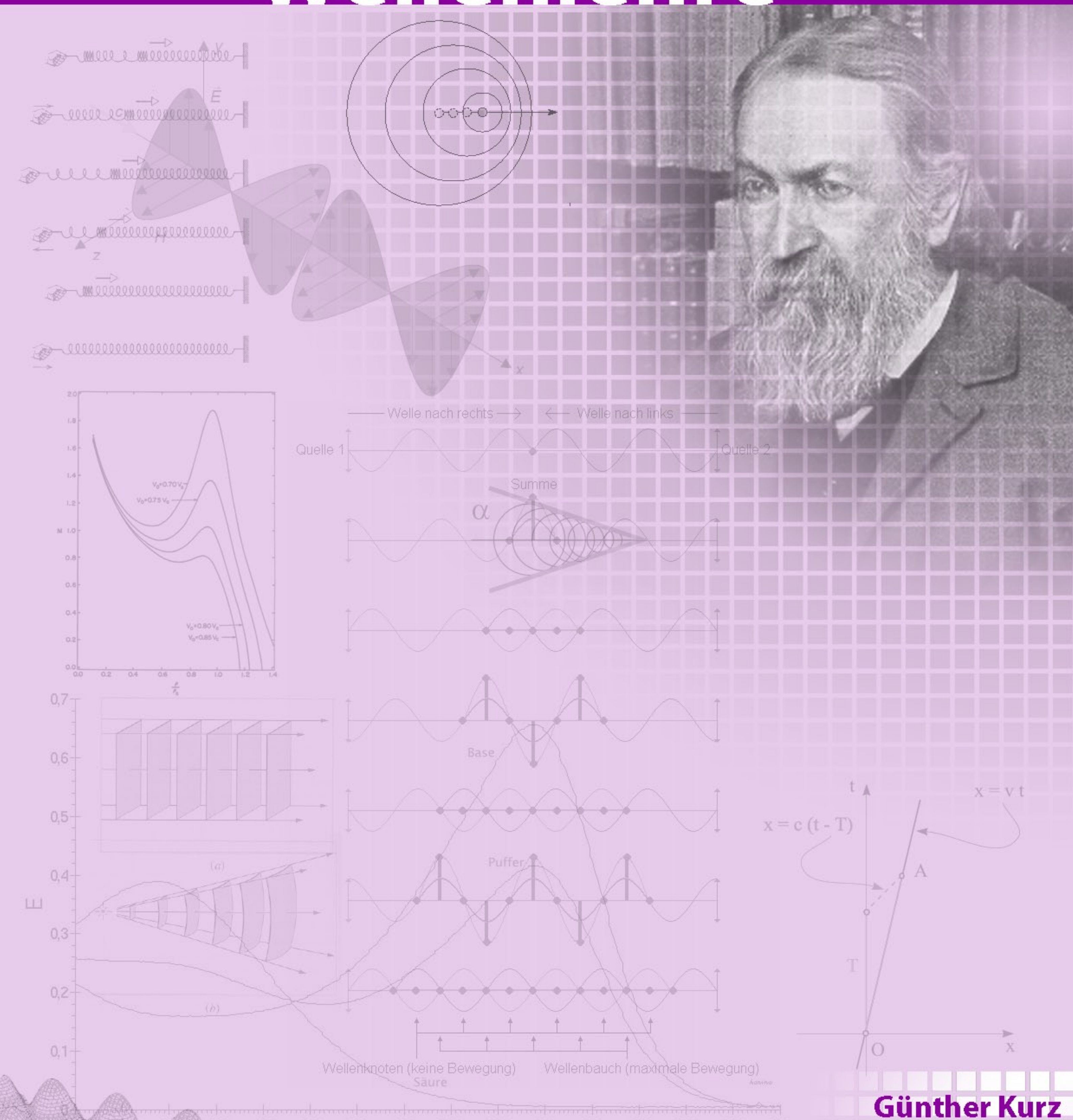
Aufgaben

Wellenlehre



Günther Kurz

Anregungen und Kommentare willkommen
gunther.kurz@fht-esslingen.de

Aufgabe 1:

Ein Wellenpuls breitet sich in positive x-Richtung aus. Er wird durch folgende Wellenfunktion beschrieben:

$$y(x,t) = \frac{2\text{ cm}}{(x-3\text{ cm s}^{-1}\cdot t)^2\text{ cm}^{-2}+1}$$

Skizzieren Sie die Wellenpulse für die drei Zeitpunkte $t_0 = 0\text{ s}$, $t_1 = 1\text{ s}$, $t_2 = 2\text{ s}$.

Aufgabe 2:

Zur Zeit $t = 0\text{ s}$ wird ein transversaler Wellenpuls in einer Saite beschrieben durch

$$y(x,t=0\text{ s}) = \frac{6\text{ cm}}{\left(\frac{x}{\text{cm}}\right)^2+3}$$

Welche Funktion $y(x,t)$ beschreibt diesen Wellenpuls, wenn er sich in positiver x-Richtung mit der Phasengeschwindigkeit $c = 4{,}5\text{ cm s}^{-1}$ ausbreitet?

Aufgabe 3:

Ein Draht (konstanten Querschnitts) hat eine Masse $m = 0{,}3\text{ kg}$ und eine Länge $L = 6\text{ m}$. Ein Ende des Drahts ist an einer Wand befestigt, das andere Ende wird über eine Umlenkrolle durch einem Klotz der Masse $M = 2\text{ kg}$ gespannt.
Wie groß ist die Phasengeschwindigkeit c für eine elastische Transversalwelle im Draht?

Aufgabe 4:

Eine Saite wird an einem Ende mit der Frequenz $f = 5\text{ Hz}$ zu harmonischer Wellenausbreitung angeregt. Die Amplitude der Welle ist $A = 12\text{ cm}$, die Ausbreitungsgeschwindigkeit $c = 20\text{ m s}^{-1}$.

(a) Bestimmen Sie Kreisfrequenz und Wellenzahl und geben Sie die Gleichung der Welle an.

Bestimmen Sie für jeden Ort der Saite

(b) die maximale Geschwindigkeit v_{max},

(c) die maximale Beschleunigung a_{max}.

Aufgabe 5:

Eine ebene Schallwelle in Luft wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$y = 5\cdot 10^{-4}\text{ m}\cdot\sin(1980\text{ s}^{-1}\cdot t - 6\text{ m}^{-1}\cdot x)$$

Bestimmen Sie für diese Welle:

(a) die Frequenz f,

(b) die Wellenlänge λ,

(c) die Ausbreitungsgeschwindigkeit c,

(d) und die Geschwindigkeitsamplitude (oder Schnelleamplitude) $\hat{v}$.

(e) Wie groß ist die Energiestromdichte ($=$Intensität) und der Schallintensitätspegel?

Aufgabe 6:

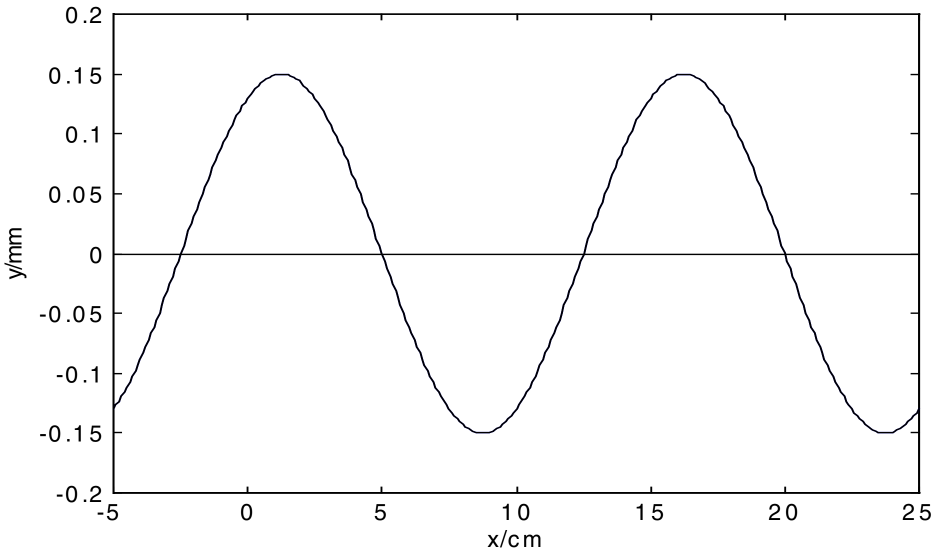
Eine sinusförmige Welle breitet sich in positive *x*-Richtung aus. Die Amplitude ist $A = 15\text{ cm}$, die Wellenlänge $\lambda = 40\text{ cm}$ und die Frequenz $f = 8\text{ Hz}$. Zum Zeitpunkt $t = 0\text{ s}$ ist $y(x = 0)$ ebenfalls gleich 15 cm.

(a) Bestimmen Sie die Wellenzahl k, die Periode T, die Kreisfrequenz ω und die Phasengeschwindigkeit c dieser Welle.

(b) Wie groß ist der Phasenwinkel φ, der zum Zeitpunkt $t = 0\text{ s}$ am Ort $x = 0\text{ cm}$ die Phase bestimmt und wie lautet die Gleichung $y(x,t)$ der Welle?

Aufgabe 7:

Die Momentaufnahme einer nach links laufenden Welle zeigt für einen vorgegebenen, festgehaltenen Zeitpunkt *t* folgendes Bild.



Zusätzlich beobachtet man an einem festen Ort A, dass im Zeitintervall $\Delta t = 0{,}75\text{ s}$ insgesamt $Z = 120$ Wellenberge nach <u>links</u> vorbeilaufen.

Bestimmen Sie für diese Welle

(a) die Amplitude *A*,

(b) die Wellenlänge λ,

(c) die Periodendauer *T*,

(d) die Phasengeschwindigkeit *c*.

(e) Geben Sie die Funktion $y(x,t)$ an, die die Wellenausbreitung beschreibt.

(f) Kann aus der gegebenen Information der Nullphasenwinkel φ_0 in der Funktion $y(x,t)$ bestimmt werden?

Aufgabe 8:
Geben Sie die Gleichung einer harmonischen Welle mit der Amplitude $\hat{y} = 5\ \text{cm}$ und der Wellenlänge $\lambda = 1\,\text{m}$ an, die sich in positive *x*-Richtung mit der Geschwindigkeit $c = 30\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ ausbreitet. Am Ort $x = 0$ sei zu Zeit $t = 0$ die Auslenkung $y(0) = 0$ und die Schnelle positiv.
Welche Frequenz *f* gehört zu dieser Wellenbewegung?

Aufgabe 9:
Die Frequenz einer Ultraschallwelle ist $f = 50\ \text{kHz}$, die Amplitude der Partikelverschiebung ist $\hat{y} = 1 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max} und die maximale Beschleunigung a_{max} eines Luftteilchens dieser Ultraschallwelle?

Aufgabe 10:
Zwei Züge fahren auf parallelen Geleisen mit gleichen Geschwindigkeiten v aufeinander zu. Ein Zug gibt ein Pfeifsignal ab, das ein musikalischer Reisender im anderen Zug hört. Er nimmt beim Vorbeifahren einen Tonhöhensprung von einer Quinte (also ein Frequenzverhältnis 3:2) wahr. Wie schnell fahren die beiden Züge?
(Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist $c = 340\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$)

Aufgabe 11:
Ein Geschoß fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 680\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ im Abstand $s = 5\ \text{m}$ an einer Person vorbei. Wie weit ist das Geschoß von der Person in dem Zeitpunkt entfernt, in dem diese es erstmals hört?

Lösung zu Aufgabe 1

Laut Aufgabenstellung gilt:

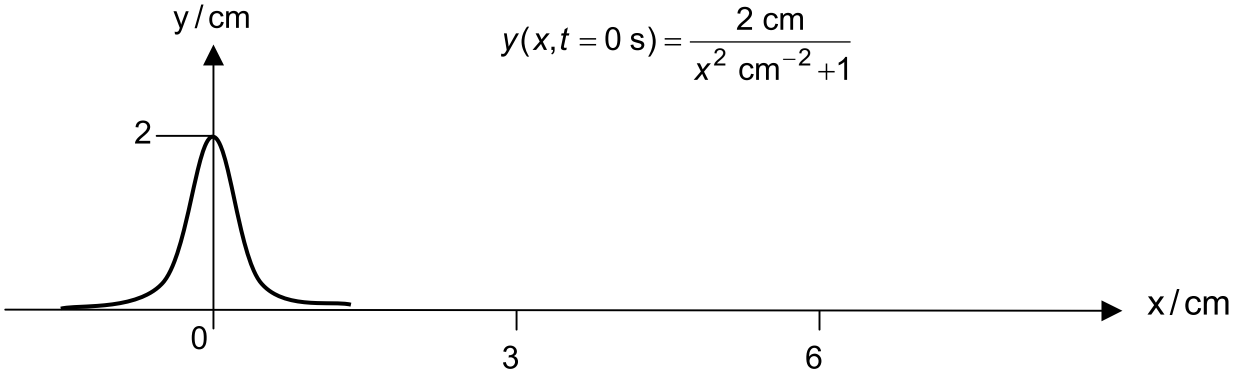
$$y(x,t) = \frac{2\text{ cm}}{(x - 3\text{ cm s}^{-1} \cdot t)^2\text{ cm}^{-2} + 1}$$

Die Amplitude ist $A = 2\text{ cm}$,

die Phasengeschwindigkeit ist $c = 3\text{ m s}^{-1}$

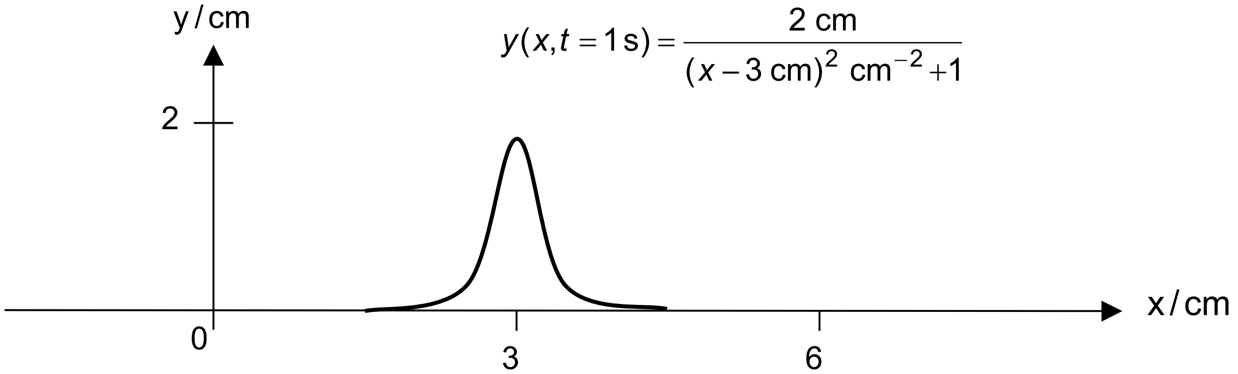
Schnappschuß der Welle (Ortsabhängigkeit *x*) zum Zeitpunkt $t_0 = 0\text{ s}$

$$y(x, t = 0\text{ s}) = \frac{2\text{ cm}}{x^2\text{ cm}^{-2} + 1}$$



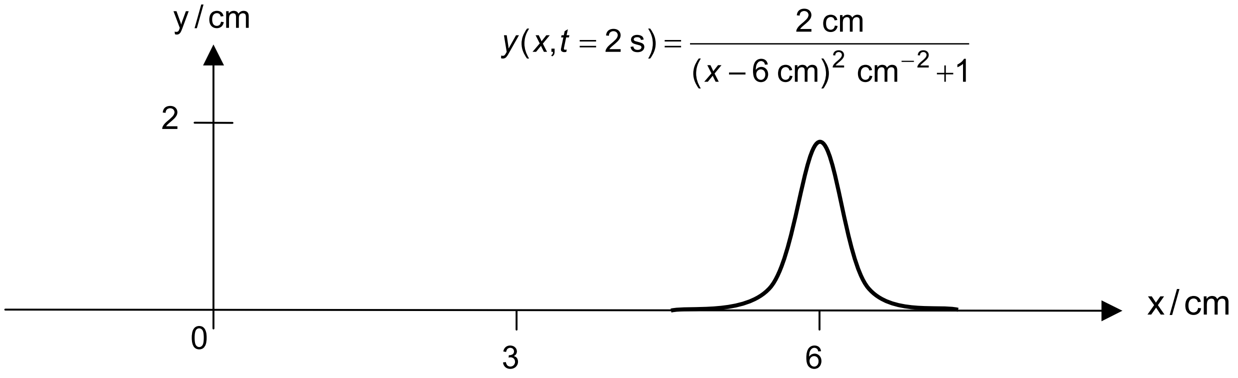
Schnappschuß der Welle (Ortsabhängigkeit *x*) zum Zeitpunkt $t_1 = 1\text{ s}$

$$y(x, t = 1\text{ s}) = \frac{2\text{ cm}}{(x - 3\text{ cm})^2\text{ cm}^{-2} + 1}$$



Schnappschuß der Welle (Ortsabhängigkeit *x*) zum Zeitpunkt $t_2 = 2\text{ s}$

$$y(x, t = 2\text{ s}) = \frac{2\text{ cm}}{(x - 6\text{ cm})^2\text{ cm}^{-2} + 1}$$



Lösung zu Aufgabe 2

Allgemein gilt für einen Wellenpuls:

$$y(x,t) = \frac{A}{(x \pm c \cdot t)^2 \cdot \mathrm{m}^{-2} + B}$$

$\frac{A}{B}$ ist die Amplitude des Wellenpulses,

c die Phasengeschwindigkeit,

B ist für die Breite des Pulses verantwortlich,

Pluszeichen gilt für einen linksläufigen Wellenpuls,

Minuszeichen gilt für einen rechtsläufigen Wellenpuls.

Aus der Aufgabenstellung weiß man:

$A = 6\ \mathrm{cm}$, $B = 3$

$c = 4{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

Positive *x*-Richtung fordert das Minuszeichen.

Somit folgt für die Gleichung des Wellenpulses:

$$y(x,t) = \frac{6\ \mathrm{cm}}{(x - 4{,}5\ \mathrm{m\,s^{-1}} \cdot t)^2 \cdot \mathrm{m}^{-2} + 3}$$

Lösung zu Aufgabe 3

Die Saitenspannung wird durch die Gewichtskraft des angehängten Klotzes hervorgerufen.

$$F = Mg$$

Die Massenbelegung der Saite ist gegeben durch

$$\mu = \frac{m}{L}$$

Für die Phasengeschwindigkeit gilt:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{MgL}{m}} = \sqrt{\frac{2\,\text{kg} \cdot 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2} \cdot 6\,\text{m}}{0{,}3\,\text{kg}}} = 19{,}8\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Für die Kreisfrequenz gilt $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5\ \text{s}^{-1} = 31{,}6\ (\text{rad})\,\text{s}^{-1}$

Für die Wellenzahl gilt $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω sind verkoppelt über die Phasengeschwindigkeit c

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} = c \qquad \text{damit wird} \qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{31{,}6\ \text{s}^{-1}}{20\ \text{m}\,\text{s}^{-1}} = 1{,}57\ \text{m}^{-1}$$

Die Amplitude ist $A = 12\ \text{cm}$

Die harmonische Querwelle wird dargestellt durch

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot \sin(1{,}57\ \text{m}^{-1} \cdot x - 31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich durch Ableiten von $y(x,t)$. Dabei darf ein beliebiger fester Ort, z. B. vereinfachend $x = 0$ gewählt werden. Die Maximalwerte entsprechen den Vorfaktoren der jeweiligen harmonischen Funktionen. Das Vorzeichen des Arguments der harmonischen Funktionen ist dabei belanglos

$$y(x,t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot \sin(31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$
$$\dot{y}(x,t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot 31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot \cos(31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$
$$\ddot{y}(x,t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot (31{,}6\ \text{s}^{-1})^{-2} \cdot (-1) \cdot \sin(31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$
$$|v_{\max}| = 0{,}12\ \text{m} \cdot 31{,}6\ \text{s}^{-1} = 3{,}77\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$
$$|a_{\max}| = 0{,}12\ \text{m} \cdot (3{,}16\ \text{s}^{-1})^{2} = 118\ \text{m}\,\text{s}^{-1} \approx 12 \cdot g_0$$

Lösung zu Aufgabe 5

(a) Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1980\ \text{s}^{-1}}{2\pi} = 315{,}1\,\text{Hz}$

(b) Die Wellenlänge erhält man aus der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 6\ \text{m}^{-1}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}05\ \text{m}$$

(c) Die Phasengeschwindigkeit ist $c = \frac{\omega}{k} = \lambda f = 330\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$

(d) Für eine harmonische Welle ist der betrachtete Ort x unerheblich,

vereinfachend bietet sich der Ursprung also $x = 0$, für eine Darstellung an.

$$y = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m} \cdot \sin\left(1980\ \text{s}^{-1} \cdot t\right)$$
$$\dot{y} = v = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m} \cdot 1980\ \text{s}^{-1} \cdot \cos\left(1980\ \text{s}^{-1} \cdot t\right)$$

Der Maximalwert der Geschwindigkeit ist der Vorfaktor der ersten Ableitung, also

$$\left|v_{\text{max}}\right| = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{m} \cdot 1980\ \text{s}^{-1} = 0{,}099\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$

(e) Intensität:

$$I = cw = \frac{1}{2} c \rho \hat{y}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} c \rho v_{\text{max}}{}^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 330\ \text{m}\,\text{s}^{-1} \cdot 1{,}293\ \text{kg}\,\text{m}^{-3} \cdot (0{,}099\ \text{m}\,\text{s}^{-1})^2$$
$$= 2{,}09\ \text{W}\ \text{m}^{-2}$$

Der Schallintensitätspegel ist definiert als $L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$

dabei ist $I_0 = 10^{-12}\ \text{W}\,\text{m}^{-2}$ die Hörschwelle; also wird

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{2{,}09\ \text{W}\ \text{m}^{-2}}{10^{-12}\ \text{W}\ \text{m}^{-2}}\right) = 132\ \text{dB}$$

Lösung zu Aufgabe 6

Eine in positive *x*-Richtung laufende Welle wird dargestellt durch

$$y(x,t) = A \cdot \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

Ein Pluszeichen in der Kosinus-Funktion charakterisiert eine nach links, also in negative *x*-Richtung, laufende Welle.

(a) Die Amplitude *A* ist gegeben durch

$$A = 15\text{ cm}$$

Für die Wellenzahl gilt

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{40\text{ cm}} = 0{,}157\text{ cm}^{-1}$$

Für die Periode gilt

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{8\text{ s}^{-1}} = 0{,}125\text{ s}$$

Für die Kreisfrequenz gilt

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot 8\text{ s}^{-1} = 50{,}3\text{ (rad)s}^{-1}$$

Für die Phasengeschwindigkeit gilt

$$c = \lambda \cdot f = 40\text{ cm} \cdot 8\text{ s}^{-1} = 320\text{ cm s}^{-1}$$

(b) Somit erhält man für die Wellengleichung

$$y(x,t) = 15\text{ cm} \cdot \cos(0{,}157\text{ cm}^{-1} \cdot x - 50{,}3\text{ s}^{-1} \cdot t + \varphi)$$

Es bleibt noch der Nullphasenwinkel φ zu bestimmen.

Aus der Bedingung $y(0{,}0) = 15\text{ cm}$ folgt

$$y(0{,}0) = 15\text{ cm} \cdot \cos(0{,}157\text{ cm}^{-1} \cdot 0\text{ cm} - 50{,}3\text{ s}^{-1} \cdot 0\text{ s} + \varphi) = 15\text{ cm} \cdot \cos(\varphi)$$
$$15\text{ cm} \cdot \cos(\varphi) = 15\text{ cm}$$
$$\cos(\varphi) = 1$$
$$\varphi = 0$$

Somit ist die Darstellung der Welle

$$y(x,t) = 15\text{ cm} \cdot \cos(0{,}157\text{ cm}^{-1} \cdot x - 50{,}3\text{ s}^{-1} \cdot t)$$

Lösung zu Aufgabe 7

Aus dem Text weiß man, daß die Welle nach links läuft, dies fordert ein Pluszeichen.

Die allgemeine Darstellung der Welle ist somit:

$$y(x,t) = A \cdot \cos(kx + \omega t + \varphi_0)$$

Aus der Grafik der Momentaufnahme entnimmt man unmittelbar die Amplitude A und die Wellenlänge λ der Welle

(a) $A = 0{,}15\ \text{mm}$

(b) $\lambda = 15\ \text{cm}$

und hieraus bestimmt man die Wellenzahl k

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 0{,}42\ \text{cm}^{-1}$$

(c) Aus der Beobachtung am festen Ort bestimmt sich die Periodendauer T der Welle

$$T = \frac{\Delta t}{Z} = \frac{0{,}75\ \text{s}}{120} = 6{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

und hieraus bestimmt man die Kreisfrequenz ω

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1005{,}31\ \text{s}^{-1}$$

(d) Aus der Wellenlänge λ und der Periodendauer T ergibt sich die Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{\lambda}{T} = \frac{15\ \text{cm}}{6{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 2{,}4 \cdot 10^{3}\ \text{cm}\,\text{s}^{-1} = 24\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$

(e) Eine mögliche Darstellung der Welle

$$y(x,t) = 15\ \text{mm} \cdot \cos(0{,}42\ \text{cm}^{-1} \cdot x + 1005.31\ \text{s}^{-1} \cdot t + \varphi_0)$$

(f) Die einzig Unbekannte der Wellenfunktion ist der Nullphasenwinkel φ_0.

Um ihn bestimmen zu können ist eine zusätzliche Information (Bedingungsgleichung) notwendig.

Eine Möglichkeit wäre z. B. den Zeitpunkt $t = t_{\text{Moment}}$ explizit anzugeben, an dem der Schnappschuß der Welle erfolgte.

Lösung zu Aufgabe 8

$$y(x,t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi),$$

Die Amplitude $\hat{y}$ ist in der Aufgabe gegeben; die Wellenzahl *k* folgt aus der Wellenlänge λ; die Kreisfrequenz ω erhält man aus Phasengeschwindigkeit *c* und Wellenzahl *k*.

$$\hat{y} = 5 \text{ cm} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

$$c = \frac{\omega}{k} \quad \text{also} \quad \omega = kc = 60\pi \text{ s}^{-1}$$

die Anfangsbedingungen $y(0,0) = 0$ und $\dot{y}(0,0) > 0$ liefern $\varphi = -\pi/2$.

damit wird:

$$y(x,t) = 5 \text{ cm} \cdot \cos(60\pi \text{ s}^{-1} \cdot t - 2\pi \text{ m}^{-1} \cdot x - \frac{\pi}{2}),$$

$$y(x,t) = 5 \text{ cm} \cdot \sin(60\pi \text{ s}^{-1} \cdot t - 2\pi \text{ m}^{-1} \cdot x)$$

Die Frequenz *f* ergibt sich aus der Kreisfrequenz ω zu $f = 30 \text{ Hz}$.

Lösung zu Aufgabe 9

Für einen festgehaltenen Ort x gilt für die Zeitabhängigkeit

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Zweimaliges Ableiten liefert die Geschwindigkeit und die Beschleunigung.

$$v(t) = \underbrace{-\hat{y} \cdot \omega}_{=v_{\text{max}}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a(t) = \underbrace{-\hat{y} \cdot \omega^2}_{=a_{\text{max}}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Die jeweiligen Maximalwerte sind die Vorfaktoren der jeweiligen harmonischen Funktionen.

$$|v_{\text{max}}| = \omega \hat{y} = 0{,}0314 \text{ m s}^{-1}$$

$$|a_{\text{max}}| = \omega^2 \hat{y} = 9870 \text{ m s}^{-2} \approx 1006 \cdot g$$

Lösung zu Aufgabe 10

Wahrgenommene Frequenz bei Annäherung:

$$f_{B1} = f_Q \frac{c + v_B}{c - v_Q},$$

Wahrgenommene Frequenz bei Entfernung:

$$f_{B2} = f_Q \frac{c - v_B}{c + v_Q}.$$

Dabei sind die beiden Geschwindigkeiten v_B (Beobachter) und v_Q (Quelle) gleich,

also $v_B = v_Q = v$

Das Frequenzverhältnis beträgt damit

$$\left(\frac{c + v}{c - v}\right)^2 = \frac{3}{2}$$

Daraus folgt

$$\frac{(c + v)}{(c - v)} = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{also} \qquad (c + v) = \sqrt{\frac{3}{2}}(c - v)$$

$$v = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}} - 1}{\sqrt{\frac{3}{2}} + 1}\right) \cdot c$$

$$v = 34\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 124\ \mathrm{km\,h^{-1}}$$

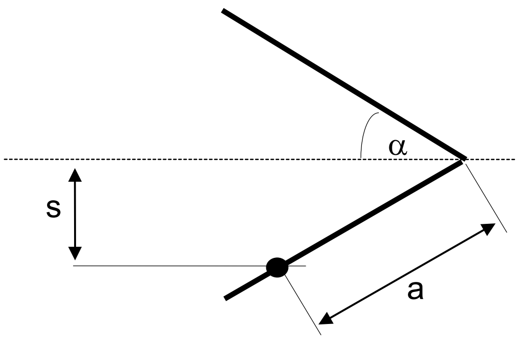
Lösung zu Aufgabe 11

Für den Öffnungswinkel des MACHschen Kegels gilt

$$\sin\alpha = \frac{\text{Phasengeschwindigkeit}}{\text{Fluggeschwindigkeit}} = \frac{c}{v} = \frac{340\ \mathrm{m\,s^{-1}}}{680\ \mathrm{m\,s^{-1}}} = \frac{1}{2}$$

Für den Abstand zum Geschoß im Zeitpunkt des Hörens gilt:

$$a = \frac{s}{\sin\alpha} = 10\ \mathrm{m}$$



Übungsaufgaben zur Wellenlehre

W-1: Geben Sie die Gleichung einer harmonischen Welle mit der Amplitude $\hat{y} = 5\text{ cm}$ und der Wellenlänge $\lambda = 1\text{m}$ an, die sich in positive *x*-Richtung mit der Geschwindigkeit $c = 30\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ausbreitet. Am Ort $x = 0$ sei zur Zeit $t = 0$ die Auslenkung $y(0) = 0$ und die Schnelle $\dot{y}(0) > 0$. Bestimmen Sie die Wellenfunktion $y(x,t)$ und die Frequenz *f* die zu dieser Wellenbewegung gehört.

W-2: Eine Saite wird an einem Ende mit der Frequenz $f = 5\text{ Hz}$ zu harmonischer Wellenausbreitung angeregt. Die Amplitude der Welle ist $A = 12\text{ cm}$, die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $c = 20\text{ m}\,\text{s}^{-1}$ nach rechts.

(a) Bestimmen Sie Kreisfrequenz ω und Wellenzahl k und geben Sie die Gleichung der Welle an.

(b) Bestimmen Sie die maximale Geschwindigkeit v_{max} und die maximale Beschleunigung a_{max}.

W-3: Eine ebene Schallwelle in Luft wird durch die folgende Gleichung beschrieben:

$$y(x,t) = 5\cdot 10^{-5}\text{ m}\cdot\sin(1980\text{ s}^{-1}\cdot t - 6\text{ m}^{-1}\cdot x)$$

Bestimmen Sie für diese Welle:

(a) die Frequenz *f*

(b) die Wellenlänge λ,

(c) die Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* und

(d) die Geschwindigkeitsamplitude (oder Schnelleamplitude) $\hat{v}$.

(e) Wie groß ist die Energiestromdichte (=Intensität) und der Schallintensitätspegel?

W-4: Die Frequenz einer Ultraschallwelle ist $f = 50\text{ kHz}$, die Amplitude der Partikelverschiebung ist $\hat{y} = 1\cdot 10^{-7}\text{ m}$. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit v_{max} und die maximale Beschleunigung a_{max} eines Luftteilchens dieser Ultraschallwelle?

W-5: Zwei Züge fahren auf parallelen Geleisen mit gleichen Geschwindigkeiten *v* aufeinander zu. Ein Zug gibt ein Pfeifsignal ab, das ein musikalischer Reisender im anderen Zug hört. Er nimmt beim Vorbeifahren einen Tonhöhensprung von einer Quinte (also ein Frequenzverhältnis 3:2) wahr. Wie schnell fahren die beiden Züge? (Die Schallgeschwindigkeit in Luft ist $c = 340\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

W-6: Ein Geschoß fliegt mit der Geschwindigkeit $v = 680\text{ m}\,\text{s}^{-1}$ im Abstand $s = 5\text{ m}$ an einer Person vorbei. Wie weit ist das Geschoß von der Person in dem Zeitpunkt entfernt, in dem diese es erstmals hört?

W-7: Wie groß ist die Frequenzänderung eines an einem entgegenkommenden Fahrzeug reflektierten Radarstrahls, wenn das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit $v = 60\ \mathrm{km\,h^{-1}}$ fährt und die Senderfrequenz $f_\mathrm{S} = 9\ \mathrm{GHz}$ beträgt?

W-8: Eine Gitarrensaite aus Stahl (Dichte $\rho = 8\ \mathrm{g \cdot cm^{-3}}$) soll auf den Kammerton ($f = 440\ \mathrm{Hz}$) abstimmbar sein. Welchen Durchmesser *d* darf die Saite höchstens haben, damit beim Stimmen die Zugkraft $F = 100\ \mathrm{N}$ nicht überschritten wird. Der Abstand der beiden Stege der Gitarre habe eine Länge $L = 60\ \mathrm{cm}$.

W-9: Die drei gleichen Düsentriebwerke am Heck eines Flugzeugs erzeugen am Standort eines Flughafenbediensteten einen Schallpegel von 140 dB.

(a) Wie hoch ist der Schallpegel, wenn nur ein Triebwerk läuft ?
Welchen Wert hat dann die Schallintensität ?

(b) Wie ändert sich der dB-Wert, wenn der Bedienstete auf doppelten Abstand zum Flugzeug bei einem laufenden Triebwerk geht?

W-10: Ein Stab der Länge $L = 1\ \mathrm{m}$ ist an seinen Enden eingespannt. Durch Reibung in Längsrichtung erzeugt man einen Ton der Frequenz $f_0 = 700\ \mathrm{Hz}$.

(a) Wie groß ist die Schallgeschwindigkeit *c* im Stab und welche Obertöne f_n werden erzeugt?

Welcher Grundton und welche Obertöne können erzeugt werden, wenn der Stab

(b) nur an einem Ende eingespannt ist?

(c) nur in der Stabmitte fixiert ist?

Für mathematisch Interessierte

W-11: In einem linearen unendlich ausgedehnten Wellenträger breitet sich eine Transversalwelle nach rechts aus. Der Erreger (am Ort $x_0 = 0\ \mathrm{cm}$) schwingt harmonisch mit der Periodendauer $T = 60\ \mathrm{ms}$ und der Amplitude $A = 2\ \mathrm{cm}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0\ \mathrm{s}$ bewegt er sich mit maximaler Geschwindigkeit nach unten.

(a) Wie lautet das Auslenkung,Zeit-Gesetz des Erregers?

(b) Wie groß ist die Auslenkung des Erregers zum Zeitpunkt $t_1 = 20\ \mathrm{ms}$ und wie groß ist Betrag und Richtung der Geschwindigkeit zu diesem Zeitpunkt?

Die vom Erreger verursachte Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit $c = 20\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ nach rechts aus.

(c) Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Wellengleichung und zeichnen Sie <u>jeweils ein Momentbild der Welle</u> ($s(x)$-Diagramm) zum Zeitpunkt $t_2 = 110\ \mathrm{ms}$, wenn sich an der Stelle $x_2 = 150\ \mathrm{cm}$ ein Hindernis befindet, das sich verhält wie
(1) ein festes Ende,
(2) ein loses Ende.
(Beschreiben Sie ihre Konstruktion und erläutern Sie diese.)

Lösung zu Aufgabe 1

$$y(x,t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Die Amplitude $\hat{y}$ ist in der Aufgabe gegeben; die Wellenzahl *k* folgt aus der Wellenlänge λ; die Kreisfrequenz ω erhält man aus Phasengeschwindigkeit *c* und Wellenzahl *k*.

$$\hat{y} = 5\ \text{cm} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi\ \text{m}^{-1}$$

$$c = \frac{\omega}{k} \qquad \omega = kc = 60\pi\ \text{s}^{-1}$$

Für die Auslenkung und die Schnelle gilt

$$y(x,t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$
$$\dot{y}(x,t) = v(x,t) = -\hat{y}\omega \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi_0)$$

Die Anfangsbedingungen $y(0{,}0) = 0$ und $\dot{y}(0{,}0) > 0$ liefern

$$y(0{,}0) = \hat{y} \cdot \cos(\varphi_0) = 0$$
$$\dot{y}(0{,}0) = -\hat{y}\omega \cdot \sin(\varphi_0) > 0$$

Die erste Bedingung liefert

$$\cos(\varphi_0) = 0$$

$$\varphi_{0,1\text{k}} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ mit } k \in Z$$

$$\varphi_{0,2\text{k}} = 2\pi - \varphi_{0,1\text{k}} + k2\pi = 2\pi - \frac{\pi}{2} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + k2\pi \text{ mit } k \in Z$$

Es interessieren nur die Werte innerhalb einer Periode, also die Lösungen für z.B. $k = 0$

$$\varphi_{0,1} = \frac{\pi}{2} \text{ und } \varphi_{0,2} = \frac{3\pi}{2}$$

Die zweite Bedingung fordert $\sin(\varphi_0) < 0$

Da jedoch $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$ ist, kommt dieser Wert nicht in Frage.

$\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1 < 0$ liefert den gesuchten Winkel und auch alle $\varphi_{0,2k} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi$ mit $k \in Z$

$$y(x,t) = 5\ \text{cm} \cdot \cos(60\pi\ \text{s}^{-1} \cdot t - 2\pi\ \text{m}^{-1} \cdot x + \frac{3\pi}{2})$$
$$y(x,t) = 5\ \text{cm} \cdot \sin(60\pi\ \text{s}^{-1} \cdot t - 2\pi\ \text{m}^{-1} \cdot x)$$

Die Frequenz *f* ergibt sich aus der Kreisfrequenz ω zu $f = 30\ \text{Hz}$.

Lösung zu Aufgabe 2

Für die Kreisfrequenz gilt $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 5\ \text{s}^{-1} = 31{,}6\ (\text{rad})\,\text{s}^{-1}$

Für die Wellenzahl gilt $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Wellenzahl k und Kreisfrequenz ω sind verkoppelt über die Phasengeschwindigkeit c

$$\frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T} = c \quad \text{damit wird} \qquad k = \frac{\omega}{c} = \frac{31{,}6\ \text{s}^{-1}}{20\ \text{m}\,\text{s}^{-1}} = 1{,}57\ \text{m}^{-1}$$

Die Amplitude ist $A = 12\ \text{cm}$

Die harmonische Querwelle wird dargestellt durch

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot \sin(1{,}57\ \text{m}^{-1} \cdot x - 31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

Geschwindigkeit und Beschleunigung ergeben sich durch Ableiten von $y(x,t)$. Dabei darf ein beliebiger fester Ort, z. B. vereinfachend $x = 0$ gewählt werden. Die Maximalwerte entsprechen den Vorfaktoren der jeweiligen harmonischen Funktionen. Das Vorzeichen des Arguments der harmonischen Funktionen ist dabei belanglos

$$y(x,t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot \sin(31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

$$\dot{y}(x,t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot 31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot \cos(31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

$$\ddot{y}(x,t) = 0{,}12\ \text{m} \cdot (31{,}6\ \text{s}^{-1})^{-2} \cdot (-1) \cdot \sin(31{,}6\ \text{s}^{-1} \cdot t)$$

$$|v_{\text{max}}| = 0{,}12\ \text{m} \cdot 31{,}6\ \text{s}^{-1} = 3{,}77\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$

$$|a_{\text{max}}| = 0{,}12\ \text{m} \cdot (3{,}16\ \text{s}^{-1})^{2} = 118\ \text{m}\,\text{s}^{-1} \approx 12 \cdot g_0$$

Lösung zu Aufgabe 3:

(a) Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1980\ \mathrm{s}^{-1}}{2\pi} = 315{,}1\,\mathrm{Hz}$

(b) Die Wellenlänge erhält man aus der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 6\ \mathrm{m}^{-1}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 1{,}05\ \mathrm{m}$$

(c) Die Phasengeschwindigkeit ist $c = \frac{\omega}{k} = \lambda f = 330\ \mathrm{m\,s}^{-1}$

(d) Für eine harmonische Welle ist der betrachtete Ort x unerheblich,

vereinfachend bietet sich der Ursprung also $x = 0$, für eine Darstellung an.

$$y = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \cdot \sin\left(1980\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)$$
$$\dot{y} = v = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \cdot 1980\ \mathrm{s}^{-1} \cdot \cos\left(1980\ \mathrm{s}^{-1} \cdot t\right)$$

Der Maximalwert der Geschwindigkeit ist der Vorfaktor der ersten Ableitung, also

$$\left|v_{\mathrm{max}}\right| = 5 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m} \cdot 1980\ \mathrm{s}^{-1} = 0{,}099\ \mathrm{m\,s}^{-1}$$

(e) Intensität:

$$I = cw = \frac{1}{2} c\rho \hat{y}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} c\rho {v_{\mathrm{max}}}^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 330\ \mathrm{m\,s}^{-1} \cdot 1{,}293\ \mathrm{kg\,m}^{-3} \cdot (0{,}099\ \mathrm{m\,s}^{-1})^2$$
$$= 2{,}09\ \mathrm{W\,m}^{-2}$$

Der Schallintensitätspegel ist definiert als $L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$

dabei ist $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m}^{-2}$ die Hörschwelle; also wird

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{2{,}09\ \mathrm{W\,m}^{-2}}{10^{-12}\ \mathrm{W\,m}^{-2}}\right) = 132\ \mathrm{dB}$$

Lösung zu Aufgabe 4

Für einen festgehaltenen Ort *x* gilt für die Zeitabhängigkeit

$$y(t) = \hat{y} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Zweimaliges Ableiten liefert die Geschwindigkeit und die Beschleunigung.

$$v(t) = \underbrace{-\hat{y} \cdot \omega}_{=v_{\text{max}}} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a(t) = \underbrace{-\hat{y} \cdot \omega^2}_{=a_{\text{max}}} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Die jeweiligen Maximalwerte sind die Vorfaktoren der jeweiligen harmonischen Funktionen.

$$|v_{\text{max}}| = \omega\hat{y} = 0{,}0314 \ \text{m}\,\text{s}^{-1}$$

$$|a_{\text{max}}| = \omega^2 \hat{y} = 9870 \ \text{m}\,\text{s}^{-2} \approx 1006 \cdot g$$

Lösung zu Aufgabe 5

Wahrgenommene Frequenz bei Annäherung:

$$f_{\mathrm{B1}} = f_{\mathrm{Q}} \frac{c+v_{\mathrm{B}}}{c-v_{\mathrm{Q}}},$$

Wahrgenommene Frequenz bei Entfernung:

$$f_{\mathrm{B2}} = f_{\mathrm{Q}} \frac{c-v_{\mathrm{B}}}{c+v_{\mathrm{Q}}}.$$

Dabei sind die beiden Geschwindigkeiten v_{B} (Beobachter) und v_{Q} (Quelle) gleich,

also $v_{\mathrm{B}} = v_{\mathrm{Q}} = v$

Das Frequenzverhältnis beträgt damit

$$\left(\frac{c+v}{c-v}\right)^2 = \frac{3}{2} = \frac{f_{\mathrm{B1}}}{f_{\mathrm{B2}}}$$

Daraus folgt

$$\frac{c+v}{c-v} = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \text{also} \qquad c+v = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot (c-v)$$

$$v = \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{2}}-1}{\sqrt{\frac{3}{2}}+1}\right) \cdot c$$

$$v = 34\ \mathrm{m\,s^{-1}} = 124\ \mathrm{km\,h^{-1}}$$

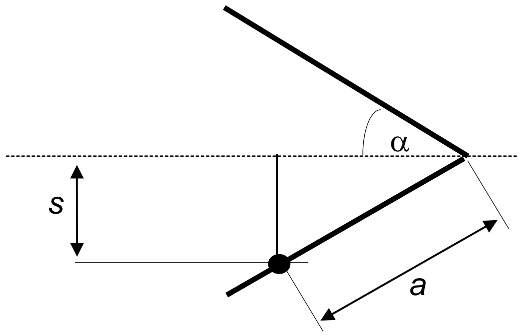
Lösung zu Aufgabe 6

Für den Öffnungswinkel des MACHschen Kegels gilt

$$\sin\alpha = \frac{\text{Phasengeschwindigkeit}}{\text{Fluggeschwindigkeit}} = \frac{c}{v} = \frac{340\ \text{m}\,\text{s}^{-1}}{680\ \text{m}\,\text{s}^{-1}} = \frac{1}{2}$$

Für den Abstand zum Geschoß im Zeitpunkt des Hörens gilt:

$$a = \frac{s}{\sin\alpha} = 10\ \text{m}$$



Anmerkung:

Die Person hört das Geschoß erstmals, wenn der MACHsche Kegel die Person erreicht.

Lösung zu Aufgabe 7

Theorie zum relativistischen DOPPLER-Effekt

(Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ist Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle)

Die wahrgenommene Frequenz hängt nur von der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger ab.

- Relativbewegung **von der Quelle weg**

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \qquad \text{mit} \qquad c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

- Relativbewegung **auf die Quelle zu**

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1+\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}} \qquad \text{mit} \qquad c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Reflexion des Radarstrahls (der sich mit Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ ausbreitet) an der Vorderseite des PKW heißt, dass sich der PKW dem Sender nähert und es gilt für die Frequenz f_{PKW} der am PKW ankommenden Welle des eigentlichen Senders

$$f_{\mathrm{PKW}} = f_{\mathrm{S}} \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

Bei der Reflexion der Welle an der Vorderseite des PKW bleibt die Frequenz f_{PKW} unverändert. Jetzt ist jedoch der PKW ein Sender mit der Frequenz f_{PKW}, der sich mit der Geschwindigkeit v auf den Empfänger zubewegt. Also gilt wiederum

$$f_{\mathrm{E}} = f_{\mathrm{PKW}} \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} = f_{\mathrm{S}} \frac{1+v/c}{1-v/c}$$

Die Frequenzänderung ist also und der gerechtfertigten Näherung $c >> v$

$$\Delta f = f_{\mathrm{E}} - f_{\mathrm{S}} = f_{\mathrm{S}} \left(\frac{1+v/c}{1-v/c} - 1\right) = f_{\mathrm{S}} \frac{2v}{c-v} \approx f_{\mathrm{S}} \frac{2v}{c}$$

$$\approx 1000\ \mathrm{Hz} = 1\,\mathrm{kHz}$$

Lösung zu Aufgabe 8

Beidseitig eingespannte Saite liefert in der Grundfrequenz $f = 440\ \text{Hz}$

$$\frac{\lambda}{2} = L$$

$$\lambda = 2L = 1{,}2\ \text{m}$$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit gilt

einerseits

$$c = f\lambda = f2L = 528\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

andererseits

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{FL}{m}} = \sqrt{\frac{FL}{\rho V}} = \sqrt{\frac{FL}{\rho AL}} = \sqrt{\frac{4F}{\rho\pi d^2}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

Gleichsetzen liefert

$$f2L = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

mit $\rho = 8\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 8000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$$d = \frac{1}{fL}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$$

$$d = 0{,}24\ \text{mm}$$

Lösung zu Aufgabe 9

Der Schallintensitätspegel ist definiert als $L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{I_0}\right)$

dabei ist $I_0 = 10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}$ die Hörschwelle; also wird

$$L = 10 \cdot \lg\left(\frac{I}{10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}}\right)$$

Sind alle drei gleiche Triebwerke eingeschaltet, so folgt für die Gesamtschallintensität I bei einem Gesamtschallintensitätspegel $L = 140\ \mathrm{dB}$

$$I = I_0 \cdot 10^{\frac{L}{10}} = 100\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

(a) Ein Triebwerk liefert also nur $\frac{1}{3}$ der Gesamtschallintensität

$$I_1 = \frac{I}{3} = 33{,}3\ \mathrm{W\,m^{-2}}$$

$$L_1 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_1}{10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}}\right)$$

$$L_1 = 135{,}2\ \mathrm{dB}$$

(b) Die Schallintensität nimmt quadratisch mit dem Abstand ab $I \sim \frac{1}{r^2}$

Doppelter Abstand liefert $\frac{1}{4}$ der Schallintensität

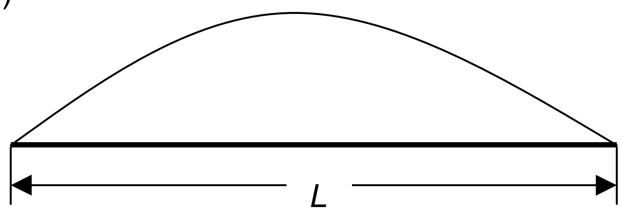
$$I_2 = \frac{I_1}{4} = 8{,}3\ \mathrm{W\,m^{-2}}$$

$$L_2 = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_2}{10^{-12}\ \mathrm{W\,m^{-2}}}\right)$$

$$L_2 = 129{,}2\ \mathrm{dB}$$

Lösung zu Aufgabe 10

(a)



$$f_0 = f_{0a} = 700\ \text{Hz} \ \ \text{(Grundfrequenz Aufgabenteil (a))}$$

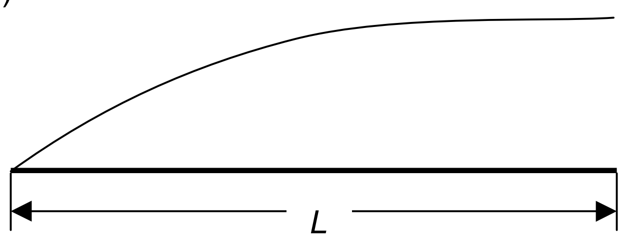
$$c = \lambda \cdot f = 2L \cdot f_{0a} = 2Lf_0 = 1400\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Diese Ausbreitungsgeschwindigkeit *c* ist materialtypisch und gilt somit auch für die Aufgabenteile (b) und (c)

mit $L = (n+1)\frac{\lambda}{2}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} f_{0a} = \frac{2(n+1)\frac{\lambda}{2}}{\lambda} \cdot f_0 = (n+1) f_0 = (n+1)\ 700\ \text{Hz} \ \ \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(b)



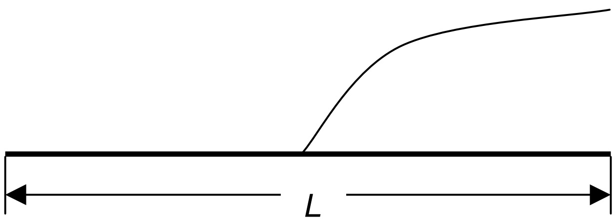
$$c = \lambda \cdot f = 4L \cdot f_{0b}$$

$$f_{0b} = \frac{1}{2} f_{0a} = \frac{1}{2} f_0 \ \ \text{(Grundfrequenz Aufgabenteil (b))}$$

mit $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{4L}{\lambda} f_{0b} = \frac{4(2n+1)\frac{\lambda}{4}}{\lambda} \cdot \frac{1}{2} f_0 = \frac{1}{2}(2n+1) f_0 = (n+\frac{1}{2})\ 700\ \text{Hz} \ \ \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(c)



$$c = \lambda \cdot f = 2L \cdot f_{0c}$$

$f_{0c} = f_{0a} = f_0$ (Grundfrequenz Aufgabenteil (c))

mit $\frac{L}{2} = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$f_n = \frac{c}{\lambda} = \frac{2L}{\lambda} f_{0c} = \frac{2(2n+1)\frac{\lambda}{2}}{\lambda} \cdot f_0 = (2n+1) f_0 = (2n+1)\ 700\ \text{Hz} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Lösung zu Aufgabe 11

(a) Das Erregerteilchen schwingt harmonisch zum Zeitpunkt $t_0 = 0\text{ s}$ mit maximaler Geschwindigkeit nach unten. Dies bedeutet, dass diese Schwingung durch eine Standard-Sinusfunktion mit negativem Vorzeichen beschrieben werden kann.

$$s_{\text{Erreger}}(t) = -A\sin(\omega t) = -A\sin(\frac{2\pi}{T}t) = -2\text{ cm}\cdot\sin(105\,\frac{1}{\text{s}}\cdot t)$$

(b) Durch einmaliges Ableiten nach der Zeit erhält man das Geschwindigkeit,Zeit-Gesetz.

$$v_{\text{Erreger}}(t) = -A\omega\cos(\omega t) = -210\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\cdot\cos(105\,\frac{1}{\text{s}}\cdot t)$$

Zum Zeitpunkt $t_1 = 20\text{ ms} = 2\cdot 10^{-2}\text{ s}$ ist die

Auslenkung des Erregerteilchens

$$s_{\text{Erreger}}(t_1) = -2\text{ cm}\cdot\sin(105\,\frac{1}{\text{s}}\cdot 2\cdot 10^{-2}\text{ s}) = -1{,}7\text{ cm}$$

Geschwindigkeit des Erregerteilchens

$$v_{\text{Erreger}}(t_1) = -210\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}\cdot\cos(105\,\frac{1}{\text{s}}\cdot 2\cdot 10^{-2}\text{ s}) = 100\,\frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

(c) Zusammenhang von Frequenz, Wellenläge und Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$c = \lambda f = \lambda\frac{1}{T}$$

folgt für die Wellenlänge

$$\lambda = cT = 1{,}2\text{ m} = 120\text{ cm}$$

Die Wellenzahl ist damit

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 5{,}25\,\frac{1}{\text{m}}$$

Hieraus folgt die Wellengleichung

$$s(t,x) = -A\sin(\omega t - kx) = -A\sin[2\pi(\frac{1}{T}t - \frac{1}{\lambda}x)] = -2\text{ cm}\cdot\sin(105\,\frac{1}{\text{s}}\cdot t - 5{,}25\,\frac{1}{\text{m}}\cdot x)$$

In der Zeit $t_2 = 110\text{ ms} = 0{,}11\text{ s}$ hat sich die Welle um die Strecke $x = ct_2 = 2{,}2\text{ m}$ ausgebreitet.

Für das Momentbild der Welle ist also ein Bereich von $0\text{ cm} \le x \le 220\text{ cm}$ nötig.

Das Momentbild der Welle zum Zeitpunkt $t_2 = 110\text{ ms} = 0{,}11\text{ s}$ ist also

$$s(t_2,x) = -2\text{ cm}\cdot\sin(105\,\frac{1}{\text{s}}\cdot t_2 - 5{,}25\,\frac{1}{\text{m}}\cdot x)$$

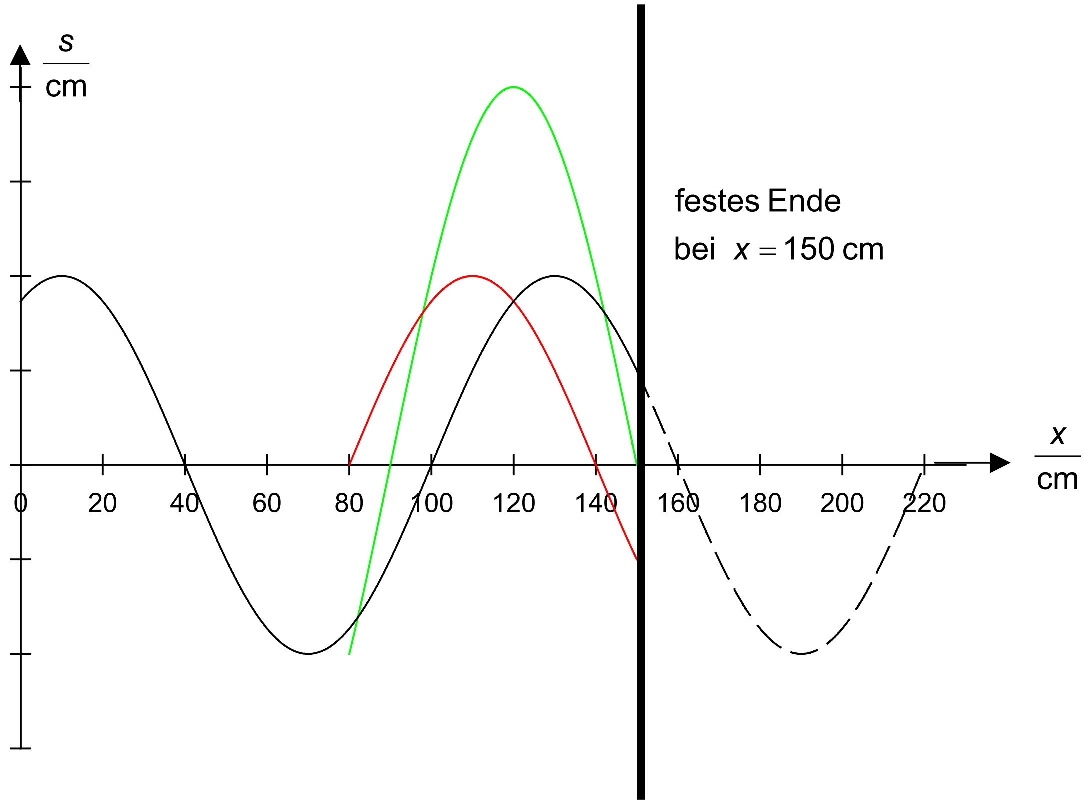
$$s(x) = -2\text{ cm}\cdot\sin(11{,}55 - 5{,}25\,\frac{1}{\text{m}}\cdot x)$$

Dieses Momentbild zeichnet man ungeachtet des festen Hindernisses im Bereich von $0\ \text{cm} \leq x \leq 220\ \text{cm}$. Den Bereich rechts vom festen Hindernis an der Stelle $x_2 = 150\ \text{cm}$ zeichnet man der Übersicht halber gestrichelt.

(1) Reflexion am festen Ende

Reflexion am festen Ende bedeutet, dass man den gestrichelten Bereich am Punkt $(150\ \text{cm}/0\ \text{cm})$ punktspiegelt. Hieraus erhält man die durchgezogene rote Kurve.

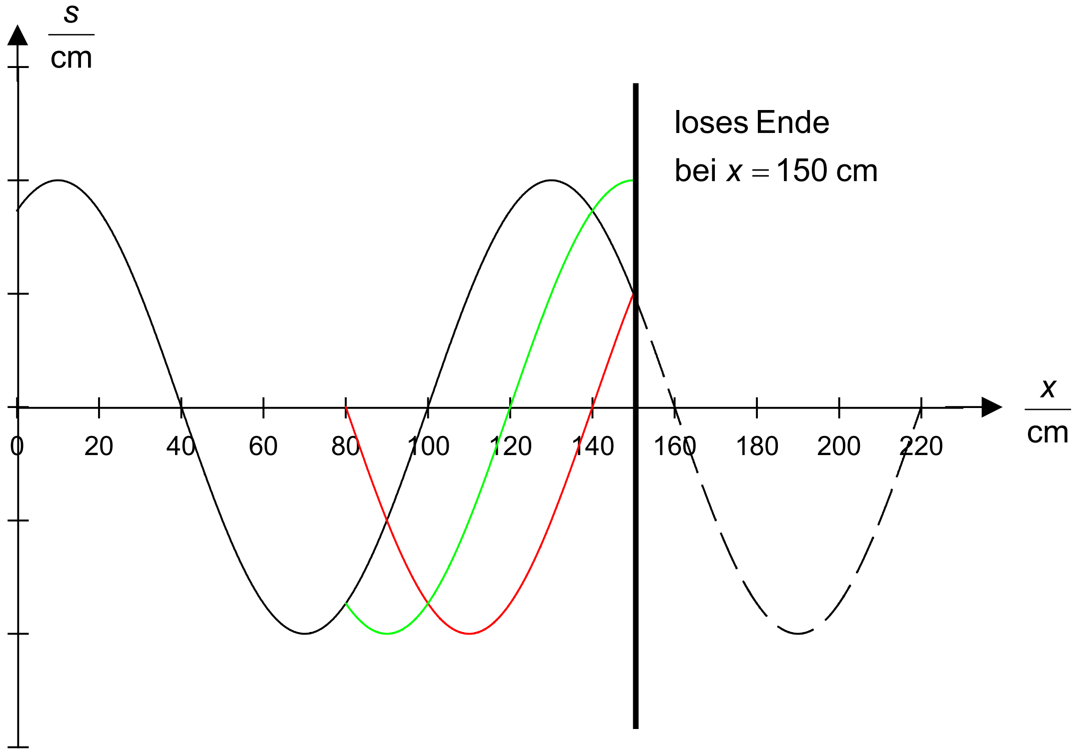
Mittels Ordinatenaddition von der schwarzen durchgezogenen und der roten durchgezogenen Kurve erhält man die überlagerte Welle (grün), die notwendigerweise an ihrem Reflexionspunkt einen Knoten besitzt.



(2) Reflexion am losen Ende

Reflexion am losen Ende bedeutet, dass man den gestrichelten Bereich an der Achse $x = 150$ cm achsenspiegelt. Hieraus erhält man die durchgezogene rote Kurve.

Mittels Ordinatenaddition von der schwarzen durchgezogenen und der roten durchgezogenen Kurve erhält man die überlagerte Welle (grün), die notwendigerweise an ihrem Reflexionspunkt einen Bauch besitzt, der zum betrachteten Zeitpunkt jedoch nicht vollständig ausgeprägt ist.



Anmerkung:

In beiden Fällen stellt die grüne Kurve eine stehende Welle dar.

Die stehende Welle – entstanden durch eine Welle und ihre reflektierte Welle – besitzt die doppelte Amplitude der Welle und dieselbe Frequenz wie die Welle.

- Bei der Reflexion am festen Ende:
  Am festen Ende befindet sich immer ein Knoten
  (Bewegungsknoten oder Schnelleknoten)
- Bei der Reflexion am losen Ende:
  Am losen Ende befindet sich immer ein Bauch
  (Bewegungsbauch oder Schnellebauch)

Der Abstand zweier benachbarter Knoten ist gleich der halben Wellenlänge

Die Bäuche der stehenden Wellen befinden sich genau in der Mitte der Knoten und haben ebenfalls einen Abstand einer halben Wellenlänge.

Links und rechts von ein und demselben Knoten schwingen die Teilchen einer stehenden Welle gegenphasig und zwischen zwei benachbarten Knoten schwingen die Teilchen einer stehenden Welle gleichphasig.