}}$].

Aufgabe 8

Eine Stahlkugel (Radius $R = 5\ \mathrm{mm}$; $\rho_{\mathrm{Stahl}} = 7{,}87\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$) fällt in einen Bottich, der mit einer Flüssigkeit (Dichte $\rho_{\mathrm{Fl}} = 0{,}80\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$; Viskosität $\eta_{\mathrm{Fl}} = 100\ \mathrm{Pa\,s}$) gefüllt ist.
Welche Wegstrecke s legt die Kugel im Zeitintervall $t = 1{,}0\ \mathrm{min}$ zurück? [$s = 23{,}6\ \mathrm{cm}$].

Aufgabe 9

Durch eine $L = 100\ \mathrm{m}$ lange Rohrleitung (Rohrdurchmesser $D = 20\ \mathrm{mm}$) soll Öl (Dichte $\rho_{\text{Öl}} = 0{,}90\ \mathrm{kg\,dm^{-3}}$; Viskosität $\eta_{\text{Öl}} = 0{,}01\,\mathrm{Pa\,s}$) gepumpt werden. Die Strömung soll laminar sein, die Strömungsgeschwindigkeit aber möglichst groß.
Welche Leistung P muss die Pumpe haben? [$P = 42\ \mathrm{W}$].

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Aufgabe 10

Ein Lastwagen (Masse $m = 3\,600\ \text{kg}$, Schattenfläche $A = 4{,}2\ \text{m}^2$) fährt mit einer Motorleistung von $P = 44\ \text{kW}$, die mit einem Wirkungsgrad von 60 % auf die Räder übertragen wird. Er erzielt dabei auf horizontaler Straße die Geschwindigkeit $v = 60\ \text{km}\,\text{h}^{-1}$. Der Rollreibungskoeffizient der Räder beträgt $\mu = 0{,}03$, die Dichte der Luft $\rho_{\text{Luft}} = 1{,}23\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$. Welchen Widerstandsbeiwert c_{W} hat das Fahrzeug? [$c_{\text{W}} = 0{,}70$].

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass für eine mit der Geschwindigkeit $v = 100\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ durch die Luft fliegende Kugel (Radius $R = 10\ \text{cm}$) der nach STOKES berechnete Reibungswiderstand F_{R} vernachlässigbar klein ist gegenüber dem durch Wirbelbildung verursachten Widerstand F_{D}.
Die Viskosität der Luft ist $\eta_{\text{Luft}} = 1{,}83 \cdot 10^{-5}\ \text{Pa}\,\text{s}$ und ihre Dichte $\rho_{\text{Luft}} = 1{,}23\ \text{kg}\,\text{m}^{-3}$.
[$\frac{F_{\text{D}}}{F_{\text{R}}} \cong 10^4$].

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung sowie Vervielfältigung und Verbreitung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 1

Hierbei handelt es sich um ein statisches Problem (die Geschwindigkeiten in den Schenkeln ist jeweils Null – d. h. keine dynamischen Drucke). Die BERNOULLI-Gleichung reduziert sich auf die folgende Gestalt.

$$p_1 + \rho_{Hg} g h_1 = p_2 + \rho_{Hg} g h_2$$

Die Höhen werden von einem definierten Nullniveau aus gemessen (geschickterweise wird die Oberfläche der Quecksilbersäule des linken Schenkels gewählt).

$$p_1 + \rho_{Hg} g \underbrace{h_1}_{=0} = p_2 + \rho_{Hg} g \underbrace{h_2}_{=\Delta h}$$

$$p_1 = p_2 + \rho_{Hg} g \Delta h$$

Hieraus folgt für die Höhendifferenz der beiden Oberflächen in den Schenkeln

$$\Delta h = \frac{p_1 - p_2}{\rho_{Hg} g} = \frac{0{,}5\ \text{bar}}{13{,}59\ \text{kgdm}^{-3} \cdot 9{,}81\ \text{m}\,\text{s}^{-2}} = \frac{0{,}5 \cdot 10^5\ \text{Nm}^{-2}}{13590\ \text{kgm}^{-3} \cdot 9{,}81\ \text{m}\,\text{s}^{-2}} = 0{,}375\ \text{m}$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 2

Hierbei handelt es sich um ein statisches Problem (die Geschwindigkeiten in den Schenkeln ist jeweils Null – d. h. keine dynamischen Drucke). Die BERNOULLI-Gleichung reduziert sich auf die folgende Gestalt.

$$p_1 + \rho_{\mathrm{Fl}} g h_1 = p_2 + \rho_{\mathrm{H_2O}} g h_2$$

Zusätzlich sind hier noch die beiden statischen Drucke gleich.

$$p_1 = p_2 = p$$

Die Höhen werden von einem definierten Nullniveau aus gemessen (geschickterweise wird die Oberfläche der Wassersäule des linken Schenkels gewählt).

$$p + \rho_{\mathrm{Fl}} g \cdot (2l + d) = p + \rho_{\mathrm{H_2O}} g \cdot (2l)$$

Hieraus folgt für die Dichte der eingefüllten Flüssigkeit

$$\rho_{\mathrm{Fl}} = \frac{\rho_{\mathrm{Hg}} g \cdot (2l)}{g \cdot (2l + d)} = 2\rho_{\mathrm{H_2O}} \frac{l}{2l + d} = 2 \cdot 1{,}0\ \mathrm{g\,cm^{-3}}\ \frac{5\ \mathrm{cm}}{10\ \mathrm{cm} + 3\ \mathrm{cm}} = 0{,}77\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 3

Die Auftriebskraft ist nach ARCHIMEDES gleich der Gewichtskraft des verdrängten Flüssigkeitsvolumens.

Der Durchmesser der Kugeln ist $d = 10^{-1}$ m und somit ist der Radius der Kugeln $r = 5 \cdot 10^{-2}$ m.

Das Volumen der Kugeln ist somit $V_{\mathrm{Ku}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = 5{,}24 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^3$

Die Kugeln sind vollständig eingetaucht, d. h. das volle Kugelvolumen wird an Wasser verdrängt.

(a), (c) Die Auftriebskraft ist somit für die Holzkugel dieselbe wie die für die Stahlkugel

$$F_{\mathrm{A,Holz}} = F_{\mathrm{A,Stahl}} = \underbrace{\rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{Ku}}}_{m_{\mathrm{H_2O,verdr}}} g = 5{,}14\ \mathrm{N}$$

Diese wirkt nach oben (der Gewichtskraft entgegen und wird somit mit einem Minus versehen).

$$-F_{\mathrm{A,Holz}} = -F_{\mathrm{A,Stahl}} = -\underbrace{\rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{Ku}}}_{m_{\mathrm{H_2O,verdr}}} g = -5{,}14\ \mathrm{N}$$

(b) Die resultierende Kraft ist die vektorielle Summe aus Gewichtskraft und Auftriebskraft,

da diese jedoch in entgegengesetzte Richtungen wirken, kann man auf die reinen Beträge zugreifen und bildet die Differenz aus dem Betrag der Gewichtskraft und dem Betrag der Auftriebskraft.

$$F_{\mathrm{res,Holz}} = \left|F_{\mathrm{G,Holz}}\right| - \left|F_{\mathrm{A,Holz}}\right| = \rho_{\mathrm{Holz}} V_{\mathrm{Ku}} g - \rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{Ku}} g = (\rho_{\mathrm{Holz}} - \rho_{\mathrm{H_2O}}) V_{\mathrm{Ku}} g = -1{,}03\ \mathrm{N}$$

Das Minuszeichen zeigt an, dass die Holzkugel eine Resultierende nach oben erfährt.

(d) Die resultierende Kraft ist die vektorielle Summe aus Gewichtskraft und Auftriebskraft,

da diese jedoch in entgegengesetzte Richtungen wirken, kann man auf die reinen Beträge zugreifen und bildet die Differenz aus dem Betrag der Gewichtskraft und dem Betrag der Auftriebskraft.

$$F_{\mathrm{res,Stahl}} = \left|F_{\mathrm{G,Stahl}}\right| - \left|F_{\mathrm{A,Stahl}}\right| = \rho_{\mathrm{Stahl}} V_{\mathrm{Ku}} g - \rho_{\mathrm{H_2O}} V_{\mathrm{Ku}} g = (\rho_{\mathrm{Stahl}} - \rho_{\mathrm{H_2O}}) V_{\mathrm{Ku}} g = +35{,}2\ \mathrm{N}$$

Das Pluszeichen zeigt an, dass die Stahlkugel eine Resultierende nach unten erfährt.

Ist die Kugel nur zu einem Bruchteil eingetaucht, so erfährt sie nur denselben Bruchteil an Auftriebskraft.

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung sowie Vervielfältigung und Verbreitung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 4

Die Gewichtskraft in Wasser entspricht der resultierenden Kraft aus reiner Gewichtskraft und Auftriebskraft.

$$F_{A,L} = \rho_{Au} V g$$

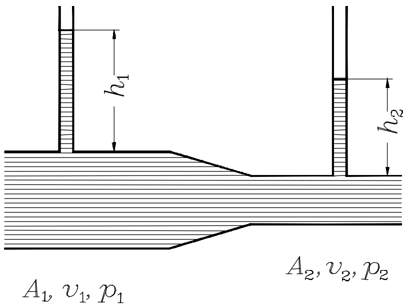
$$F_{A,W} = (\rho_{Au} - \rho_{H_2O}) V g$$

Somit ist das Verhältnis

$$f = \frac{F_{A,L}}{F_{A,W}} = \frac{\rho_{Au}}{\rho_{Au} - \rho_{H_2O}} = 1{,}055$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 5



Es seien an den Orten '1' und '2',
die Querschnitte A_1 und A_2,
die Geschwindigkeiten v_1 und v_2,
die Drucke p_1 und p_2;
die Steighöhen in den Röhrchen h_1 und h_2,
der äußere Luftdruck p_L.

Die statischen Drucke sind $p_1 = \rho \cdot g \cdot h_1 + p_L$ und $p_2 = \rho \cdot g \cdot h_2 + p_L$

Die Kontinuitätsgleichung liefert für den Volumenstrom $\dot{V} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const.}$

(a) Daraus folgt für die Geschwindigkeiten

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} \cdot v_2$$

Die BERNOULLI-Gleichung fordert (für eine reibungsfreie Flüssigkeit) bei einer horizontalen Rohrströmung

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

Einsetzen der oben angegebenen Beziehungen für die Drücke p_1 und p_2 und die Geschwindigkeit v_1 ergibt

$$\rho \cdot g \cdot h_1 + p_L + \frac{\rho}{2} \cdot \frac{A_2^2}{A_1^2} \cdot v_2^2 = \rho \cdot g \cdot h_2 + p_L + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2$$

Daraus

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \cdot [\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1] + \cdot h_1$$

$$= \frac{(0{,}8\,\mathrm{m\,s^{-1}})^2}{2 \cdot 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}} [\frac{1}{16} - 1] + 15{,}0\text{ cm} = -3{,}0\text{ cm} + 15{,}0\text{ cm} = 12{,}0\text{ cm}$$

(b) Fordert man $h_2 = 0$; dann muss gelten

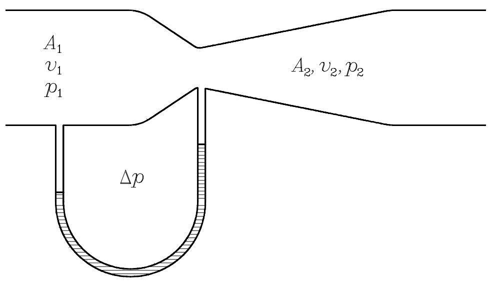
$$0 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \cdot [\frac{A_2^2}{A_1^2} - 1] + \cdot h_1 \quad \text{oder} \quad h_1 = \frac{v_2^2}{2 \cdot g} \cdot [1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}] \quad \text{und}$$

$$v_2^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h_1}{[1 - \frac{A_2^2}{A_1^2}]} = \frac{2 \cdot 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} \cdot 0{,}15\,\mathrm{m}}{[1 - \frac{1}{16}]} = 3{,}2\,\mathrm{m^2\,s^{-2}} \quad \text{und} \quad v_2 = 1{,}79\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Bei noch höherer Geschwindigkeit wird h_2 negativ, es wird Luft in das Rohr gesaugt. Dies ist das Prinzip der Wasserstrahlpumpe.

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 6



Es seien an den Orten ‘1‘ und ‘2‘,
die Querschnitte A_1 und A_2,
die Geschwindigkeiten v_1 und v_2,
die Drucke p_1 und p_2.
Die Steighöhen in den beiden Schenkeln des U-Rohr-Manometers liefern die Druckdifferenz $\Delta p = p_1 - p_2$

Der maximale Volumenstrom ist $\dot{V}_{max} = A_1 \cdot v_{1max}$

Der Querschnitt ergibt sich zu $A_1 = \pi \cdot (\frac{d_1}{2})^2 = \pi \cdot (2{,}5\,\text{cm})^2 = 19{,}63\,\text{cm}^2$

Die maximale Geschwindigkeit wird $v_{1max} = \frac{\dot{V}_{max}}{A_1} = \frac{2 \cdot 10^{-2}\,\text{m}^3\,\text{s}^{-1}}{19{,}6 \cdot 10^{-4}\,\text{m}^2} = 1{,}02\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$

Die Kontinuitätsgleichung liefert für den Volumenstrom

$$\dot{V} = A_1 \cdot v_{1max} = A_2 \cdot v_2 = \text{const.}$$

Daraus folgt für die Geschwindigkeiten

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_{1max}$$

Die BERNOULLI-Gleichung fordert (für eine reibungsfreie Flüssigkeit) für eine horizontale Rohrströmung

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1{}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2{}^2$$ zusammen mit der Kontinuitätsgleichung wird

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_{1max}{}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot [\frac{A_1}{A_2}]^2 \cdot v_{1max}{}^2$$

und

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot [\frac{A_1}{A_2}]^2 \cdot v_{1max}{}^2 - \frac{\rho}{2} \cdot v_{1max}{}^2$$

also

$$[\frac{A_1}{A_2}]^2 = \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot v_{1max}{}^2} + 1$$ und damit $$A_2{}^2 = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot v_{1max}{}^2}} \cdot A_1{}^2$$

Für die Querschnittsflächen gilt $A_i = \pi \cdot (\frac{d_i}{2})^2$; letztlich also wegen $A_i \sim d_i{}^2$

$$d_2{}^4 = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot v_{1max}{}^2}} \cdot d_1{}^4$$

$$d_2{}^4 = \frac{1}{1 + \frac{2 \cdot 3 \cdot 10^3\,\text{Nm}^{-2}}{1 \cdot 10^3\,\text{kgm}^{-3} \cdot (1{,}02^2\,\text{m}^2\,\text{s}^{-2})}} \cdot d_1{}^4 = \frac{1}{6{,}77} \cdot d_1{}^4 = 0{,}148 \cdot d_1{}^4$$

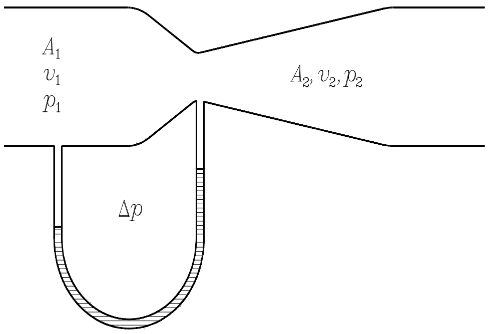
Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Oder nach Ziehen der vierten Wurzel (dabei sind in der Physik nur positive Wurzeln sinnvoll!)

$$d_2 = 0{,}62 \cdot d_1 = 0{,}62 \cdot 50\,\text{mm} = 31\,\text{mm}$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 7



Es seien an den Orten ‘1‘ und ‘2‘,
die Querschnitte A_1 und A_2,
die Geschwindigkeiten v_1 und v_2,
die Drucke p_1 und p_2.

Es ist $\quad \Delta p = (\rho_{Hg} - \rho_{Öl}) \cdot g \cdot \Delta h$

Damit

$$\Delta p_{min} = (13{,}54 - 0{,}82) \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 254 \text{ Nm}^{-2}$$

$$\Delta p_{max} = (13{,}54 - 0{,}82) \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3} \cdot 10 \text{ ms}^{-2} \cdot 50 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6\,360 \text{ Nm}^{-2}$$

Die Kontinuitätsgleichung liefert für den Volumenstrom $\dot{V} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const.}$

Daraus folgt für die Geschwindigkeiten

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} \cdot v_1$$

Die BERNOULLI-Gleichung fordert (für eine reibungsfreie Flüssigkeit) bei einer horizontalen Rohrströmung

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$ zusammen mit der Kontinuitätsgleichung wird

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot [\frac{A_1}{A_2}]^2 \cdot v_1^2$$ also

$$\Delta p = p_1 - p_2 = \frac{\rho}{2} \cdot [\frac{A_1}{A_2}]^2 \cdot v_1^2 - \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2$$

damit

$$v_1^2 = \frac{2 \cdot \Delta p}{\rho \cdot [(\frac{A_1}{A_2})^2 - 1]} = \frac{2}{820 \text{ kgm}^{-3} [4^2 - 1]} \cdot \Delta p = 1{,}62 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1} \text{m}^3 \cdot \Delta p$$

$$v_{1min}^2 = 1{,}62 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1} \text{m}^3 \cdot 254 \text{ kgms}^{-2} \text{ m}^{-2} = 4{,}13 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$v_{1max}^2 = 1{,}62 \cdot 10^{-4} \text{ kg}^{-1} \text{m}^3 \cdot 6360 \text{ kgms}^{-2} \text{ m}^{-2} = 1{,}03 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$$

Schließlich

$$v_{1min} = 0{,}203 \text{ ms}^{-1} \qquad \text{und} \qquad v_{1max} = 1{,}01 \text{ ms}^{-1}$$

Der Querschnitt ist $\quad A_1 = \pi \cdot \frac{d_1^2}{4} = \pi \cdot \frac{(7{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2}{4} = 38{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$

Die Volumenströme werden damit

$$\dot{V}_{min} = 38{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 0{,}203 \text{ ms}^{-1} = 0{,}782 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \approx 0{,}8 \text{ ls}^{-1}$$

$$\dot{V}_{max} = 38{,}5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot 1{,}01 \text{ ms}^{-1} = 3{,}89 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1} \approx 4 \text{ ls}^{-1}$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 8

Eine sinkende Kugel in einem großen Bottich erfüllt die *Forderung Abmessungen Kugel sehr klein gegen Abmessungen Bottich*.

Es stellt sich eine konstante Sinkgeschwindigkeit ein, wenn auf die Kugel keine resultierende Kraft wirkt, denn dann ist die Beschleunigung Null.

Auf die Kugel wirken

die Gewichtskraft $F_G = m_K \cdot g = \rho_{Stahl} \cdot V_K \cdot g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_K{}^3 \cdot \rho_{Stahl} \cdot g$

die Auftriebskraft $F_A = m_{Fl} \cdot g = \rho_{Flüss} \cdot V_{Flüss} \cdot g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_K{}^3 \cdot \rho_{Flüss} \cdot g$

die STOKESsche Reibungskraft $F_R = 6 \cdot \pi \cdot \eta_{Flüss} \cdot R_K \cdot v$

Dabei wird angenommen, dass die Umströmung der Kugel laminar ist. Diese Annahme ist anschließend über die REYNOLDsche Zahl zu überprüfen.

Die Gleichgewichtsbedingung lautet also

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_K{}^3 \cdot \rho_{Stahl} \cdot g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R_K{}^3 \cdot \rho_{Flüss} \cdot g + 6 \cdot \pi \cdot \eta_{Flüss} \cdot R_K \cdot v$$

Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit zu

$$v = \frac{2 \cdot R_K{}^2 \cdot g}{9 \cdot \eta_{Flüss}} \cdot (\rho_{Stahl} - \rho_{Flüss})$$

$$= \frac{2 \cdot (5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m})^2 \cdot 10\ \mathrm{m\,s^{-2}}}{9 \cdot 1 \cdot 10^2\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-2}\,s}} \cdot (7{,}87 - 0{,}80) \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}} = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Für eine gleichförmige (nicht beschleunigte) Bewegung ist der zurückgelegte Weg proportional zur Zeit, also

$$s = v \cdot t = 3{,}93 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot 60\ \mathrm{s} = 23{,}6 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m} = 23{,}6\ \mathrm{cm}$$

Die Berechnung erfolgte unter der Annahme einer laminaren Umströmung. Dies kann nun nachgeprüft werden. Laminare Umströmung liegt vor, wenn die REYNOLDsche Zahl kleiner ist als die kritische REYNOLDsche Zahl, bei der eine laminare Umströmung in eine turbulente Strömung umschlägt. Also muss geprüft werden

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{Flüss} \cdot R_K \cdot v}{\eta_{Flüss}} \le \mathrm{Re}_{krit}$$

$$\mathrm{Re} = \frac{800\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m} \cdot 3{,}93 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{1 \cdot 10^2\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-2}\,s}} = 1{,}5 \cdot 10^{-4} \ll 10^3$$

Damit ist die oben gemachte Annahme einer laminaren Umströmung gerechtfertigt.

© 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor
Günther KURZ

Lösung zu Aufgabe 9

Die kritische REYNOLDsche Zahl gibt den Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung an. Für ein kreisrundes Rohr mit Durchmesser D

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_{\text{Öl}} \cdot v_K \cdot D}{\eta_{\text{Öl}}} \leq \mathrm{Re}_{\text{krit}} \approx 2320$$

Die größte Durchflussgeschwindigkeit $v_{\max} = v_{\text{krit}}$, die noch laminare Strömung erlaubt, ist also gegeben durch

$$v_{\text{krit}} = \frac{\mathrm{Re}_{\text{krit}} \cdot \eta_{\text{Öl}}}{\rho_{\text{Öl}} \cdot D} = \frac{2320 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}\,m^{-2}\,s}}{900\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot 2 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{m}} = 1{,}29\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Bei laminarer Strömung bildet sich eine Geschwindigkeitsverteilung aus, die durch einen Paraboloid gegeben ist. Für den Volumenstrom $\dot{V}$ gilt das HAGEN-POISEUILLE Gesetz

$$\dot{V} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4$$

mit Δp Druckdifferenz, die die Flüssigkeit durch das Rohr treibt
R Rohrradius
L Rohrlänge
η Viskosität der strömenden Flüssigkeit

Führt man formal eine mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ ein, fordert also für den Volumenstrom die vereinfachte Beziehung

$$\dot{V} = A \cdot \bar{v} \quad \text{mit dem Rohrquerschnitt} \quad A = \pi \cdot R^2$$

dann erhält man

$$\dot{V} = A \cdot \bar{v} = \frac{\pi \cdot \Delta p}{8 \cdot \eta \cdot L} \cdot R^4 \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{\Delta p \cdot A^2}{8 \cdot \eta \cdot L}$$

Es bleibt

$$\Delta p \cdot A \cdot = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot L \cdot \bar{v}$$

Die Druckdifferenz Δp multipliziert mit der Querschnittsfläche A ist aber gerade die Kraft, mit der die Flüssigkeit durch das Rohr gedrückt wird. Sie ist entgegengesetzt gleich dem Reibungswiderstand des Rohrs.

Also gilt für die Widerstandskraft

$$F_W = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot L \cdot \bar{v}$$

Die momentane Leistung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} P &= F_W \cdot \bar{v} = (8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot L \cdot \bar{v}) \cdot \bar{v} = 8 \cdot \pi \cdot \eta \cdot L \cdot \bar{v}^{\cdot 2} \\ &= 8 \cdot \pi \cdot 10^{-2}\ \mathrm{N m^{-2}\,s} \cdot 10^2\ \mathrm{m} \cdot (1{,}29\ \mathrm{m\,s^{-1}}) \\ &= 41{,}8\ \mathrm{N m\,s^{-1}} = 41{,}8\ \mathrm{W} \end{aligned}$$

© 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor
Günther KURZ

Lösung zu Aufgabe 10

Für eine konstante Fahrgeschwindigkeit, also ohne Beschleunigung, muss die resultierende Kraft auf den Lastwagen Null sein. Es muss also Gleichgewicht herrschen zwischen der Zugkraft des Motors $\vec{F}_\mathrm{M}$ (*nach vorn*), der Rollreibungskraft $\vec{F}_\mathrm{R}$ (*nach hinten*) und der Strömungswiderstandskraft $\vec{F}_\mathrm{W}$ (*nach hinten*); also

$$\vec{F}_\mathrm{M} = \vec{F}_\mathrm{R} + \vec{F}_\mathrm{W}$$

mit der Definition der Leistung

$$P = F_\mathrm{M} \cdot v \quad \text{dabei ist} \qquad P = \frac{6}{10} P_\mathrm{Motor}$$

also

$$F_\mathrm{M} = \frac{6 \cdot P_\mathrm{Motor}}{10 \cdot v} = \frac{6 \cdot 44 \cdot 10^3\ \mathrm{W}}{10 \cdot 60 \cdot 10^3\ \mathrm{m\,h^{-1}}} = \frac{6 \cdot 44 \cdot 10^3\ \mathrm{N\,m\,s^{-1}}}{10 \cdot 60 \cdot 10^3\ \mathrm{m} \cdot (3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{s})^{-1}} = 1{,}58\ \mathrm{kN}$$

Die Rollreibungskraft $\vec{F}_\mathrm{R}$ ergibt sich aus der Normalkraft $F_\mathrm{N} = F_\mathrm{G} = m \cdot g$ und dem Rollreibungskoeffizienten der Räder μ zu

$$F_\mathrm{R} = \mu \cdot (m \cdot g) = 3 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \mathrm{m\,s^{-2}} = 1{,}08\ \mathrm{kN}$$

Damit ergibt sich

$$F_\mathrm{W} = F_\mathrm{M} - F_\mathrm{R} = (1{,}58 - 1{,}08)\ \mathrm{kN} = 0{,}50\ \mathrm{kN}$$

Die Strömungswiderstandskraft F_W ist andererseits definiert als

$$F_\mathrm{W} = \frac{1}{2} \cdot c_\mathrm{W} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$$

man erhält durch Gleichsetzen

$$F_\mathrm{M} - F_\mathrm{R} = \frac{1}{2} \cdot c_\mathrm{W} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$$

und damit

$$c_\mathrm{W} = \frac{2(F_\mathrm{M} - F_\mathrm{R})}{\rho \cdot v^2 \cdot A} = \frac{2 \cdot 0{,}50 \cdot 10^3\ \mathrm{kg\,m\,s^{-2}}}{1{,}23\ \mathrm{kg\,m^{-3}} \cdot \dfrac{(60 \cdot 10^3\ \mathrm{m})^2}{(3{,}6 \cdot 10^3\ \mathrm{s})^2} \cdot 4{,}2\ \mathrm{m}^2} = 0{,}70$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor

Lösung zu Aufgabe 11

Das STOKESsche Reibungsgesetz für laminare Umströmung einer Kugel in einem viskosen Medium lautet

$$\begin{aligned} F_R &= 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R_K \cdot v \\ &= 6 \cdot \pi \cdot 1{,}83 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{Nm^{-2}\,s} \cdot 10^{-1}\ \mathrm{m} \cdot 10^{2}\ \mathrm{ms^{-1}} = 3{,}5 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

Der Druckwiderstand bei turbulenter Strömung ist gegeben durch

$$\begin{aligned} F_D &= c_W \cdot \frac{1}{2}\rho_{\text{Luft}} \cdot v^2 \cdot A = c_W \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \cdot \pi \cdot R^2 \\ &= c_W \cdot \frac{1}{2} 1{,}23\ \mathrm{kgm^{-3}} \cdot (10^2\ \mathrm{ms^{-1}})^2 \cdot \pi \cdot (10^{-1}\ \mathrm{m})^2 = c_W \cdot 1{,}9 \cdot 10^2\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

c_W -Werte liegen im Intervall $0{,}2 < c_W < 1$.

Also ist F_D um wenigstens vier Größenordnungen größer als F_R. Der STOKESsche Anteil zum Gesamtwiderstand ist vernachlässigbar.

Direktes Bilden des Verhältnisses der beiden Widerstandskräfte liefert - wegen diverser Kürzungsmöglichkeiten - dieses Ergebnis noch schneller

$$\begin{aligned} \frac{F_D}{F_R} &= \frac{c_W \cdot \frac{1}{2}\rho \cdot v^2 \cdot \pi \cdot R^2}{6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot R_K \cdot v} = \frac{c_W \cdot \rho \cdot v \cdot R}{12 \cdot \eta} \\ &= \frac{c_W \cdot 1{,}23\ \mathrm{kgm^{-3}} \cdot (10^2\ \mathrm{ms^{-1}}) \cdot (10^{-1}\ \mathrm{m})}{12 \cdot 1{,}83 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{kgms^{-2}\,m^{-2}\,s}} = c_W \cdot 5{,}6 \cdot 10^4 \end{aligned}$$

Günther KURZ © 2004 Günther Kurz · Alle Rechte vorbehalten · Nur zur privaten Nutzung · Öffentliche und kommerzielle Verwendung und Verbreitung sowie Vervielfältigung nur nach Rücksprache mit dem Autor