Aufgabensammlung
E-Felder und B-Felder

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

Oktober 2004

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

Aufgabe 1:

In einem kartesischen Koordinatensystem sind 3 Punktladungen Q_1, Q_2 und Q_3 gegeben. Diese befinden sich in den Punkten A, B und C, deren Koordinaten in m gegeben sind:

$$\begin{array}{lll} Q_1 = \sqrt{5}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} & \text{im Punkt} & A(0/-1/-2) \\ Q_2 = -\sqrt{2}\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} & \text{im Punkt} & B(1/-\frac{4}{5}/\frac{3}{5}) \\ Q_3 = 1,8\cdot 10^{-7}\,\mathrm{C} & \text{im Punkt} & C(3/0/0) \end{array}$$

a) Wie groß ist der Betrag der resultierenden Feldstärke $\vec{E}_O$ im Koordinatenursprung O, gemessen in $\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$?

b) Welche Winkel α_x, α_y und α_z schließt $\vec{E}_O$ mit den positiven Richtungen der drei Koordinatenachsen ein?

Aufgabe 2:

Gegeben sei ein rechtwinkliges $(x,\, y)$-Koordinatensystem. Im Punkt $A(-a/0)$ sei eine Punktladung $+2Q$, im Punkt $B(a/0)$ eine Punktladung $+Q$ befestigt. Eine weitere, ebenfalls positive Punktladung $+q$ sei mit einem Faden der Länge a am Koordinatenursprung O angebunden, so dass sie alle Punkte der $(x,\, y)$-Ebene innerhalb des Kreises um O mit dem Radius a erreichen kann.

Berechnen Sie die Koordinaten derjenigen Punkte P_i, die von $+q$ im Falle des stabilen Gleichgewichts der gesamten Anordnung eingenommen werden können, sowie den Betrag der Kraft $\vec{F}$, die dann im Faden wirkt.

Aufgabe 3:

Ein Tetraeder mit der Kantenlänge s liege so in einem kartesischen Koordinatensystem, dass sich drei seiner vier Ecken in der $(x,\, y)$-Ebene befinden. Die Ecke A liege im Koordinatenursprung, die Ecke B auf der positiven x-Achse und die Ecke C im 1. Quadranten der $(x,\, y)$-Ebene. Die Ecke D habe eine positive z-Komponente. An den Ecken A, B, C und D seien in dieser Reihenfolge die Punktladungen $+q$, $-2q$, $+3q$ und $+4q$ angebracht. Berechnen Sie die elektrostatische Gesamtkraft $\vec{F}$ (in Betrag und Richtung), die die Ladung in D auf Grund der drei anderen Ladungen erfährt.

Aufgabe 4:

An fünf Ecken eines gleichseitigen, ebenen Sechsecks (Seitenlänge $a = 5\cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$) sei je ein Elektron ($e = -1,6\cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m_e = 9,1\cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$) angebracht, im Zentrum des Sechsecks befinde sich eine positive Punktladung $+q = |e|$.

a) Welches Potential erzeugt diese Ladungsverteilung in der freien sechsten Ecke?
Welche Arbeit muss geleistet werden - um aus dem Unendlichen kommend - ein weiteres Elektron in die bisher freie Ecke zu bringen?

b) Wird dieses Elektron anschließend wieder losgelassen, so fliegt es weg. Welche Grenzgeschwindigkeit erreicht das Elektron im Vakuum?

c) Welche Grenzgeschwindigkeit erreichen die Elektronen, wenn alle sechs gleichzeitig losgelassen werden?

Aufgabe 5:

Vor einer, unendlich großen, geerdeten Metallplatte befinde sich im Abstand s eine positive Punktladung $+Q$. Das von $+Q$ auf die Platte gefällte Lot treffe diese im Punkt O.

Welcher Bruchteil der insgesamt durch $+Q$ auf der Platte influenzierten Ladung befindet sich innerhalb des Kreises um O, der in der Plattenebene liegt und den Radius $R = 3s$ hat?

Aufgabe 6:

Gegeben sei ein inhomogen geladener, symmetrischer Kreiskegel (mit Radius R und Höhe H). Die Ladungsdichte ρ hänge linear von der Höhe über der Grundfläche ab; an der Grundfläche sei diese ρ_0 und an der Kegelspitze sei diese $5\rho_0$.

a) Berechnen Sie die im Kegel enthaltene Gesamtladung Q.

b) Welches Potential erzeugt diese Ladungsverteilung in der Kegelspitze, wenn der Nullpunkt des Potentials im Unendlichen liegt?

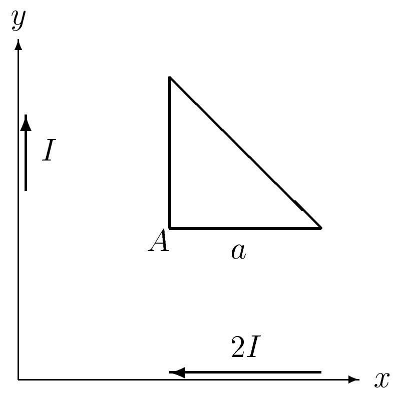
Aufgabe 7:

Ein Zylinderkondensator (Innenradius $r_i = 1\,\text{cm}$, Außenradius $r_a = 5\,\text{cm}$, Länge $L = 0,2\,\text{m}$) enthält auf seiner gesamten Länge ein ebenfalls zylinderförmiges Dielektrikum (Außenradius $r_a = 5\,\text{cm}$), das den Raum zwischen $r_m = \frac{1}{2}(r_i + r_a)$ und r_a vollständig ausfüllt und die Dielektrizitätskonstante $\epsilon_r = 5$ besitzt. Der Kondensator wird auf $U = 1000\,\text{V}$ aufgeladen und dann von der Spannungsquelle getrennt. Anschließend wird das Dielektrikum aus dem Kondensator herausgezogen (ohne Reibung).
Berechnen Sie die hierzu erforderliche Arbeit. Randeffekte des Feldes sollen nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 8:

Ein Drahtring (Radius R) liege so in der $(x,\, y)$-Ebene eines kartesischen Koordinatensystems, dass sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenursprung zusammenfällt. Parallel zur z-Achse verlaufe ein unendlich langer, gerader Draht (Abstand zur z-Achse $s = 2R$). Im Ring fließe der Gleichstrom I, im geraden Draht der Gleichstrom $2I$.
In welchen Punkten der z-Achse bildet die resultierende magnetische Induktion $\vec{B}$ den Winkel $\varphi = 45°$ mit der z-Achse?

Aufgabe 9:

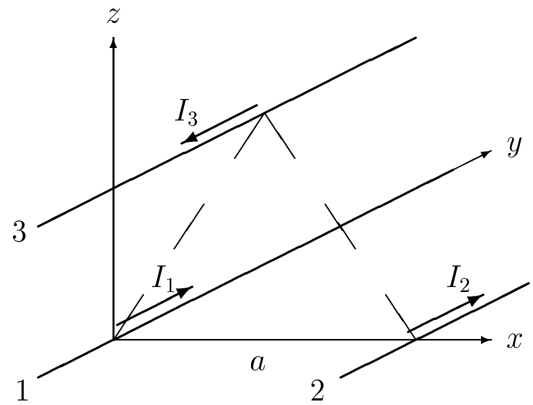


Entlang der y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems fließe der Gleichstrom I (in positiver y-Richtung), entlang der x-Achse der Gleichstrom $2I$ (in negativer x-Richtung).
Berechnen Sie den gesamten magnetischen Fluß Φ, der auf Grund dieser Ströme durch die Fläche eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks (Kathetenlänge a, rechter Winkel im Punkt $A(a/a)$) geht, wenn das Dreieck in der skizzierten Weise in der $(x,\, y)$-Ebene liegt.

Aufgabe 10:

Auf einem horizontalen Schienenpaar mit dem Abstand b gleite reibungsfrei ein Metalldraht der Masse m, der Winkel zwischen Draht und Schienen sei 90°. Senkrecht zur Ebene der Schienen liege ein homogenes Magnetfeld B. An den Schienen ist eine Batterie mit der Spannung U angeschlossen. Der Widerstand der Schienen sei vernachlässigbar klein, der Widerstand des Drahtes zwischen seinen Auflagepunkten sei R.
Welche stationäre Endgeschwindigkeit erreicht der Draht?
Wie groß ist der Strom I im Draht und wie groß ist die zwischen den Auflagepunkten induzierte Spannung U_{ind}?

Aufgabe 11:

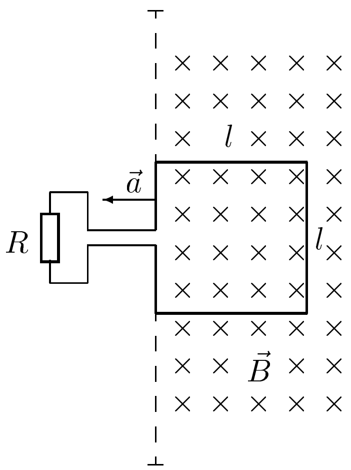


Gegeben seien drei unendlich lange, gerade, parallele Drähte. Draht 1 bilde die y-Achse eines kartesischen Koordinatensystems, Draht 2 liege in der $(x,\, y)$-Ebene bei $x = +a$, Draht 3 liege so, dass die Durchstoßpunkte der Drähte durch die $(x,\, z)$-Ebene ein gleichseitiges Dreieck bilden (siehe Skizze). Durch die Drähte fließen die Gleichströme $I_1 = I$, $I_2 = \alpha \cdot I$ mit $\alpha > 0$ und $I_3 = 5I$. Die Stromrichtungen sind der Figur zu entnehmen.

a) Wie groß ist der Faktor α, wenn die pro Meter Länge auf den Draht 3 wirkende Kraft den Betrag $\dfrac{|\vec{F}_3|}{l} = \dfrac{\mu_0}{4\pi} \cdot \dfrac{10I^2}{a} \cdot \sqrt{7}$ hat?

b) Wie lautet die Komponentendarstellung des Einheitsvektors in Richtung von $\vec{F}_3$?

Aufgabe 12:

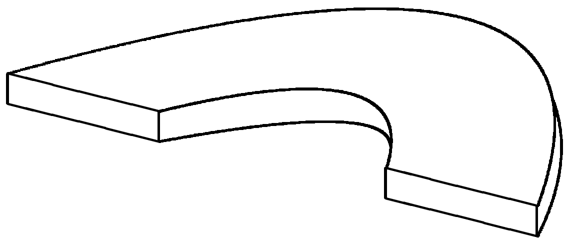


Eine quadratische, ebene Drahtschleife (Seitenlänge $l = 1\,\mathrm{m}$, Windungszahl $n = 10$) liege in einem homogenen Magnetfeld ($|\vec{B}| = 0{,}6\,\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$); die Richtung der magnetischen Induktion stehe senkrecht auf der Fläche der Schleife. Eine Seite der Schleife falle mit dem Magnetfeldrand zusammen.
Die Schleife werde nun mit der konstanten Beschleunigung $|\vec{a}| = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ aus dem Feld herausgezogen. Die Richtung der Beschleunigung liege in der Schleifenebene und stehe senkrecht zur Begrenzung des Feldes (siehe Skizze).
Welche Wärmemenge Q wird insgesamt in dem an die Schleife angeschlossenen Widerstand $R = 6\,\Omega$ erzeugt?

Aufgabe 13:

Eine dünnwandige Hohlkugel mit dem Radius R habe ein kreisförmiges Loch mit dem Radius $a = \frac{\sqrt{2}}{2}R$. Die Kugel trage die konstante Flächenladungsdichte σ.
Wie groß ist die elektrische Feldstärke $E = |\vec{E}|$ im Mittelpunkt des Lochs?

Aufgabe 14:

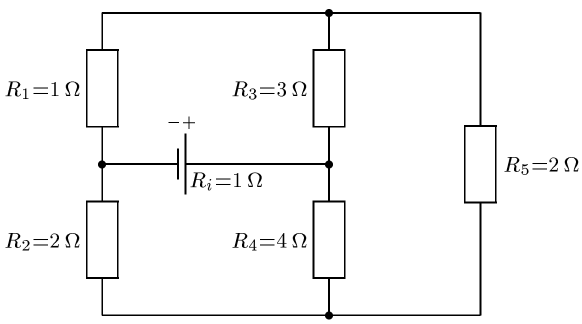


Die Hälfte eines flachen Kreisrings aus Graphit (Innenradius $r_1 = 50\,\text{cm}$, Außenradius $r_2 = 100\,\text{cm}$, Dicke $d = 1\,\text{cm}$, spezifischer Widerstand $\rho = 3 \cdot 10^{-2}\,\Omega\text{cm}$) wird an den rechteckigen Endflächen (siehe Skizze) mit Kupferkontakten versehen, deren ohmscher Widerstand und deren Übergangswiderstand zum Graphit vernachlässigbar klein seien.
Wie groß ist der ohmsche Widerstand R zwischen den Anschlußkontakten?

Aufgabe 15:

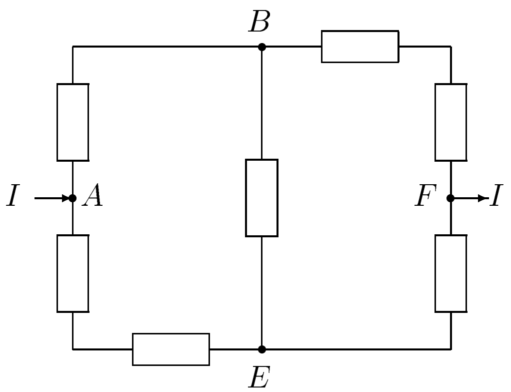
In einer Hohlkugel aus Kupfer (Innenradius $r_i = 1\,\text{cm}$) sei konzentrisch eine kleine Kupferkugel mit dem Radius r_{Cu} angebracht; der Zwischenraum sei mit Graphit (Leitfähigkeit $\sigma = 3 \cdot 10^2\,\frac{1}{\Omega\text{cm}}$) ausgefüllt. An die Kupferelektroden werde eine Spannung $U = 0,1\,\text{V}$ angelegt, wobei die Zuführung zur inneren Elektrode durch ein vernachlässigbar kleines Loch erfolgen soll.
Innerhalb welcher Grenzen muss der Radius r_{Cu} der inneren Elektrode liegen, wenn im Graphit eine Leistung zwischen $P_1 = 0,5\,\text{W}$ und $P_2 = 1\,\text{W}$ verbraucht werden soll?
(Der Widerstand der Kupferelektroden selbst und der Übergangswiderstand zwischen Kupfer und Graphit seien zu vernachlässigen)

Aufgabe 16:



Gegeben sei das skizzierte Netzwerk. Wie groß darf die Leerlaufspannung U_{EMK} der Batterie maximal sein, wenn die Verlustleistung in keinem der Widerstände 1 W übersteigen darf?
Wie groß ist für diesen Fall die Klemmenspannung U_{Kl} der Batterie, und welche Verlustleistung P_i entsteht in der Batterie selbst, wenn diese einen Innenwiderstand von $R_i = 1\,\Omega$ besitzt?

Aufgabe 17:



Gegeben sei das skizzierte Netzwerk aus 7 gleichen Widerständen R. Im Punkt A fließe der Strom I zu, im Punkt F fließe er wieder ab.
Wie groß ist die Stromstärke in dem zwischen den Punkten B und E liegenden Widerstand?
Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_{ges} der Anordnung zwischen A und F?
Welcher Prozentsatz f der insgesamt erzeugten Stromwärme entsteht in dem Widerstand zwischen B und E?

Lösung zu Aufgabe 1:

Für das elektrische Feld einer Punktladung im Vakuum gilt:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^2} \cdot \frac{\vec{r}_i}{|\vec{r}_i|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i}{r_i^3} \cdot \vec{r}_i$$

Gibt es mehrere Punktladungen, so addieren sich deren elektrische Felder zum elektrischen Gesamtfeld:
$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$

Die Vektoren $\vec{r}_i$ weisen von der jeweiligen Punktladung aus zum Ort, an dem das Feld bestimmt werden soll.

a) In diesem Beispiel weisen die Vektoren $\vec{r}_i$ von den Punkten A, B, C zum Ursprung O:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{AO} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_1| = r_1 = \sqrt{5}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{BO} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_2| = r_2 = \sqrt{2}$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_{CO} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_3| = r_3 = 3$$

Hieraus folgt für das elektrische Gesamtfeld:

$$\vec{E}_O = \sum_{i=1}^{3} \vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1^3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{Q_2}{r_2^3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{Q_3}{r_3^3} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{5}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} + \frac{1,8}{27} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\vec{E}_O = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{10} \\ -\frac{2}{10} \\ \frac{7}{10} \end{pmatrix} \cdot 10^{-7}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$$

Mit $\vec{r}_{E_O} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $|\vec{r}_{E_O}| = \sqrt{62}$, sowie $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{Vm}}$ folgt für den Betrag der elektrischen Gesamtfeldstärke:

$$|\vec{E}_O| = \frac{10^{-8}}{4\pi\epsilon_0} \cdot |\vec{r}_{E_O}|\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} = 708\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

b) Für die Winkel mit den positiven Koordinatenachsen folgt mittels des Skalarprodukts:

$$\cos\alpha_i = \frac{\vec{r}_{E_O} \cdot \vec{e}_i}{|\vec{r}_{E_O}| \cdot |\vec{e}_i|} \text{ mit } |\vec{e}_i| = 1$$

$$\cos\alpha_x = \tfrac{3}{\sqrt{62}} = \tfrac{3}{62}\sqrt{62} \Rightarrow \alpha_x = 67,60^\circ$$

$$\cos\alpha_y = \tfrac{-2}{\sqrt{62}} = -\tfrac{1}{31}\sqrt{62} \Rightarrow \alpha_y = 104,71^\circ$$

$$\cos\alpha_z = \tfrac{7}{\sqrt{62}} = \tfrac{7}{62}\sqrt{62} \Rightarrow \alpha_z = 27,25^\circ$$

Lösung zu Aufgabe 2:

Wir bezeichnen die Kraft, die die Punktladung $+2Q$ auf $+q$ ausübt mit F_{2Q}.
Diese bildet mit der positiven x-Achse den Winkel α.
Der Abstand zu $+q$ sei r_{2Q}.

Wir bezeichnen die Kraft, die die Punktladung $+Q$ auf $+q$ ausübt mit F_Q.
Diese bildet mit der negativen x-Achse den Winkel $90° - \alpha$.
Der Abstand zu $+q$ sei r_Q.

Die Fadenkraft $\vec{F}$ bildet im statischen Gleichgewicht den Winkel 2α mit der positiven x-Achse.

Ebene geometrische Überlegungen am rechtwinkligen Dreieck im Thaleskreis ergeben:
$r_{2Q} = 2a\cos\alpha$
$r_Q = 2a\sin\alpha$

Somit folgt für die Kraftbeträge der Coulombabstoßung:

$$F_{2Q} = \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r_{2Q}^2} = \frac{2Qq}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{4a^2\cos^2\alpha} = \frac{Qq}{16\pi\epsilon_0 a^2}\cdot\frac{2}{\cos^2\alpha}$$

$$F_Q = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r_Q^2} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{4a^2\sin^2\alpha} = \frac{Qq}{16\pi\epsilon_0 a^2}\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}$$

Ferner gilt für die Kräfte:

$$\tan\alpha = \frac{F_Q}{F_{2Q}} = \frac{\cos^2\alpha}{2\sin^2\alpha}$$

$$\tan^3\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Rightarrow \alpha = 38,44°$$

Für den Betrag der Fadenkraft gilt:

$$F = |\vec{F}| = \sqrt{F_Q^2 + F_{2Q}^2} = \frac{Qq}{16\pi\epsilon_0 a^2}\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{4}{\cos^2\alpha}}$$

Für die Orte $P_i(x_i/y_i)$, an denen sich $+q$ aufhalten kann gilt:

$$x_i = a\cdot\cos 2\alpha = a\cdot\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = a\cdot\frac{1-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \approx 0,23\cdot a$$

$$y_i = \pm a\cdot\sin 2\alpha = \pm a\cdot\frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \pm 2a\cdot\frac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \pm 2a\cdot\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{1+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}} \approx \pm 0,97\cdot a$$

Die Koordinaten der Punkte sind somit:

$P_1(0,23a/0,97a)$
$P_2(0,23a/-0,97a)$

Lösung zu Aufgabe 3:

Für die elektrische Kraft zweier Punktladungen im Vakuum gilt:

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i Q_j}{r_{i,j}^2} \cdot \frac{\vec{r}_{i,j}}{|\vec{r}_{i,j}|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_i Q_j}{r_{i,j}^3} \cdot \vec{r}_{i,j}$$

In diesem Beispiel weisen die Vektoren $\vec{r}_i$ von den Punkten A, B, C zur Spitze D:
Die Koordinaten der Punkte sind:
$A(0/0/0)$, $B(a/0/0)$, $C(\frac{a}{2}/\frac{a}{2}\sqrt{3}/0)$, $D(\frac{a}{2}/\frac{a}{6}\sqrt{3}/a\sqrt{\frac{2}{3}})$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{AD} = a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_1| = r_1 = a$$

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_{BD} = a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_2| = r_2 = a$$

$$\vec{r}_3 = \vec{r}_{CD} = a \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{r}_3| = r_3 = a$$

Mit den Punktladungen:
$Q_A = +q$, $Q_B = -2q$, $Q_C = +3q$, $Q_D = +4q$

Hieraus folgt für die elektrische Gesamtkraft:

$$\vec{F}_D = \sum_{i=1}^{3} \vec{F}_{i,D} = \frac{Q_D}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{Q_A}{r_1^3} \cdot \vec{r}_1 + \frac{Q_B}{r_2^3} \cdot \vec{r}_2 + \frac{Q_C}{r_3^3} \cdot \vec{r}_3 \right) = \frac{4q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{q}{a^3} \cdot \vec{r}_1 - \frac{2q}{a^3} \cdot \vec{r}_2 + \frac{3q}{a^3} \cdot \vec{r}_3 \right)$$

$$\vec{F}_D = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3} \cdot (\vec{r}_1 - 2\vec{r}_2 + 3\vec{r}_3)$$

$$\vec{F}_D = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^3} \cdot a \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6}\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \right) = \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 a^2} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{6}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Mit $\vec{r}_{F_D} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{6}\sqrt{3} \\ 2\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$ und $|\vec{r}_{F_D}| = 3$ folgt für den Betrag der elektrischen Gesamtkraft:

$$|\vec{F}_D| = \frac{3q^2}{\pi\epsilon_0 a^2}$$

Für die Winkel mit den positiven Koordinatenachsen folgt mittels des Skalarprodukts:

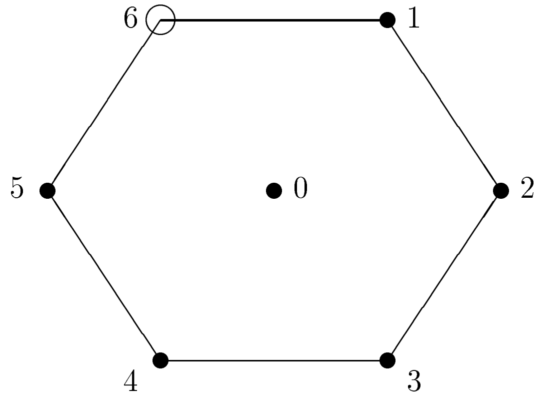
$$\cos\alpha_i = \frac{\vec{r}_{F_D} \cdot \vec{e}_i}{|\vec{r}_{F_D}| \cdot |\vec{e}_i|} \text{ mit } |\vec{e}_i| = 1$$

$$\cos\alpha_x = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha_x = 60°$$

$$\cos\alpha_y = \frac{-\frac{7}{6}\sqrt{3}}{3} = -\frac{7}{18}\sqrt{3} \Rightarrow \alpha_y = 132,34°$$

$$\cos\alpha_z = \frac{2\sqrt{\frac{2}{3}}}{3} = \frac{2}{9}\sqrt{6} \Rightarrow \alpha_z = 57,02°$$

Lösung zu Aufgabe 4:



Die Entfernungen zweier Elektronen wird mit $r_{i,j} = r_{j,i}$ bezeichnet.
Entfernungen der Ecken zum Zentrum sind:
$r_{0,1} = r_{0,2} = \ldots = r_{0,6} = a$
Entfernungen benachbarter Ecken:
$r_{1,2} = r_{2,3} = \ldots = r_{6,1} = a$
Entfernung übernächster Ecken:
$r_{1,3} = r_{2,4} = r_{3,5} = r_{4,6} = r_{5,1} = r_{6,2} = a\sqrt{3}$
Entfernung gegenüberliegender Ecken:
$r_{1,4} = r_{2,5} = r_{3,6} = 2a$

a) Die freie Stelle 6 tritt nur in Wechselwirkung mit dem Zentrum 0 und den fünf Elektronen auf dem Sechseck. Die Elektronen auf dem Sechseck sind festgehalten und treten untereinander nicht in Wechselwirkung.
Für das Potential an der Stelle 6 gilt:

$$\varphi_{6,i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e_i}{r_{6,i}}$$

$$\varphi_6 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sum_{i=0}^{5} \frac{e_i}{r_{6,i}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(\frac{|e|}{1} + \frac{e}{1} + \frac{e}{\sqrt{3}} + \frac{e}{2} + \frac{e}{\sqrt{3}} + \frac{e}{1} \right)$$

$$\varphi_6 = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \right) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

Die potentielle Energie eines aus dem Unendlich kommenden Elektron ist:

$$E_{\text{pot}} = e \cdot \varphi_6 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$$

Diese wird in reine kinetische Energie eines Elektrons umgewandelt: $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_e v^2$

Nach dem Energieerhaltungssatz folgt: $E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_{\text{pot}}}{m_e}} = 1,64 \cdot 10^6 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

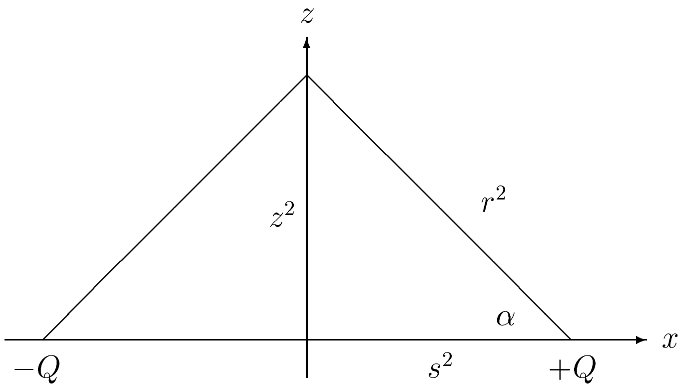
b) Läßt man alle sechs Elektronen gleichzeitig los, so bedeutet dies, dass alle untereinander in Wechselwirkung treten (da sie nicht festgehalten sind). Die potentielle Energie, die dieses System nun besitzt, kann man folgendermaßen deuten:
Man bringt ein Elektron nach dem anderen aus dem Unendlichen kommend an seinen Platz und berücksichtigt zusätzlich zur Wechselwirkung mit dem Zentrum auch noch die Wechselwirkung der Elektronen untereinander.
6 WW mit Zentrum, 6 WW mit Nachbarn, 6 WW mit Übernächsten, 3 WW mit Gegenüberliegenden

$$E^*_{\text{pot}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(-6 \cdot \frac{1}{1} + 6 \cdot \frac{1}{1} + 3 \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a} \cdot \left(\frac{3}{2} + \frac{6}{\sqrt{3}} \right)$$

Diese potentielle Energie wird in kinetische Energie von 6 Elektronen umgewandelt:
$E^*_{\text{kin}} = 6 \cdot \frac{1}{2} m_e v^{*2} = 3 m_e v^{*2}$

Nach dem Energieerhaltungssatz folgt: $E^*_{\text{pot}} = E^*_{\text{kin}} \Rightarrow v^* = \sqrt{\frac{E^*_{\text{pot}}}{3m_e}} = 0,914 \cdot 10^6 \, \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Lösung zu Aufgabe 5:



Mit $-Q$ bezeichnet man die sogenannte Bildladung oder Spiegelladung, die in derselben Entfernung auf der anderen Seite dieselbe Kraft hervorruft.

Für den elektrischen Verschiebungsfluß gilt:

$$\epsilon_0 \oint_A E \cos\alpha \, dA = Q_{\text{infl}}$$

$E \cos\alpha = E_n$ bezeichnet die Normalkomponente von E auf die Fläche A

Die elektrische Feldstärke E ist:
Die von Ladung und Bildladung erzeugtes Feld.

$$E = -\frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Folgende Zusammenhänge gelten:

$$r^2 = z^2 + s^2$$

$$\cos\alpha = \frac{s}{r} = \frac{s}{\sqrt{z^2 + s^2}}$$

Zylinderkoordinaten

$$dA = z \, dz d\varphi$$

Dies alles eingesetzt in obiges Integral liefert:

$$Q_{\text{infl}} = -\epsilon_0 \oint_A \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2} \frac{s}{r} z \, dz d\varphi = -\frac{Qs}{2\pi} \oint_A \frac{z}{r^3} \, dz d\varphi = -\frac{Qs}{2\pi} \oint_A \frac{z}{\sqrt{(z^2 + s^2)^3}} \, dz d\varphi$$

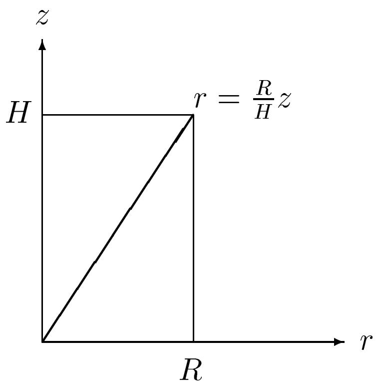
$$Q_{\text{infl}} = -\frac{Qs}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{3s} \frac{z}{\sqrt{(z^2 + s^2)^3}} \, dz d\varphi = -\frac{Qs}{2\pi} \cdot 2\pi \int_{z=0}^{3s} \frac{z}{\sqrt{(z^2 + s^2)^3}} \, dz$$

$$Q_{\text{infl}} = -Qs \left[-\frac{1}{\sqrt{z^2 + s^2}} \right]_{z=0}^{3s}$$

$$Q_{\text{infl}} = Qs \left(\frac{1}{s\sqrt{10}} - \frac{1}{s} \right) = -Q \left(1 - \frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

Lösung zu Aufgabe 6:

Die Spitze des Kegels befindet sich im Ursprung und die Grundfläche auf einem Kreis senkrecht zur z-Achse in der Höhe $z = H$.
Die Ladungsverteilung hängt linear von der z-Koordinate ab: $\rho = \rho(z) = m \cdot z + c$
$\rho(z = 0) = 5\rho_0$
$\rho(z = H) = \rho_0$
$\Rightarrow \rho(z) = 5\rho_0 - \frac{4\rho_0}{H} z = \rho_0(5 - \frac{4}{H} z)$



Die Grenzen des Kegels sind:
$0 \leq r \leq \frac{R}{H} z$
$0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$0 \leq z \leq H$
$dV = r\, dr d\varphi dz$

a) Somit bestimmt sich die Gesamtladung im Kegel zu:

$$Q = \int_V \rho(z)\, dV = \rho_0 \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{R}{H}z} (5 - \tfrac{4}{H} z) r\, dr d\varphi dz$$

$$Q = \rho_0 \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left[(5 - \tfrac{4}{H} z)\tfrac{1}{2} r^2\right]_{r=0}^{\frac{R}{H}z} d\varphi dz = \rho_0 \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (5 - \tfrac{4}{H} z)\tfrac{1}{2}\tfrac{R^2}{H^2} z^2\, d\varphi dz$$

$$Q = \rho_0 \pi \tfrac{R^2}{H^2} \int_{z=0}^{H} (5z^2 - \tfrac{4}{H} z^3)\, dz = \rho_0 \pi \tfrac{R^2}{H^2} \left[\tfrac{5}{3} z^3 - \tfrac{1}{H} z^4\right]_{z=0}^{H} = \rho_0 \pi \tfrac{R^2}{H^2} \tfrac{2}{3} H^3 = 2 \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\pi R^2 H}_{V_{\text{Kegel}}} \cdot \rho_0$$

$$Q = 2\rho_0 V_{\text{Kegel}}$$

b) Der Abstand eines Ladungselements von der Kegelspitze ist $d = \sqrt{z^2 + r^2}$
Für das Potential in der Kegelspitze gilt:

$$\varphi = \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \tfrac{\rho(z)}{d}\, dV = \tfrac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{z=0}^{H} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\frac{R}{H}z} \rho_0 \tfrac{(5 - \frac{4}{H} z)\cdot r}{\sqrt{z^2 + r^2}}\, dr d\varphi dz$$

$$\varphi = \tfrac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{z=0}^{H} \left[\left(5 - \tfrac{4}{H} z\right)\sqrt{z^2 + r^2}\right]_{r=0}^{\frac{R}{H}z} dz = \tfrac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{z=0}^{H} \left(5 - \tfrac{4}{H} z\right)\left(\sqrt{z^2 + \tfrac{R^2}{H^2} z^2} - z\right) dz$$

$$\varphi = \tfrac{\rho_0}{2\epsilon_0} \int_{z=0}^{H} \left(5 - \tfrac{4}{H} z\right) z \left(\sqrt{1 + \tfrac{R^2}{H^2}} - 1\right) dz$$

$$\varphi = \frac{\rho_0\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{H^2}} - 1\right)}{2\epsilon_0} \int_{z=0}^{H} \left(5 - \tfrac{4}{H} z\right) z\, dz$$

$$\varphi = \frac{\rho_0\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{H^2}} - 1\right)}{2\epsilon_0} \left[\tfrac{5}{2} z^2 - \tfrac{4}{3H} z^3\right]_{z=0}^{H} = \tfrac{7}{12} \tfrac{\rho_0}{\epsilon_0} H^2 \left(\sqrt{1 + \tfrac{R^2}{H^2}} - 1\right)$$

Lösung zu Aufgabe 7:

Hierbei handelt es sich um eine Reihenschaltung zweier Zylinderkondensatoren.

Die Kapazität für einen Zylinderkondensator ist:
$C_{\mathrm{Zyl}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r h}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$

Im einen Kondensator C_{mit} befindet sich ein Dielektrikum ϵ_r, im anderen C_{ohne} nicht ($\epsilon_r = 1$)

Mit den Angaben
$r_a = 5\,\mathrm{cm},\ r_i = 1\,\mathrm{cm},\ r_m = 3\,\mathrm{cm},\ h = 0,2\,\mathrm{m},\ \epsilon_r = 5,\ \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}\ \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}$
folgt für die Einzelkapazitäten:
$C_{\mathrm{mit}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r h}{\ln \frac{r_a}{r_m}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r h}{\ln \frac{5}{3}}$
$C_{\mathrm{ohne}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{h}{\ln \frac{r_m}{r_i}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{h}{\ln 3}$

Für die Gesamtkapazität bei Reihenschaltung gilt:
$C_{\mathrm{ges}} = \frac{C_{\mathrm{mit}} \cdot C_{\mathrm{ohne}}}{C_{\mathrm{mit}} + C_{\mathrm{ohne}}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r h}{\epsilon_r \ln 3 + \ln \frac{5}{3}}$

Ist das Dielektrikum völlig herausgezogen, so erhält man einen Kondensator mit der Kapazität:
$C^* = 2\pi\epsilon_0 \frac{h}{\ln \frac{r_a}{r_i}} = 2\pi\epsilon_0 \frac{h}{\ln 5}$

Da die Spannungsquelle vor dem Herausziehen des Dielektrikums abgetrennt wurde, bleibt die Gesamtladung Q konstant.

Diese ist vor dem Herausziehen:
$Q = C_{\mathrm{ges}} U$

Nach dem Herausziehen ist die Spannung auf U^* angestiegen:
$Q = C^* U^* \Rightarrow U^* = \frac{Q}{C^*} = \frac{C_{\mathrm{ges}}}{C^*} U$

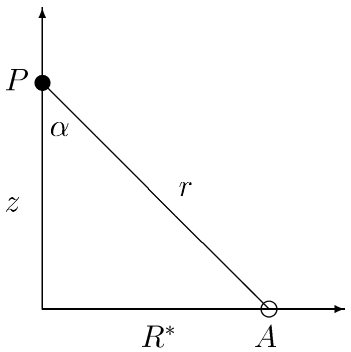
Die Arbeit, die zum Herausziehen nötig ist, ist gleich der Differenz der Kondensatorenergie vor und nach dem Herausziehen:
$W = E_{\mathrm{vor}} - E_{\mathrm{nach}} = \frac{1}{2} C_{\mathrm{ges}} U^2 - \frac{1}{2} C^* U^{*2} = \frac{1}{2} C_{\mathrm{ges}} U^2 - \frac{1}{2} C^* \left(\frac{C_{\mathrm{ges}}}{C^*} U \right)^2$
$W = \frac{1}{2} C_{\mathrm{ges}} U^2 \left(1 - \frac{C_{\mathrm{ges}}}{C^*} \right)$
mit $\frac{C_{\mathrm{ges}}}{C^*} = \frac{\epsilon_r \ln 5}{\epsilon_r \ln 3 + \ln \frac{5}{3}} \Rightarrow 1 - \frac{C_{\mathrm{ges}}}{C^*} = \frac{(1 - \epsilon_r) \ln \frac{5}{3}}{\epsilon_r \ln 3 + \ln \frac{5}{3}}$

$W = \pi\epsilon_0 \frac{\epsilon_r (1 - \epsilon_r) h \ln \frac{5}{3}}{(\epsilon_r \ln 3 + \ln \frac{5}{3})^2} U^2 = -1,57 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{J}$

Lösung zu Aufgabe 8:

Der Betrag der magnetischen Induktion, die vom Ring ausgeht (B_{Ring}) ist parallel zur z-Achse, der Betrag der magnetischen Induktion, die vom Draht ausgeht (B_{Draht}) ist parallel zur y-Achse.
Wenn beide Beträge gleich groß sind, dann ist der Winkel mit der z-Achse $\varphi = 45°$

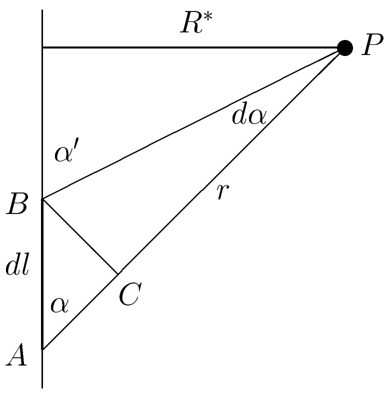
Es gilt für die magnetischen Induktion, die vom Ring ausgeht:



Für die magnetische Induktion gilt: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{\sin\alpha}{r^2}\, dl$
Es gilt: $r = \sqrt{z^2 + R^{*2}}$
$\sin\alpha = \frac{R^*}{r}$
$dl = R^*\, d\varphi$
Eingesetzt in die magnetische Induktion:
$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{\frac{R^*}{r}}{r^2}\, R^* d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{R^{*2}}{r^3}\, d\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{R^{*2}}{\sqrt{(z^2+R^{*2})^3}}\, d\varphi$
$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{R^{*2}}{\sqrt{(z^2+R^{*2})^3}} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0}{2} I^* \frac{R^{*2}}{\sqrt{(z^2+R^{*2})^3}}$

Die jeweilige Stromstärke $I^* = I$ und $R^* = R$ in der Gleichung ersetzt, liefert:
$$B_{\text{Ring}} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}}$$

Es gilt für die magnetischen Induktion, die vom geraden Draht ausgeht:



Für die magnetische Induktion gilt: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{\sin\alpha}{r^2}\, dl$
Es gilt: $r = \frac{R^*}{\sin\alpha}$
Im Dreieck ABC gilt: $\overline{BC} = dl \sin\alpha$
Andererseits gilt für den Bogen: $\widehat{BC} \approx r\, d\alpha$
$\Rightarrow dl = \frac{r}{\sin\alpha}\, d\alpha = \frac{R^*}{\sin^2\alpha}\, d\alpha$
Eingesetzt in die magnetische Induktion:
$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I^* \frac{\sin\alpha}{\frac{R^{*2}}{\sin^2\alpha}} \frac{R^*}{\sin^2\alpha}\, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I^*}{R^*} \sin\alpha\, d\alpha$
$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I^*}{R^*} \int\limits_{\alpha=0}^{\pi} \sin\alpha\, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I^*}{R^*} \left[-\cos\alpha\right]_{\alpha=0}^{\pi} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I^*}{R^*}$

Die jeweilige Stromstärke $I^* = 2I$ und $R^* = 2R$ in der Gleichung ersetzt, liefert:
$$B_{\text{Draht}} = \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \frac{1}{2R} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{1}{\pi R}$$

Es muss also gelten: $B_{\text{Ring}} = B_{\text{Draht}}$

$$\frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{\sqrt{(z^2+R^2)^3}} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{1}{\pi R} \qquad |\,\text{quadrieren}$$
$$\frac{R^4}{(z^2+R^2)^3} = \frac{1}{\pi^2 R^2} \qquad \Rightarrow \pi^2 R^6 = (z^2+R^2)^3 \qquad |\,\text{dritte Wurzel ziehen}$$
$$R^2 \sqrt[3]{\pi^2} = z^2 + R^2 \qquad \Rightarrow R^2(\sqrt[3]{\pi^2} - 1) = z^2$$
$$z_{1,2} = \pm R \sqrt{\sqrt[3]{\pi^2} - 1}$$

Lösung zu Aufgabe 9:

Der magnetische Fluß setzt sich zusammen aus einem Teil, der von der x-Achse herrührt (Φ_x) und einem Teil, der von der y-Achse herrührt (Φ_y).
Der magnetische Fluß ist definiert als:
$\Phi = BA = \Phi_x + \Phi_y = (B_x + B_y)A$

1. Teil:
Berechnung des magnetischen Flusses Φ_x durch A:
Von der x-Achse aus ist das Gebiet der Fläche:
$a \leq x \leq 2a$
$a \leq y \leq 3a - x$
$dA = dydx$

Es gilt für die magnetische Induktion B_x, die vom Strom $2I$ der x-Achse herrührt:

$$B_x = \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \frac{1}{y} \Rightarrow d\Phi_x = B_x \, dA$$

$$\Phi_x = B_x \int\limits_A dA$$

$$\Phi_x = \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \int\limits_{x=a}^{2a} \int\limits_{y=a}^{3a-x} \frac{1}{y} \, dydx = \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \int\limits_{x=a}^{2a} [\ln y]_{y=a}^{3a-x} \, dx = \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \int\limits_{x=a}^{2a} \ln(3 - \frac{1}{a}x) \, dx$$

$$\Phi_x = \frac{\mu_0}{2\pi} 2I \left[-a \left((3 - \frac{1}{a}x) \cdot (\ln(3 - \frac{1}{a}x) - 1) \right) \right]_{x=a}^{2a} = \frac{\mu_0}{2\pi} 2Ia(2\ln 2 - 1)$$

2. Teil:
Berechnung des magnetischen Flusses Φ_y durch A:
Von der y-Achse aus ist das Gebiet der Fläche:
$a \leq y \leq 2a$
$a \leq x \leq 3a - y$
$dA = dxdy$

Es gilt für die magnetische Induktion B_y, die vom Strom I der x-Achse herrührt:

$$B_y = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{x} \Rightarrow d\Phi_y = B_y \, dA$$

$$\Phi_y = B_y \int\limits_A dA$$

$$\Phi_y = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int\limits_{y=a}^{2a} \int\limits_{x=a}^{3a-y} \frac{1}{x} \, dxdy = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int\limits_{y=a}^{2a} [\ln x]_{x=a}^{3a-y} \, dy = \frac{\mu_0}{2\pi} I \int\limits_{y=a}^{2a} \ln(3 - \frac{1}{a}y) \, dy$$

Siehe Integral oben:

$$\Phi_y = \frac{\mu_0}{2\pi} Ia(2\ln 2 - 1)$$

Hieraus ergibt sich:

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_y = \frac{\mu_0}{2\pi} 2Ia(2\ln 2 - 1) + \frac{\mu_0}{2\pi} Ia(2\ln 2 - 1)$$

$$\Phi = \frac{3\mu_0}{2\pi} Ia(2\ln 2 - 1)$$

Lösung zu Aufgabe 10:

Die beschleunigende Kraft ist die Summe aus der durch den Strom I verursachte beschleunigende Kraft plus der durch den Induktionsstrom I_{ind} (nach Lenz negativ) verursachten Kraft.

$$F_{\text{beschl}} = F + F_{\text{ind}} \Rightarrow a = \frac{F + F_{\text{ind}}}{m} = \frac{Bb(I + I_{\text{ind}})}{m}$$

Es gilt das ohmsche Gesetz und:
$U_{\text{ind}} = -Bbv_s$

Dies in obige Gleichung eingesetzt ergibt:
$a = \dfrac{Bb}{mR}(U + U_{\text{ind}}) = \dfrac{Bb}{mR}(U - Bbv_s)$

Die maximale Geschwindigkeit v_{max} erhält man, wenn $a = 0$ wird:
$a = 0$
$\Rightarrow U - Bbv_{\text{max}} = 0$

$$v_{\text{max}} = \frac{U}{Bb}$$

Der Strom im Draht ist:

$$I = \frac{U + U_{\text{ind}}}{R}$$

Die induzierte Spannung ist:

$$U_{\text{ind}} = RI - U$$

Lösung zu Aufgabe 11:

a) Für die Kraft zwischen zwei geraden stromdurchflossenen Drähten gilt:

$$\vec{F}_{i,j} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} I_i I_j \frac{\vec{r}_{i,j}}{r_{i,j}^2}$$

Hieraus folgt für die Kraft von Draht 2 auf Draht 3:

$$\vec{F}_{32} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} 5I \cdot \alpha I \frac{1}{a^2} a \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} 5\alpha I^2 \frac{l}{a} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt für die Kraft von Draht 1 auf Draht 3:

$$\vec{F}_{31} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} 5I \cdot I \frac{1}{a^2} a \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{2\pi} 5I^2 \frac{l}{a} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Die Gesamtkraft auf den Draht 3 ist somit:

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{32} + \vec{F}_{31} = \frac{\mu_0}{2\pi} 5I^2 \frac{l}{a} \left(\alpha \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi} 5I^2 \frac{l}{2a} \begin{pmatrix} -\alpha + 1 \\ 0 \\ (\alpha+1)\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Die Richtung der Kraft ist $\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -\alpha + 1 \\ 0 \\ (\alpha+1)\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und $|\vec{r}_3| = 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$

Somit ist der Betrag der Gesamtkraft auf Draht 3:

$$|\vec{F}_3| = \frac{\mu_0}{4\pi} 5I^2 \frac{l}{a} \cdot 2\sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1} = l \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{10I^2}{a} \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$$

Hieraus folgt für die Kraft pro Meter Länge:

$$\frac{|\vec{F}_3|}{l} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{10I^2}{a} \sqrt{\alpha^2 + \alpha + 1}$$

Mit der in der Aufgabe gegebenen Kraft folgt die Identität:
$7 = \alpha^2 + \alpha + 1$
$\alpha^2 + \alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2}$
$\alpha_1 = 2 \qquad (\alpha_2 = -3)$

b) Für $\alpha = 2$ wird die Richtung der Kraft auf Draht 3:

$$\vec{r}_3 = \begin{pmatrix} -2 + 1 \\ 0 \\ (2+1)\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ und } |\vec{r}_3| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Der Einheitsvektor in diese Richtung ist somit:

$$\vec{r}_{3_0} = \frac{1}{2\sqrt{7}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Lösung zu Aufgabe 12:

Die Schleife wird mit der konstanten Beschleunigung a aus dem Magnetfeld gezogen. Die vom Magnetfeld durchflossene Fläche A nimmt somit um $dA = l\,dx$ ab.

Die Bewegungsgleichungen der gleichmäßig beschleunigten Schleife lauten:
$x(t) = \frac{1}{2}at^2$
$v(t) = at$

Sei T die Zeit, bei der die Schleife das Magnetfeld völlig verlassen hat, so gilt:
$x(T) = l$
$\Rightarrow T = \sqrt{\frac{2l}{a}}$

Bei konstantem Magnetfeld ergibt sich die induzierte Spannung zu:

$$U_{\text{ind}}(t) = -n\frac{d\Phi(t)}{dt} = -nB\underbrace{\frac{dA(t)}{dt}}_{<0} = -nBl\underbrace{\frac{dx(t)}{dt}}_{v(t)} = -nBlat$$

Die elektrische Leistung ist definiert durch $P = \frac{dW}{dt}$:

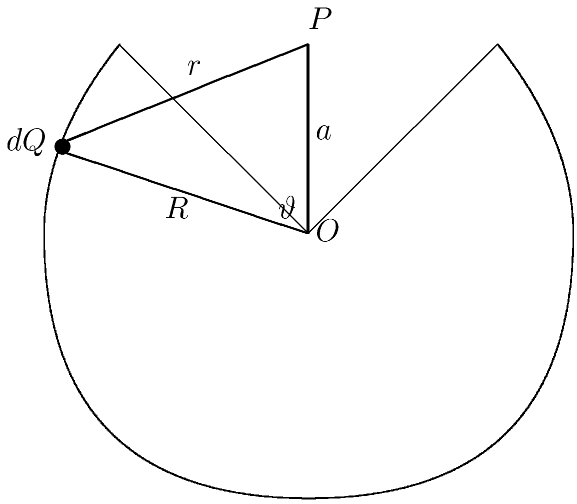
$$P(t) = \frac{1}{R}U_{\text{ind}}(t)^2$$

$$dW = P(t)\,dt = \frac{1}{R}U_{\text{ind}}(t)^2\,dt = \frac{n^2B^2l^2a^2}{R}t^2\,dt$$

$$W = \frac{n^2B^2l^2a^2}{R}\int\limits_{t=0}^{T} t^2\,dt = \frac{n^2B^2l^2a^2}{R}\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{t=0}^{T} = \frac{n^2B^2l^2a^2}{3R}T^3$$

$$W = \frac{n^2B^2l^2a^2}{3R}\cdot\frac{2l}{a}\sqrt{\frac{2l}{a}} = \frac{2n^2B^2}{3R}\sqrt{2al^7} = 8\,\text{J}$$

Lösung zu Aufgabe 13:



Es gilt mit dem Cosinussatz ($\vartheta \angle(a,\, R)$)
$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta}$

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{aR\sin\vartheta}{r} \Rightarrow \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{r}{aR}$$

Mit den geometrischen Grenzen
$\vartheta_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r_1 = \sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}$
$\vartheta_2 = \pi \Rightarrow r_2 = a + R$

Das differentielle Flächenelement dA ist
$dA = 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = \dfrac{2\pi R}{a} r\, dr$

Die Ladung ist somit
$dQ = \sigma\, dA = \dfrac{2\pi R\sigma}{a} r\, dr$

Für das elektrische Potential gilt

$$d\varphi = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r}\, dA = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R}{a}\, dr$$

$$\varphi(a) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R}{a}\int\limits_{r=r_1}^{r_2} dr = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R}{a}\left[r\right]_{r=r_1}^{r_2} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R}{a}\left(a + R - \sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}\right)$$

$$\varphi(a) = \frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{a + R - \sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}}{a}$$

Für die elektrische Feldstärke gilt

$$E(a) = -\mathrm{grad}\,\varphi(a) = -\frac{d\varphi(a)}{da}$$

$$E(a) = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{a\left(1 - \frac{2a - \sqrt{2}R}{2\sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}}\right) - \left(a + R - \sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}\right)}{a^2}$$

$$E(a) = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{a - \frac{2a^2 - \sqrt{2}Ra}{2\sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}} - a - R + \sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}}{a^2}$$

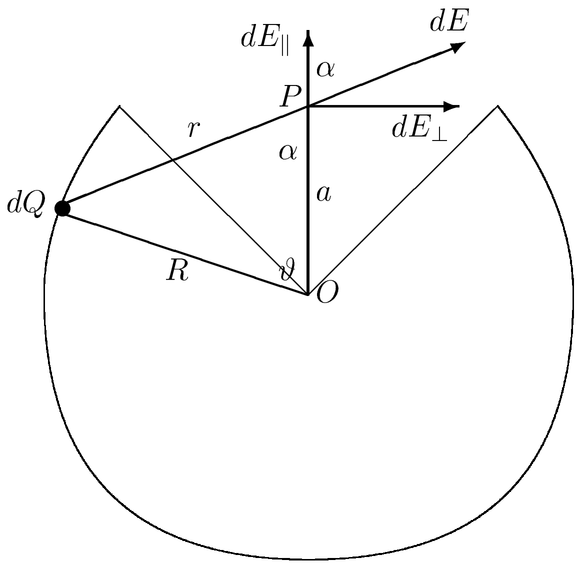
$$E(a) = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra} - \frac{2a^2 - \sqrt{2}Ra}{2\sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}} - R}{a^2}$$

Wählt man nun für $a = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, so folgt

$$E(\tfrac{\sqrt{2}}{2}R) = -\frac{\sigma R}{2\epsilon_0} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{2}R^2 + R^2 - R^2} - \frac{\overbrace{R^2 - R^2}^{=0}}{2\sqrt{\frac{1}{2}R^2 + R^2 - R^2}} - R}{\frac{1}{2}R^2} = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}R - R}{R^2}$$

$$E(\tfrac{\sqrt{2}}{2}R) = +\frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(1 - \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Alternative Lösung:



Es gilt mit dem Cosinussatz ($\vartheta\angle(a,\, R)$)
$r = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos\vartheta}$

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{aR\sin\vartheta}{r} \Rightarrow \sin\vartheta\, d\vartheta = \frac{r}{aR}$$

Mit den geometrischen Grenzen
$\vartheta_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow r_1 = \sqrt{a^2 + R^2 - \sqrt{2}Ra}$
$\vartheta_2 = \pi \Rightarrow r_2 = a + R$

Das differentielle Flächenelement dA ist
$dA = 2\pi R^2 \sin\vartheta\, d\vartheta = \dfrac{2\pi R}{a} r\, dr$

Die Ladung ist somit
$dQ = \sigma\, dA = \dfrac{2\pi R\sigma}{a} r\, dr$

Nur die Parallelkomponenten $dE_{\|}$ von dE sind zu berücksichtigen, die senkrechten Komponenten $dE_{\perp}$ heben sich gegenseitig auf.
$dE_{\|} = dE\cos\alpha$

Mit Hilfe des Cosinussatzes folgt ($\alpha\angle(a,\, r)$)

$$R^2 = a^2 + r^2 - 2ar\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a^2 - R^2 + r^2}{2ar}$$

Für die elektrische Feldstärke gilt

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\,dA = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R}{ar}\,dr$$

$$\Rightarrow dE_{\|} = dE\cos\alpha = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\frac{R}{ar}\cdot\frac{a^2 - R^2 + r^2}{2ar}\,dr = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{R}{a^2}\cdot\frac{a^2 - R^2 + r^2}{r^2}\,dr$$

$$dE_{\|} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{R}{a^2}\cdot\left(1 + \frac{a^2 - R^2}{r^2}\right)\,dr$$

Mit $a = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ folgt
$r_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}R$
$r_2 = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})R$
$r_2 - r_1 = R$
$r_2 \cdot r_1 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})R^2$

Dies alles eingesetzt liefert

$$dE_{\|} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{R}{\frac{1}{2}R^2}\cdot\left(1 - \frac{R^2}{2r^2}\right)\,dr = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{1}{R}\cdot\left(2 - \frac{R^2}{r^2}\right)\,dr$$

Aufintegriert erhält man

$$E_{\|} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{1}{R}\int\limits_{r=r_1}^{r_2}\left(2-\frac{R^2}{r^2}\right)dr = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{1}{R}\left[2r+\frac{R^2}{r}\right]_{r=r_1}^{r_2}$$

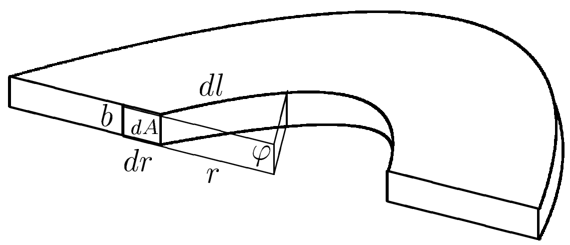
$$E_{\|} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{1}{R}\left(2(r_2-r_1)+\frac{R^2}{r_2}-\frac{R^2}{r_1}\right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{1}{R}\left(2(r_2-r_1)-\frac{R^2(r_2-r_1)}{r_1\cdot r_2}\right)$$

$$E_{\|} = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{r_2-r_1}{R}\left(2-\frac{R^2}{r_1\cdot r_2}\right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\frac{R}{R}\left(2-\frac{R^2}{\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})R^2}\right) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}\left(2-\frac{2}{1+\sqrt{2}}\right)$$

$$E_{\|} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1-\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left(1+1-\sqrt{2}\right)$$

$$E_{\|} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Lösung zu Aufgabe 14:



Diese Geometrie ergibt
$dA = b\,dr$ und $dl = r\,d\varphi$

Für den Widerstand gilt
$R = \rho \dfrac{l}{A}$

Differentiell
$R\,dA = \rho\,dl$

Alle geometrischen Bedingungen eingesetzt
$Rb\,dr = \rho r\,d\varphi$
$Rb\dfrac{1}{r}\,dr = \rho\,d\varphi$

Die geometrischen Grenzen sind
$r_1 \leq r \leq r_2$
$0 \leq \varphi \leq \pi$

Die Gleichung integriert liefert

$$Rb \int\limits_{r=r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\,dr = \rho \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} d\varphi$$

$$Rb\,[\ln r]_{r=r_1}^{r_2} = \rho\,[\varphi]_{\varphi=0}^{\pi}$$

$$R = \frac{\rho\pi}{b\ln\frac{r_1}{r_2}} = 0,136\,\Omega$$

Lösung zu Aufgabe 15:

Es gilt allgemein $P = U \cdot I$ und $U = R \cdot I$, daraus folgt

$$P = \frac{U^2}{R} \Rightarrow R = \frac{U^2}{P}$$

Ferner gilt für den Widerstand R des Graphits

$$R = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$$

Differentiell formuliert

$$R\,dA = \frac{1}{\sigma}\,dl$$

Für die Kugelschale gilt

$$dA = 2\pi r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta$$
$$dl = dr$$
$$r_{\mathrm{Cu}} \leq r \leq r_i$$
$$0 \leq \vartheta \leq \pi$$

Dies eingesetzt liefert

$$R 2\pi r^2 \sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{\sigma}\,dr$$

$$R\sigma 2\pi \int_{\vartheta=0}^{\pi} \sin\vartheta\,d\vartheta = \int_{r=r_{\mathrm{Cu}}}^{r_i} \frac{1}{r^2}\,dr$$

$$R\sigma 2\pi \left[-\cos\vartheta\right]_{\vartheta=0}^{\pi} = \left[-\frac{1}{r}\right]_{r=r_{\mathrm{Cu}}}^{r_i}$$

$$R\sigma 4\pi = \frac{1}{r_{\mathrm{Cu}}} - \frac{1}{r_i} \Rightarrow R = \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{Cu}}} - \frac{1}{r_i}\right)$$

Folgende Ungleichung muss gelten

$$\frac{U^2}{P_2} \leq R \leq \frac{U^2}{P_1}$$

$$\frac{U^2}{P_2} \leq \frac{1}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r_{\mathrm{Cu}}} - \frac{1}{r_i}\right) \leq \frac{U^2}{P_1}$$

$$\frac{U^2}{P_2}4\pi\sigma \leq \frac{1}{r_{\mathrm{Cu}}} - \frac{1}{r_i} \leq \frac{U^2}{P_1}4\pi\sigma$$

$$\frac{U^2}{P_2}4\pi\sigma + \frac{1}{r_i} \leq \frac{1}{r_{\mathrm{Cu}}} \leq \frac{U^2}{P_1}4\pi\sigma + \frac{1}{r_i}$$

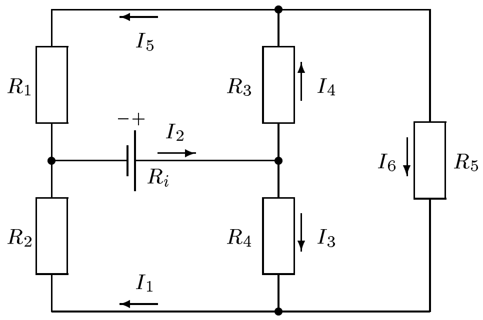
$$3869,9\,\frac{1}{\mathrm{m}} \leq \frac{1}{r_{\mathrm{Cu}}} \leq 7639,8\,\frac{1}{\mathrm{m}}$$

$$2,58 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m} \geq r_{\mathrm{Cu}} \geq 1,31 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$$

Hiermit folgt für die Grenzen des Radius der inneren Kupferelektrode

$$0,13\,\mathrm{mm} \leq r_{\mathrm{Cu}} \leq 0,26\,\mathrm{mm}$$

Lösung zu Aufgabe 16:



Mit Hilfe des Knotensatzes folgen folgende 4 Gleichungen
$I_1 - I_2 + I_5 = 0$
$I_4 - I_5 - I_6 = 0$
$I_2 - I_3 - I_4 = 0$
$-I_1 + I_3 + I_6 = 0$

Mit Hilfe des Maschensatzes folgen folgende 3 Gleichungen
$R_i I_2 + R_3 I_4 + R_1 I_5 = U_{\text{EMK}}$
$R_2 I_1 + R_i I_2 + R_4 I_3 = U_{\text{EMK}}$
$-R_4 I_3 + R_3 I_4 + R_5 I_6 = 0$

Ersetzt man alle Widerstände durch ihre gegebenen Größen so löst sich das LGS

$$I_1 = \frac{15}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}}}{\Omega},\ I_2 = \frac{41}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}}}{\Omega},\ I_3 = \frac{17}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}}}{\Omega},$$

$$I_4 = \frac{24}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}}}{\Omega},\ I_5 = \frac{26}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}}}{\Omega},\ I_6 = -\frac{2}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}}}{\Omega}$$

Die am jeweiligen Widerstand anfallende Leistung ist $P = RI^2$ darf nicht größer sein als $P = 1\,\text{W}$

Das bedeutet für die Stromstärke $I = \dfrac{U_{\text{EMK}}}{\Omega} = \sqrt{\dfrac{P}{R}}$ und somit für die Spannung

$$U_{\text{EMK}} = \Omega\sqrt{\frac{\text{P}}{\text{R}}}$$

$U_{\text{EMK}_1} = 6,55\,\text{V}$, $U_{\text{EMK}_2} = 3,39\,\text{V}$, $U_{\text{EMK}_3} = 4,08\,\text{V}$
$\underline{U_{\text{EMK}_4} = 3,34\,\text{V}}$, $U_{\text{EMK}_5} = 5,35\,\text{V}$, $U_{\text{EMK}_6} = 49,14\,\text{V}$

Die größt mögliche Leerlaufspannung, bei der kein Leistungsverlust $P = 1\,\text{W}$ übersteigt ist $U_{\text{EMK}_4} = 3,34\,\text{V}$

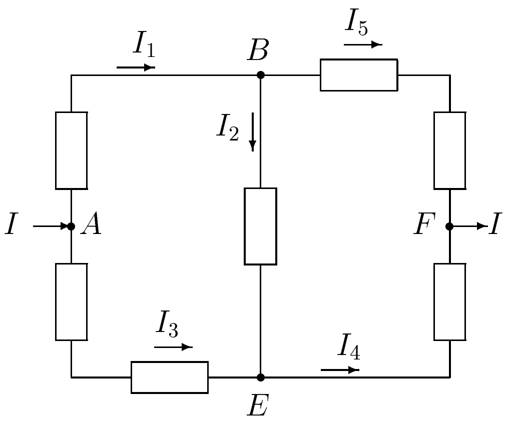
Durch den Innenwiderstand R_i fließt der Strom I_2, der jetzt folgende Größe besitzt

$$I_2 = \frac{41}{139} \cdot \frac{U_{\text{EMK}_4}}{\Omega} = 0,985\,\text{A}$$

Die Klemmenspannung ist somit
$U_{\text{Kl}} = U_{\text{EMK}_4} - R_i I_2 = 2,357\,\text{V}$

Die Verlustleistung im Innenwiderstand R_i ist
$P_i = R_i I_2^2 = 0,97\,\text{W}$

Lösung zu Aufgabe 17:



Mit Hilfe des Knotensatzes folgen folgende 4 Gleichungen
$I_1 + I_3 = I$
$I_1 - I_2 + I_5 = 0$
$I_2 + I_3 I_4 = 0$
$I_4 + I_5 = I$

Mit Hilfe des Maschensatzes folgen folgende 2 Gleichungen
$RI_1 + RI_2 - 2RI_3 = 0 \Leftrightarrow I_1 + I_2 - 2I_3 = 0$
$-RI_2 - RI_4 + 2RI_5 = 0 \Leftrightarrow -I_2 - I_4 + 2I_5 = 0$

Dieses LGS gelöst liefert
$I_1 = \frac{3}{5}I,\ I_2 = \frac{1}{5}I,\ I_3 = \frac{2}{5}I,\ I_4 = \frac{3}{5}I,\ I_5 = \frac{2}{5}I$

Der Strom zwischen B und E ist somit
$I_{BE} = I_2 = \frac{1}{5}I$

Eine Hilfsmasche zwischen A und F, die den Knoten E einschließt, liefert den Gesamtwiderstand R_{ges}
$U = R_{\text{ges}}I = 2RI_3 + RI_4 = \frac{7}{5}RI$
$\Rightarrow R_{\text{ges}} = \frac{7}{5}R$

Die elektrische Leistung ist $P = RI^2$

Die Leistung zwischen B und E ist somit
$P_{BE} = RI_2^2 = \frac{1}{25}RI^2$

Die Gesamtleistung ist
$P_{\text{ges}} = R_{\text{ges}}I^2 = \frac{7}{5}RI^2$

Der Prozentsatz f ist

$$f = \frac{P_{BE}}{P_{\text{ges}}} = \frac{\frac{1}{25}RI^2}{\frac{7}{5}RI^2} = \frac{1}{35} = 2{,}86\,\%$$