Aufgabensammlung Theoretische Mechanik

Jürgen Gilg[1]
Austr. 59
70376 Stuttgart

März 2003

[1]Tel.: 0711/59 27 88, E-Mail: gilligan01@worldonline.de

Aufgabe 1:

Ein punktförmiger Körper ($J = 0$) der Masse m gleitet von einer Kugeloberfläche mit dem Radius r reibungsfrei

a) aus der Ruhe heraus $v(\varphi = 0) = 0$

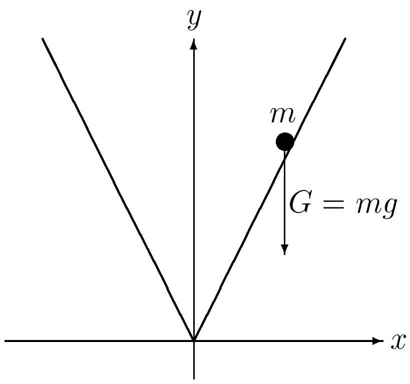
b) mit der Anfangsgeschwindigkeit $v(\varphi = 0) = v_0$.

φ sei der Winkel des Fahrstrahls mit der Vertikalen.
Bestimme im jeweiligen Fall den Winkel φ, bei dem sich der Körper ablöst.

Aufgabe 2:

Ein nicht punktförmiger Körper (Radius r^*) mit dem Massenträgheitsmoment J und der Masse m rollt von einer Kugeloberfläche mit dem Radius r aus der Ruhe heraus $v(\varphi = 0) = 0$ ohne zu gleiten ab.
φ sei der Winkel des Fahrstrahls mit der Vertikalen.
Bestimme den Winkel φ, bei dem sich der Körper ablöst.

Aufgabe 3:



Ein Massenpunkt (Masse m) gleitet reibungsfrei an der Innenseite eines auf der Spitze stehenden Kreiskegels mit dem Öffnungswinkel 2α (siehe Skizze). Nach unten wirke die Schwerkraft $G = mg$.

a) Geben Sie die Zwangsbedingung sowie die Zahl der Freiheitsgrade an.

b) Geben Sie die Lagrange-Funktion L in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) an.

c) Wie lauten die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen für φ und z? Eliminieren Sie φ aus den Bewegungsgleichungen durch Einführung der z-Komponente L_z des Drehimpulses $\vec{L}$ bezüglich des Koordinatenursprungs. Wie lautet L_z als Funktion von der Zeit t?

d) Zeigen Sie, daß die Bewegungsgleichungen auch Kreisbahnen als Lösungen haben. Wie müssen die Anfangsbedingungen lauten, um solche Kreisbahnen zu realisieren?

e) Die Bewegungsgleichungen für z können Sie für kleine Höhenschwankungen $z(t) = z_0 + \zeta(t)$ mit $\zeta(t) \ll z_0$ näherungsweise lösen, indem Sie z^{-3} um z_0 entwickeln und nach dem Linearglied abbrechen. Wie lautet diese Lösung?

Hinweis:
$(1 + x)^3 = 1 - 3x + \ldots$ für $x < 1$

Aufgabe 4:

Eine Hohlkugel der Masse m, dem Radius r und dem Trägheitsmoment $J = \frac{2}{3}mr^2$ wird mit der Kreisfrequenz ω (im Uhrzeigersinn) in Rotation um eine horizontale Achse versetzt und anschließend auf eine horizontale Unterlage mit der Gleitreibungszahl μ so aufgesetzt, daß ihr Schwerpunkt ruht: $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega$
In der Entfernung $r + b$ vom Aufsetzpunkt befindet sich eine starre Wand, welche die Kugel im Falle eines Stoßes ideal reflektiert: $\vec{v}(t) \to -\vec{v}(t)$, $\omega(t) \to \omega(t)$
Zwischen der Wand und der Kugel soll aber keine Reibung existieren, d.h. die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}(t)$ bleibt bei einem Wandkontakt stetig.

In welcher Entfernung b von der Wand muß die Kugel aufgesetzt werden, damit sie nach dem Stoß gegen die Wand wieder zur Ruhe kommt?

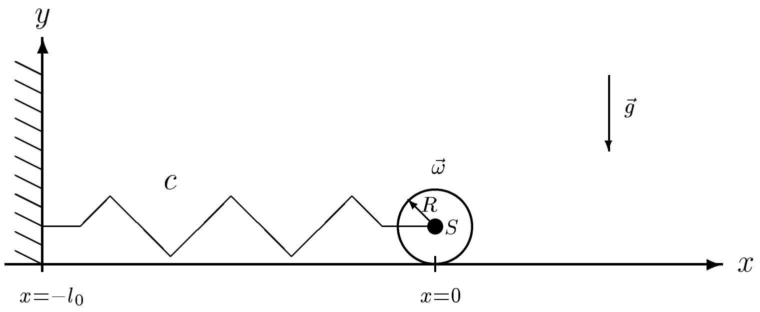
a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Kugel für die Gleitphase mit Hilfe des Impuls- und Drehimpuls-Satzes auf.
Können Sie aus den Bewegungsgleichungen eine Konstante der Bewegung ableiten?

b) Wie sieht die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen von Aufgabenteil a) aus?
Bestimmen Sie die Integrationskonstanten auf Grund der vorgegebenen Anfangsbedingungen: $x(0) = -b$, $\dot{x}(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega$

c) Zunächst nehmen wir an, daß die Kugel in den Rollzustand übergeht, bevor sie mit der Wand Kontakt aufnimmt.
Zu welchem Zeitpunkt τ kommt die Kugel ins Rollen?
Die Abrollbedingung lautet: $\dot{x}(\tau) = r\dot{\varphi}(\tau)$
Welche Wegstrecke s hat sie bis zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt?
Mit welcher Schwerpunktsgeschwindigkeit v rollt die Kugel weiter?
Wieviel Prozent der Anfangsenergie E_0 sind durch die Rollreibung aufgezehrt worden?
Stimmt der Energieverlust $\Delta E = E(\tau) - E_0$ mit der Arbeit $\Delta Q = \int_0^\tau F_R v_r(t)\,dt$ der Reibungskraft F_R überein, wenn $v_r(t)$ hierbei die Relativgeschwindigkeit zwischen Kugelauffläche und Auflagefläche ist?

d) Ist es möglich, daß die Kugel nach einem Stoß gegen die Wand wieder zur Ruhe kommt, falls sie vor dem Stoß in den Rollzustand übergegangen ist? Untersuchen Sie hierbei die Bewegungskonstante von Aufgabenteil a).
Zu welchem Zeitpunkt t' muß der Stoß gegen die Wand erfolgen, damit die Kugel später wieder zur Ruhe kommen kann?
Wieviel Zeit t^* vergeht zwischen dem anfänglichen und endgültigen Ruhezustand?
Wie groß muß der anfängliche Wandabstand b sein?
In welchem Abstand c von der Wand bleibt die Kugel schließlich liegen?

Aufgabe 5:



Eine mit der Winkelgeschwindigkeit ω (im Uhrzeigersinn) rotierende homogene zylindrische Walze wird behutsam auf eine horizontale Ebene ($y = 0$) aufgesetzt, so daß ihre Drehachse S stets parallel zur z-Achse bleibt (eindimensionales Problem).

Für die Translation der Walzenachse gilt somit:
$x_S(0) = 0$, $y_S(0) = R = \text{const.}$,
$\dot{x}_S(0) = 0$, $\dot{y}_S(0) = 0 = \text{const.}$,
für die Rotation um die Walzenachse gilt somit:
$\varphi(0) = 0$,
$\dot{\varphi}(0) = \omega$

An ihren überstehenden Enden ist die masselose, reibungsfrei gelagerte Drehachse S mit zwei parallelgeschalteten masselosen Federn der jeweiligen Federkonstanten $\frac{c}{2}$ und der jeweiligen Ruhelänge l_0 verbunden. Die Federn sind ihrerseits an der Wand ($x = -l_0$) in der Höhe des Walzenradius ($y = R$) befestigt. Zu untersuchen ist der Übergang vom Gleitzustand in den Rollzustand (Gleitreibungszahl μ).

a) Geben Sie das Trägheitsmoment J der Walze bezüglich ihrer Drehachse S in Abhängigkeit von Masse M und Radius R an.

b) Zählen Sie alle auf die Walze wirkenden äußeren Kräfte auf, und schreiben Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Koordinate $x_S(t)$, $\dot{x}_S(t)$ der Walzenachse hin (Gleitphase). Ergänzen Sie diese Bewegungsgleichung durch den Drehimpulssatz für die Rotationsbewegung um die Walzenachse für die Koordinate $\varphi(t)$, $\dot{\varphi}(t)$.

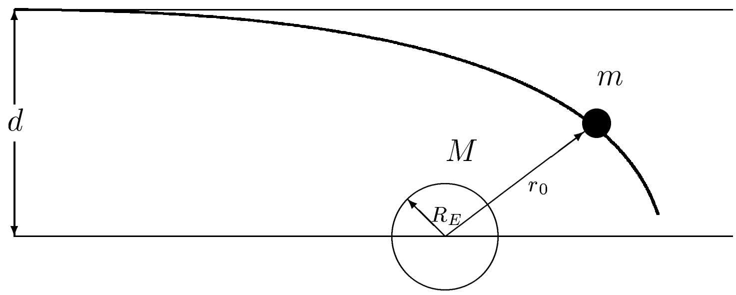
c) Integrieren Sie die Bewegungsgleichungen für den anfänglichen Gleitzustand unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen.

d) Die Walze möge spätestens beim ersten Umkehrpunkt in den Rollzustand übergehen. Geben Sie die transzendente Gleichung (samt graphischem Lösungsverfahren) für den Zeitpunkt τ an, bei dem zum ersten Mal das Rollen auftritt. Wie groß darf die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $\hat{\omega}$ höchstens sein, damit das Rollen spätestens am ersten Umkehrpunkt auftritt?

e) Kann man sicher sein, daß die Walze während des Zurückrollens nach dem ersten Umkehrpunkt nicht wieder ins Gleiten kommt?

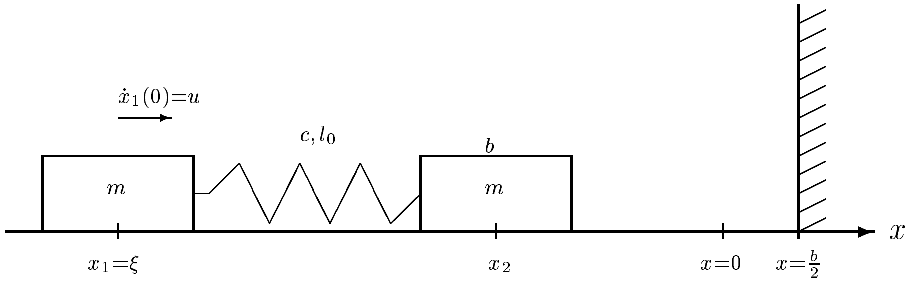
f) Welcher Bruchteil f der anfänglichen Energie E_0 geht durch Reibung während der Gleitphase dem mechanischen System verloren, falls der Übergang ins Rollen genau beim ersten Umkehrpunkt stattfindet?

Aufgabe 6:



Ein Meteor (Masse m) nähert sich aus dem Unendlichen kommend mit der Geschwindigkeit v_∞ der Erde (Masse M, Erdradius R_E) und würde bei fehlender Erdanziehungskraft im Abstand $d \gg R_E$ an der Erde vorbeifliegen. Auf Grund der Gravitationskraft der Erde krümmt sich die Bahn zur Erde hin. Beantworten Sie die Frage, ob der Meteor an der Erde vorbeifliegt oder auf der Erde aufschlägt. Berechnen Sie dazu die Bahndaten (r_0, v_0) zum Zeitpunkt t_0 des minimalen Erdabstands in Abhängigkeit der Anfangsdaten (d, v_∞).

Aufgabe 7:



Zwei Massenpunkte gleicher Masse m und der Länge b sind durch eine Feder mit der Federkonstanten c und der Ruhelänge l_0 verbunden und können sich reibungsfrei längs der x-Achse bewegen. Falls der rechte Massenpunkt gegen die starre Wand $x = 0$ stößt, soll er dort ideal reflektiert werden (d.h. $\dot{x}_2 \to -\dot{x}_2$).

a) Geben Sie für das aus den beiden Massenpunkten und der Feder bestehende System die Lagrange-Funktion $L = L(x_j, \dot{x}_j)$ mit $j = 1, 2$ an, und leiten Sie daraus die Bewegungsgleichungen für die Einzelkoordinaten x_j ab. Wie sehen die Lagrange-Funktion und die Bewegungsgleichungen bezüglich der Schwerpunktsvariablen $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und des Relativabstands $a = x_2 - x_1$ aus? Geben Sie die allgemeine Lösung für beide Variablensätze an.

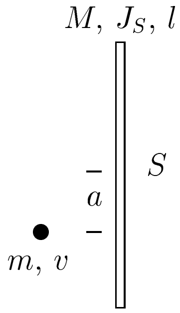
b) Nun setzen wir das System in Richtung auf die Wand zu durch einen Schlag auf die linke Masse in Bewegung.
$x_1(0) = \xi$, $\dot{x}_1(0) = u$, $x_2(0) = \xi + l_0$, $\dot{x}_2(0) = 0$
Bestimmen Sie für diese spezielle Anfangsbedingungen die Integrationskonstanten in den allgemeinen Lösungen von Aufgabenteil a). Skizzieren Sie die Geschwindigkeiten $\dot{x}_1(t)$, $\dot{x}_2(t)$ der beiden Massenpunkte für den Bewegungsabschnitt vor einem Zusammenstoß mit der starren Wand. Wie groß darf die Anfangsgeschwindigkeit u höchstens sein, damit die Massenpunkte nicht zusammenstoßen, bevor Sie die Wand erreichen. Im folgenden sollen einige spezielle Stoßsituationen untersucht werden:

c) Wir betrachten zuerst denjenigen Stoßprozeß (I), bei dem der rechte Massenpunkt während der gesamten Stoßdauer $T_I > 0$ mit der Wand in Kontakt bleibt. (die Stoßdauer ist diejenige Zeit, die zwischen dem ersten (t_1) und dem letzten (t_2) Wandkontakt der rechten Masse verstreicht: $T_I = t_2 - t_1$
Wie groß muß in diesem Fall die Stoßgeschwindigkeit $\dot{x}_2(t_1)$ sein? Geben Sie das Weg-Zeit-Gesetz $x_I(t)$ des Schwerpunktes für das Zeitintervall $t_1 \leq t \leq t_2$ an (Skizze). Wie groß ist hierbei die Stoßdauer T_I?

d) Untersuchen Sie ebenso denjenigen Stoßprozeß (II), bei dem der Schwerpunkt nach dem ersten Wandkontakt (t_1) zur Ruhe kommt und die gesamte Stoßdauer T_{II} in Ruhe bleibt: $\dot{x}_{II}(t_1 \leq t \leq t_2) = 0$ Geben Sie das Weg-Zeit-Gesetz $a_{II}(t)$ für den Relativabstand für das Zeitintervall
$t_1 \leq t \leq t_2$ an (Skizze). Wie groß ist hierbei die Stoßdauer T_{II}?

e) Halten Sie einen Stoßprozeß (III) für möglich, bei dem der Schwerpunkt ideal reflektiert wird ($\dot{x}(t_1^-) \to -\dot{x}(t_1^+)$), ohne daß sich die beiden Massenpunkte berühren? Falls ja, berechnen Sie die zugehörigen Weg-Zeit-Gesetze $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für die jeweiligen Massen vor dem Stoß.

Aufgabe 8:



Eine punktförmige Kugel der Masse m stößt mit der Geschwindigkeit v senkrecht im Abstand a vom Schwerpunkt S eines in Ruhe befindlichen Bleistifts der Masse M, der Länge l und mit dem Trägheitsmoment $J_S = \frac{1}{12}Ml^2$. Dieser Stoß findet völlig elastisch statt. Nach dem Stoß bewege sich die Kugel mit der Geschwindigkeit u weiter, der Bleistift mit der Schwerpunktsgeschwindigkeit v_S und der Winkelgeschwindigkeit ω um den Schwerpunkt.

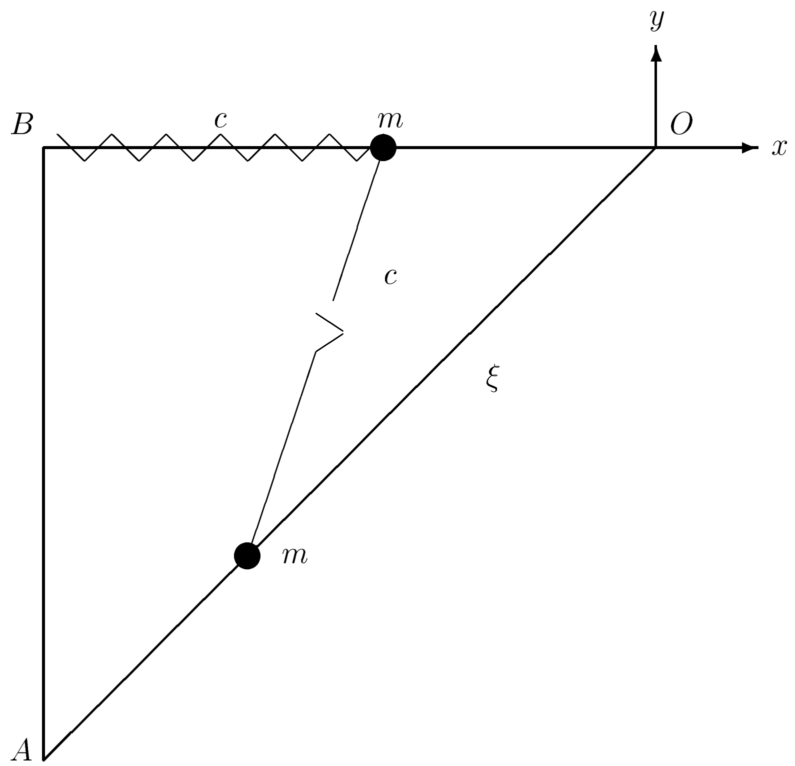
a) Warum gelten hier Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz?

b) Berechne $v_S(a)$, $\omega(a)$, $u(a)$ für $0 \leq a \leq \frac{l}{2}$. Gib eine übersichtliche Darstellung mit Hilfe des Massenverhältnisses $\mu = \frac{M}{m}$ an und skizziere die Funktionen $v_S(a)$, $\omega(a)$, $u(a)$.

c) Für welches $0 \leq a_{v_S} \leq \frac{l}{2}$ wird v_S maximal und wie groß ist die maximale Schwerpunktsgeschwindigkeit $v_{S_{max}}$? Für welches $0 \leq a_\omega \leq \frac{l}{2}$ wird ω maximal und wie groß ist die maximale Winkelgeschwindigkeit ω_{max}? Für welches $0 \leq a_u \leq \frac{l}{2}$ kommt die stoßende Kugel nach dem Stoß zur Ruhe?

d) Wie muß das Massenverhältnis μ_ω gewählt werden, damit ω am Rand $a_R = \frac{l}{2}$ maximal wird? Wie muß das Massenverhältnis μ_u gewählt werden, damit u am Rand $a_R = \frac{l}{2}$ null wird?

Aufgabe 9:



Drei starre Schienen bilden ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck AOB derart, daß die eine Seite $\overline{AB} = a$ parallel zum homogenen Gravitationsfeld $\vec{g}$ der Erde ist. Längs der beiden Schienen $\overline{OA}$ und $\overline{OB} = a$ bewegt sich jeweils eine Punktmasse m reibungsfrei. Die horizontal verschiebbare Masse ist mit Hilfe einer Feder c an den Eckpunkt B und außerdem über eine identische Feder an die andere Masse gekoppelt. Die Federkonstante sei c, die Federlänge im ungedehnten Zustand verschwindet, das Federmaterial ist als masselos anzusehen.

a) Wieviele Freiheitsgrade hat das System? Welche Kräfte wirken auf jeden der beiden Massenpunkte? Wie sieht das System der gekoppelten Bewegungsgleichungen in vektorieller Form aus?
$m\ddot{x} = A_{11}x + A_{12}\xi + B_1$
$m\ddot{\xi} = A_{21}x + A_{22}\xi + B_2$
Bestimmen Sie die hier auftretenden Koeffizienten A_{ik} und B_i.

b) Leiten Sie aus der in a) gefundenen Form der Bewegungsgleichungen den Energieerhaltungssatz
$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{\xi}^2) + V(x,\, \xi) = \text{const.}$
ab und bestimmen Sie das Potential $V(x,\, \xi)$.

c) Bestimmen Sie die Ruhelagen $\hat{x}$ und $\hat{\xi}$ der beiden Massenpunkte. Führen Sie die beiden Abweichungen $\tilde{x}$ und $\tilde{\xi}$ von den Ruhelagen in die Bewegungsgleichung ein. Welches Gleichungssystem für $\tilde{x}$ und $\tilde{\xi}$ erhalten Sie?

d) Zeigen Sie, daß sich die Frequenzen der Eigenschwingungen des mechanischen Systems aus dem Eigenwertproblem der in a) angegebenen Matrix
$\underline{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$
ergeben und bestimmen Sie diese Frequenzen und Phasenverhältnisse.

Lösung zu Aufgabe 1:

a_1) Mit dem Energieerhaltungssatz

Die Höhendifferenz zwischen dem Anfangszustand und dem Ablösepunkt ist $\Delta h = r(1 - \cos\varphi)$ und die Ablösegeschwindigkeit bezeichnen wir mit v_A.
Die Ablösung erfolgt dann, wenn die Anpresskraft N, also die Differenz zwischen Zentrifugalkraft F_Z und Normalkraft F_N, null wird.

$F_Z - F_N = 0$ mit $F_Z = m\frac{v_A^2}{r}$ und $F_N = mg\cos\varphi$

Hieraus folgt:
(1) $\quad v_A^2 = rg\cos\varphi$

Der Energieerhaltungssatz liefert:
(2) $\quad mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_A^2$

(1) in (2) eingesetzt und umgeformt liefert: $\cos\varphi = \frac{2}{3}$

a_2) Mit Polarkoordinaten

Die Ablösung erfolgt dann, wenn die Anpresskraft N, also die Differenz zwischen Zentrifugalkraft F_Z und Normalkraft F_N, null wird.
$F_Z - F_N = 0$ mit $F_Z = mr\dot{\varphi}^2$ und $F_N = mg\cos\varphi$

Hieraus folgt:
(1) $\quad \dot{\varphi}^2 = \frac{g}{r}\cos\varphi$

Die Hangabtriebskraft F_H hält der Trägheitskraft F_T das Gleichgewicht und mit der Bahngeschwindigkeit $v = r\dot{\varphi}$ liefert das die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(\varphi = 0) = 0$

$F_H = T_T$ mit $F_H = mg\sin\varphi$ und $F_T = mr\ddot{\varphi}$

Hieraus folgt:
(2) $\quad \ddot{\varphi} = \frac{g}{r}\sin\varphi$

Multiplikation der Gleichung (2) mit $\dot{\varphi}$ und anschließende Integration liefert:

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi} \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\, d\varphi = \frac{g}{r}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi} \dot{\varphi}\sin\varphi\, d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\Big|_0^{\varphi} = -\frac{g}{r}\cos\varphi\Big|_0^{\varphi}$$

$$\dot{\varphi}^2 = -2\frac{g}{r}(\cos\varphi - 1)$$

Dies in (1) eingesetzt und umgeformt liefert: $\cos\varphi = \frac{2}{3}$

b_1) Mit dem Energieerhaltungssatz

Die Höhendifferenz zwischen dem Anfangszustand und dem Ablösepunkt ist $\Delta h = r(1 - \cos\varphi)$ und die Ablösegeschwindigkeit bezeichnen wir mit v_A.
Die Ablösung erfolgt dann, wenn die Anpresskraft N, also die Differenz zwischen Zentrifugalkraft F_Z und Normalkraft F_N, null wird.

$F_Z - F_N = 0$ mit $F_Z = m\frac{v_A^2}{r}$ und $F_N = mg\cos\varphi$

Hieraus folgt:
(1) $v_A^2 = rg\cos\varphi$

Der Energieerhaltungssatz liefert:
(2) $\frac{1}{2}mv_0^2 + mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_A^2$

(1) in (2) eingesetzt und umgeformt liefert: $\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3rg} > \frac{2}{3}$, also löst sich der Körper früher ab, als beim Gleiten aus der Ruhe heraus.

b_2) Mit Polarkoordinaten
Die Ablösung erfolgt dann, wenn die Anpresskraft N, also die Differenz zwischen Zentrifugalkraft F_Z und Normalkraft F_N, null wird.

$F_Z - F_N = 0$ mit $F_Z = mr\dot{\varphi}^2$ und $F_N = mg\cos\varphi$

Hieraus folgt:
(1) $\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{r}\cos\varphi$

Die Hangabtriebskraft F_H hält der Trägheitskraft F_T das Gleichgewicht und mit der Bahngeschwindigkeit $v = r\dot{\varphi}$ liefert das die Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(\varphi = 0) = \frac{v_0}{r}$

$F_H = T_T$ mit $F_H = mg\sin\varphi$ und $F_T = mr\ddot{\varphi}$

Hieraus folgt:
(2) $\ddot{\varphi} = \frac{g}{r}\sin\varphi$

Multiplikation der Gleichung (2) mit $\dot{\varphi}$ und anschließende Integration liefert:

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi} \dot{\varphi}\ddot{\varphi}\,d\varphi = \frac{g}{r}\int\limits_{\varphi=0}^{\varphi} \dot{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi$$

$$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\big|_0^{\varphi} = -\frac{g}{r}\cos\varphi\big|_0^{\varphi}$$

$$\dot{\varphi}^2 - \frac{v_0^2}{r^2} = -2\frac{g}{r}(\cos\varphi - 1)$$

$$\dot{\varphi}^2 = -2\frac{g}{r}(\cos\varphi - 1) + \frac{v_0^2}{r^2}$$

Dies in (1) eingesetzt und umgeformt liefert: $\cos\varphi = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3rg} > \frac{2}{3}$, also löst sich der Körper früher ab, als beim Gleiten aus der Ruhe heraus.

Lösung zu Aufgabe 2:

Mit dem Energieerhaltungssatz
Die Höhendifferenz zwischen dem Anfangszustand und dem Ablösepunkt ist $\Delta h = r(1-\cos\varphi)$ und die Ablösegeschwindigkeit bezeichnen wir mit v_A.
Die Ablösung erfolgt dann, wenn die Anpresskraft N, also die Differenz zwischen Zentrifugalkraft F_Z und Normalkraft F_N, null wird.

$F_Z - F_N = 0$ mit $F_Z = m\frac{v_A^2}{r}$ und $F_N = mg\cos\varphi$

Hieraus folgt:
(1) $v_A^2 = rg\cos\varphi$ und die Abrollbedingung $\omega = \frac{v_A}{r^*}$

Der Energieerhaltungssatz liefert:
(2) $mg\Delta h = \frac{1}{2}mv_A^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$

(1) in (2) eingesetzt liefert:

$mgr(1-\cos\varphi) = \frac{1}{2}(m + \frac{J}{r^{*2}})rg\cos\varphi$

Umgeformt erhält man: $\cos\varphi = \frac{2}{3+\frac{J}{mr^{*2}}} < \frac{2}{3}$, der Körper löst sich also später ab als beim Gleiten aus der Ruhe heraus.

Lösung zu Aufgabe 3:

a) Es gibt genau eine Zwangsbedingung:
$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = z \cdot \tan\alpha$

Ein Massenpunkt besitzt 3 Freiheitsgrade, somit verbleiben 2 Freiheitsgrade.

b) Einführung von Zylinderkoordinaten:
$r_x = x = \rho\cos\varphi = z\tan\alpha\cos\varphi$
$r_y = y = \rho\sin\varphi = z\tan\alpha\sin\varphi$
$r_z = z = z \geq 0$

$v_x = \dot{x} = \tan\alpha(\dot{z}\cos\varphi - z\dot{\varphi}\sin\varphi)$
$v_y = \dot{y} = \tan\alpha(\dot{z}\sin\varphi + z\dot{\varphi}\cos\varphi)$
$v_z = \dot{z} = \dot{z}$

Hieraus folgt die Lagrangefunktion:
$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz$

In Zylinderkoordinaten:
$L = \frac{1}{2}m[\dot{z}^2(1 + \tan^2\alpha) + z^2\dot{\varphi}^2\tan^2\alpha] - mgz$

c) Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mz^2\dot{\varphi}\tan^2\alpha \qquad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{dt}(mz^2\dot{\varphi}\tan^2\alpha) = 0$$

$$m\tan^2\alpha(z^2\ddot{\varphi} + 2z\dot{z}\dot{\varphi}) = 0 \qquad [1]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}(1 + \tan^2\alpha) \qquad \frac{\partial L}{\partial z} = mz\dot{\varphi}^2\tan^2\alpha - mg$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial L}{\partial z} = m\ddot{z}(1 + \tan^2\alpha) - mz\dot{\varphi}^2\tan^2\alpha + mg = 0 \qquad [2]$$

Die z-Komponente des Drehimpulses ist mit dem Kreuzprodukt $\vec{L} = m(\vec{r} \times \vec{v})$ bezogen auf den Koordinatenursprung:
$L_z = m(r_x v_y - r_y v_x) = mz^2\dot{\varphi}\tan^2\alpha$

Hiermit folgt für [1]
$$\frac{d}{dt}(mz^2\dot{\varphi}\tan^2\alpha) = \frac{d}{dt}(L_z) = 0 \Rightarrow L_z = \text{const.}$$
Dies ist die Drehimpulserhaltung.

Dies in Gleichung [2] eingesetzt:
$$\ddot{z}(1 + \tan^2\alpha) - \frac{L_z^2}{mz^3\tan^2\alpha} + g = 0 \qquad [2a]$$

d) Kreisbahn als Lösung fordert: $z = z_0 = \text{const.} \Rightarrow \dot{z} = \ddot{z} = 0$

Aus [1] wird somit:

$z_0\ddot{\varphi} = 0$

$\Rightarrow \dot{\varphi} = \omega = \omega_0 = \text{const.}$

$\Rightarrow \varphi = \omega_0 t + \omega_0$

Aus [2] wird somit:

$z_0\dot{\varphi}^2 \tan^2\alpha = g$ mit obigem Resultat

$$\Rightarrow z_0 = \frac{g}{\omega_0^2 \tan^2\alpha} = \sqrt[3]{\frac{L_z^2}{m^2 g \tan^2\alpha}}$$

Dies bedeutet eine Kreisbahn mit dem Radius $\rho_0 = z_0 \tan\alpha = \dfrac{g}{\omega_0^2 \tan\alpha}$ in der Höhe z_0 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0.

e) Kleine Auslenkungen der Höhe um z_0:

$z(t) = z_0 + \zeta(t)$

$\Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{\zeta}(t) \quad \Rightarrow \ddot{z}(t) = \ddot{\zeta}(t)$

Dies in $[2a]$ eingesetzt:

$$\ddot{\zeta}(1 + \tan^2\alpha) - \frac{L_z^2}{m z_0^3 \tan^2\alpha} \frac{1}{(1 + \frac{\zeta}{z_0})^3} + g = 0$$

Die Entwicklung: $(1 + \frac{\zeta}{z_0})^{-3} \approx 1 - 3\frac{\zeta}{z_0}$

Damit erhält man:

$$\ddot{\zeta}(1 + \tan^2\alpha) - \frac{L_z^2}{m z_0^3 \tan^2\alpha}(1 - 3\frac{\zeta}{z_0}) + g = 0$$

z_0 aus Aufgabenteil **d)** eingesetzt:

$$\ddot{\zeta}(1 + \tan^2\alpha) + (3\omega_0^2 \tan^2\alpha)\zeta = 0$$

$$\ddot{\zeta} + \left(3\omega_0^2 \frac{\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}\right)\zeta = 0 \text{ mit } \frac{\tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha} = \sin^2\alpha \text{ folgt:}$$

$$\ddot{\zeta} + (3\omega_0^2 \sin^2\alpha)\zeta = 0$$

Dies ist eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz $\Omega = \sqrt{3}\,\omega_0 \sin\alpha$

Es gilt also:

$\zeta(t) = \zeta_0 \sin(\Omega t + \beta_0)$ mit β_0 beliebige Anfangsphase

$z(t) = z_0 + \zeta_0 \sin(\Omega t + \beta_0)$

Dies ist eine harmonische Schwingung (Auf- und Abbewegung) um die Lage z_0 mit der Kreisfrequenz Ω.

Lösung zu Aufgabe 4:

a) Bewegungsgleichung der Kugel für die Gleitphase - die Kugel rollt noch nicht, d.h. die Kugeloberfläche haftet noch nicht an der Unterlage, reibt aber daran.

Impuls- und Drehimpulsänderung erfolgen nur durch die Reibungskraft $F_R = \mu mg$

Impulssatz:	(1)	$\dot{p} = m\ddot{x} = +F_R = +\mu mg$
Drehimpulssatz:	(2)	$\dot{L} = J\ddot{\varphi} = -rF_R = -\mu rmg$

Hieraus ergeben sich die Bewegungsgleichungen:
(3) $\ddot{x} = \mu g$
(4) $\ddot{\varphi} = -\frac{3\mu g}{2r}$

(1) $\cdot\, r +$ (2) liefert:
$r\dot{p} + \dot{L} = 0 \Rightarrow rp + L =$const.
Dies ist eine Bewegungskonstante.

b) Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung erhält man durch zweimaliges Integrieren nach der Zeit t der Gleichungen (3) und (4):
$x(t) = x(0) + \dot{x}(0) \cdot t + \frac{1}{2}\mu g t^2$
$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0) \cdot t - \frac{3\mu g}{4r} t^2$

Durch Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen erhält man die vollständigen Bewegungsgleichungen:
(5) $x(t) = -b + \frac{1}{2}\mu g t^2$
(6) $\varphi(t) = \omega t - \frac{3\mu g}{4r} t^2$ und
(5a) $\dot{x}(t) = \mu g t$
(6a) $\dot{\varphi}(t) = \omega - \frac{3\mu g}{2r} t$

c) Die Rollbedingung lautet: $\dot{x}(\tau) = r\dot{\varphi}(\tau)$
Mit (5a) und (6a) ergibt das:
$\mu g \tau = r\omega - \frac{3}{2}\mu g \tau \Rightarrow \tau = \frac{2r\omega}{5\mu g}$

Die zurückgelegte Wegstrecke s ergibt sich zu:
$s = x(\tau) - x(0) = \frac{1}{2}\mu g \tau^2 = \frac{2r^2\omega^2}{25\mu g}, \qquad \varphi(\tau) = \frac{7r\omega^2}{25\mu g}$
Die Schwerpunktsgeschwindigkeit ist dann:
$v = \dot{x}(\tau) = \mu g \tau = \frac{2}{5} r\omega, \qquad \dot{\varphi}(\tau) = \frac{2}{5}\omega$

Die Anfangsenergie ist: $E_0 = \frac{1}{2} J\omega^2 = \frac{1}{3} m r^2 \omega^2$
Die Energie zum Zeitpunkt des Rollbeginns ist:
$E(\tau) = \frac{1}{2} m\dot{x}(\tau)^2 + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}(\tau)^2 = \frac{1}{2}(m\dot{x}(\tau)^2 + \frac{2}{3} m r^2 \frac{\dot{x}(\tau)^2}{r^2}) = \frac{5}{6} m\dot{x}(\tau)^2 = \frac{2}{15} m r^2 \omega^2$
Die Energiedifferenz ist:
$\Delta E = E_0 - E(\tau) = \frac{1}{5} m r^2 \omega^2$
Der prozentuale Verlust ist: $\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{3}{5} = 60\,\%$

Die Relativgeschwindigkeit ergibt sich zu: $v_r(t) = r\dot{\varphi}(t) - \dot{x}(t)$
$\Delta Q = \int_0^\tau F_R v_r(t)\, dt = \int_0^\tau \mu m g (r\dot{\varphi}(t) - \dot{x}(t))\, dt$
$= \mu m g (r \int_0^\tau \dot{\varphi}(t)\, dt - \int_0^\tau \dot{x}(t)\, dt) = \mu m g (r \underbrace{\varphi(\tau)}_{=\frac{7r\omega^2}{25\mu g}} - r \underbrace{\varphi(0)}_{=0} - (\underbrace{x(\tau) - x(0)}_{=s})) = \ldots = \frac{1}{5} m r^2 \omega^2$

d) Abschließende Ruhelage der Kugel:

Falls die Kugel in den Rollzustand übergegangen ist, gilt: $\dot{x} = r\dot{\varphi}$
Eingesetzt in die Bewegungskonstante von Aufgabenteil a):
$rp + L = rm\dot{x} + J\dot{\varphi} = r^2m\dot{\varphi} + \frac{2}{3}r^2m\dot{\varphi} = \frac{5}{3}mr^2\dot{\varphi}$ =const.$\Rightarrow$ $\dot{\varphi}$ =const.
Die Kugel kann also nicht mehr zur Ruhe kommen, falls sie vor dem Stoß bereits rollt.

Der Stoß erfolgt zum Zeitpunkt $t = t'$ und es gelten folgende Reflexionsbedingungen:
$\omega(t'-0) = \omega(t'+0)$ keine Reibung an der Wand
$v(t'-0) = -v(t'+0)$ ideale Reflexion

Die Bewegung nach dem Stoß $(t > t')$ soll durch $x'(t)$ und $\varphi'(t)$ beschrieben werden. Der Stoß ändert also nichts an den Randbedingungen der Rotation. Die Rotation setzt sich ungestört fort. Sie wird lediglich durch die Reibung F_R am Boden beeinflußt, die jedoch auch nach dem Stoß mit Betrag und Vorzeichen gleich groß ist.
(7) $\varphi'(t) = \varphi(t) = \omega t - \frac{3\mu g}{4r}t^2$ für $t > t'$

Der Stoß setzt neue Randbedingungen für die Translation:
(a) $x'(t') = 0$, (b) $\dot{x}'(t') = -\dot{x}(t')$

Die Translation wird nach dem Stoß lediglich durch die unveränderte Reibung F_R beeinflußt, so daß weiterhin gilt: $\ddot{x}'(t) = \mu g$ für $t > t'$
Zweimalige Integration nach der Zeit t liefert:
(8a) $\dot{x}'(t) = C_1 + \mu g t$
(8b) $x'(t) = C_2 + C_1 t + \frac{1}{2}\mu g t^2$

Einsetzen der Randbedingungen:
(b) in (8a): $\dot{x}'(t') = C_1 + \mu g t' = -\dot{x}(t') = -\mu g t' \Rightarrow C_1 = -2\mu g t'$
(a) in (8b): $x'(t') = C_2 + C_1 t' + \frac{1}{2}\mu g t'^2 = 0$ mit $C_1 = -2\mu g t'$ folgt $C_2 = \frac{3}{2}\mu g t'^2$
und die Gleichung der Translation ergibt sich zu:
(8) $x'(t) = \frac{3}{2}\mu g t'^2 - 2\mu g t' t + \frac{1}{2}\mu g t^2$ für $t > t'$

Stillstand fordert: (c) $\dot{x}'(t^*) = 0$ $\wedge$ (d) $\dot{\varphi}'(t^*) = 0$
(c) liefert: $-2\mu g t' + \mu g t^* = 0 \Rightarrow t^* = 2t'$
(d) liefert: $\omega - \frac{3\mu g}{2r}t^* = 0 \Rightarrow t^* = \frac{2r\omega}{3\mu g}$

Der Stoß erfolgt also zum Zeitpunkt $t' = \frac{r\omega}{3\mu g}$ und der Stillstand zum Zeitpunkt $t^* = 2t'$

Die Startentfernung b erhält man aus der Bedingung:
$x(t') = 0 \Rightarrow -b + \frac{1}{2}\mu g t'^2 = 0 \Rightarrow b = \frac{r^2\omega^2}{18\mu g}$
Die Ruhelage c erhält man:
$c = x'(t^*) = x'(2t') = \frac{3}{2}\mu g t'^2 - 4\mu g t'^2 + 2\mu g t'^2 = -\frac{1}{2}\mu g t'^2 = -b = x(0)$

Die Kugel kommt an dem Punkt zum Stillstand, wo sie gestartet ist.

Lösung zu Aufgabe 5:

a) Das Massenträgheitsmoment eines homogenen Zylinders bezüglich seiner Symmetrieachse ist:
$J = \frac{1}{2}MR^2$

b) Für die Translationsbewegung der Achse S gilt:
$M\ddot{x}_S = \mu Mg - cx_S$
$\ddot{x}_S + \frac{c}{M}x_S = \mu g$

Für die Rotationsbewegung um die Achse S gilt:
$J\ddot{\varphi} = -\mu MgR$
$\ddot{\varphi} = -\frac{\mu MgR}{J}$
$\ddot{\varphi} = -\frac{2\mu g}{R}$

c) Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen für die Translation:
$\ddot{x}_S + \frac{c}{M}x_S = \mu g$ Inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung mit $\Omega = \sqrt{\frac{c}{M}}$
Die homogene Lösung ist:
$x_{S_{\text{hom}}}(t) = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t$
Der Ansatz für die partikuläre Lösung ist $x_{S_{\text{part}}} = A_3$:
Dies eingesetzt in die Differentialgleichung liefert:
$\frac{c}{M}A_3 = \mu g$
$\Rightarrow x_{S_{\text{part}}} = \frac{\mu Mg}{c}$

Die Lösung ist also:
$x_S(t) = x_{S_{\text{hom}}}(t) + x_{S_{\text{part}}}$
$x_S(t) = A_1 \sin \Omega t + A_2 \cos \Omega t + \frac{\mu Mg}{c}$
$\dot{x}_S(t) = A_1\Omega \cos \Omega t - A_2\Omega \sin \Omega t$

A_1 und A_2 sind über die Anfangsbedingungen $x_S(0) = 0$ und $\dot{x}_S(0) = 0$ zu bestimmen:
$A_1 = 0$ und $A_2 = -\frac{\mu Mg}{c} = -\frac{\mu g}{\Omega^2}$

Hieraus folgt:
$x_S(t) = \frac{\mu g}{\Omega^2}(1 - \cos \Omega t)$
$\dot{x}_S(t) = \frac{\mu g}{\Omega} \sin \Omega t$

Integration der Bewegungsdifferentialgleichungen für die Rotation:
$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{2\mu g}{R}$
$\dot{\varphi}(t) = -\frac{2\mu g}{R}t + B_1$

B_1 folgt aus der Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(0) = \omega$:
$B_1 = \omega$

Hieraus folgt:
$\dot{\varphi}(t) = \omega - \frac{2\mu g}{R}t$

d)+e) Es soll Rollen gefordert werden: $\dot{x}_S(t) = R\dot{\varphi}(t)$

$\frac{\mu g}{\Omega}\sin\Omega t = R(\omega - \frac{2\mu g}{R}t)$

$\sin\Omega t = -2\Omega t + \frac{R\Omega}{\mu g}\omega$

Dies ist eine transzendente Gleichung. Graphisch sucht man den Schnittpunkt einer Sinusfunktion mit einer fallenden Geraden. Ist die Steigung der Geraden geringer als die geringste Steigung der Sinusfunktion, so gibt es nur einen Schnittpunkt. Die geringste Steigung der Sinusfunktion liegt im Wendepunkt zum Zeitpunkt $t = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{\Omega}$. Diese ist $m_{\text{sin}} = -\Omega$. Die Steigung der fallenden Geraden ist $m_{\text{Ger}} = -2\Omega$. Diese ist kleiner, also existiert nur ein Schnittpunkt.

Der Zeitpunkt τ für den ersten Umkehrpunkt fordert: $\dot{x}_S(\tau) = 0$

$\frac{\mu g}{\Omega}\sin\Omega\tau = 0 \Rightarrow \tau = \frac{\pi}{\Omega}$

Die Walze befindet sich dann am Ort $x_S(\tau) = \frac{2\mu g}{\Omega^2}$

Das Rollen soll zu diesem Zeitpunkt τ erfolgen, also bei $\dot{x}_S(\tau) = 0$, und dies legt eine obere Grenze für $\hat{\omega}$ fest.

$\dot{x}_S(\tau) = R\dot{\varphi}(\tau)$
$\Rightarrow 0 = R\dot{\varphi}(\tau) \Rightarrow \dot{\varphi}(\tau) = 0$

$0 = R(\hat{\omega} - \frac{2\mu g}{R}\frac{\pi}{\Omega})$

$\Rightarrow \hat{\omega} = \frac{2\pi\mu g}{R\Omega}$

f) Für den Beginn des Vorgangs mit $\hat{\omega}$ und Rollen im ersten Umkehrpunkt:

$\Delta E = E(0) - E(\tau) = \frac{1}{2}J\hat{\omega}^2 - (\frac{1}{2}cx_S(\tau)^2 + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}(\tau)^2)$

mit $J = \frac{1}{2}MR^2$ und $\hat{\omega}^2 = \frac{4\pi^2\mu^2 g^2}{R^2\Omega^2}$ und $x_S(\tau)^2 = \frac{4\mu^2 g^2}{\Omega^4}$ und $\dot{\varphi}(\tau)^2 = 0$ und $\Omega^2 = \frac{c}{M}$

$$f = \frac{\Delta E}{E(0)} = 1 - \frac{E(\tau)}{E(0)} = 1 - \frac{\frac{1}{2}cx_S(\tau)^2}{\frac{1}{2}J\hat{\omega}^2} = \cdots = 1 - \frac{2}{\pi^2} = 0{,}79 = 79\,\%$$

Lösung zu Aufgabe 6:

Der Energieerhaltungssatz liefert:

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \underbrace{\gamma\frac{Mm}{r_\infty^2}}_{=0} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \gamma\frac{Mm}{r_0^2}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = v_\infty^2 + 2\gamma\frac{M}{r_0} \qquad [1]$$

Der Drehimpulssatz liefert:

$$dv_\infty = r_0 v_0 \qquad [2]$$

$$\Rightarrow v_\infty^2 = v_0^2\frac{r_0^2}{d^2} \qquad [2a]$$

Der Zusammenhang zwischen [2] nach r_0 aufgelöst und [1] liefert v_0 ausgedrückt in d und v_∞:

$$v_0^2 = v_\infty^2 + 2\gamma\frac{M}{dv_\infty}v_0 \Rightarrow v_0^2 - 2\gamma\frac{M}{dv_\infty}v_0 - v_\infty^2 = 0$$

$$v_{0_{1,2}} = \frac{\gamma M}{dv_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma M}{dv_\infty}\right)^2 + v_\infty^2} \quad \geq v_\infty$$

Das Minuszeichen lieferte eine negative Geschwindigkeit

$$v_0 = \frac{\gamma M}{dv_\infty} + \sqrt{\left(\frac{\gamma M}{dv_\infty}\right)^2 + v_\infty^2}$$

Somit folgt für r_0:

$$r_0 = \frac{dv_\infty}{v_0} = \frac{d^2v_\infty^2}{\gamma M + \sqrt{(\gamma M)^2 + (dv_\infty^2)^2}}$$

[2a] in [1] liefert v_0 und v_∞ ausgedrückt in r_0 und d:

$$v_0^2 = v_0^2\frac{r_0^2}{d^2} + 2\gamma\frac{M}{r_0}$$

$$v_0^2\left(1 - \frac{r_0^2}{d^2}\right) = 2\gamma\frac{M}{r_0} \Rightarrow v_0^2\left(\frac{d^2 - r_0^2}{d^2}\right) = 2\gamma\frac{M}{r_0}$$

$$\Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2\gamma M d^2}{r_0(d^2 - r_0^2)}}$$

$$\Rightarrow v_\infty = \sqrt{\frac{2\gamma M r_0}{d^2 - r_0^2}}$$

Ist $r_0 > R_E$ dann fliegt der Meteorit vorbei, ist $r_0 < R_E$ dann schlägt der Meteorit ein.

Die kritische Anfluggeschwindigkeit v_∞^{krit} erhält man für $r_0 = R_E$:

$$v_\infty^{\text{krit}} = \sqrt{\frac{2\gamma M R_E}{d^2 - R_E^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 7:

a) Die kinetische Energie der beiden Massenpunkte ist:
$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$

Die potentielle Energie der Feder mit der Ruhelänge l_0 ist:
$U = \frac{1}{2}c(x_2 - x_1 - l_0)^2$

Hieraus folgt für die Lagrange-Funktion:
$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{1}{2}c(x_2 - x_1 - l_0)^2$

Für die Bewegungsgleichungen folgt:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} - \frac{\partial L}{\partial x_j} = 0$

Für x_1 gilt somit:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_1} = c(x_2 - x_1 - l_0)$

$\Rightarrow m\ddot{x}_1 - c(x_2 - x_1 - l_0) = 0$

Für x_2 gilt somit:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m\ddot{x}_2 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -c(x_2 - x_1 - l_0)$

$\Rightarrow m\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1 - l_0) = 0$

Einführung der Relativkoordinaten: $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $a = x_2 - x_1$

Hieraus folgt:
$x_1 = x - \frac{a}{2}$
$x_2 = x + \frac{a}{2}$

Die kinetische Energie der beiden Massenpunkte ist:
$T = \frac{1}{2}m[(\dot{x} - \frac{\dot{a}}{2})^2 + (\dot{x} + \frac{\dot{a}}{2})^2] = \frac{1}{2}m(2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{a}^2)$

Die potentielle Energie der Feder mit der Ruhelänge l_0 ist:
$U = \frac{1}{2}c(a - l_0)^2$

Hieraus folgt für die Lagrange-Funktion:
$L = T - U = \frac{1}{2}m(2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\dot{a}^2) - \frac{1}{2}c(a - l_0)^2$

Für x gilt somit:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 2m\ddot{x} \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = 0$

$\Rightarrow 2m\ddot{x} = 0 \qquad [1]$

Für a gilt somit:
$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{a}} = \frac{1}{2}m\ddot{a} \qquad \frac{\partial L}{\partial a} = -c(a - l_0)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m\ddot{a} + c(a - l_0) = 0 \qquad [2]$

Allgemeine Lösung für x aus [1]:
$2m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \ddot{x} = 0$
$\dot{x}(t) = A_1$
$x(t) = A_1 t + A_2$

Allgemeine Lösung für a aus [2]:
$\frac{1}{2}m\ddot{a} + c(a - l_0) = 0 \Rightarrow \ddot{a} + \frac{2c}{m}a = \frac{2cl_0}{m}$

Inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung mit der Kreisfrequenz $\Omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$

Die homogene Lösung ist:
$a_{\text{hom}}(t) = B_1 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t$

Der Ansatz für die partikuläre Lösung ist: $a_{\text{part}} = B_3$
Eingesetzt in die Differentialgleichung:
$\frac{2c}{m}B_3 = \frac{2cl_0}{m} \Rightarrow B_3 = l_0$
$a_{\text{part}} = l_0$

Die allgemeine Lösung ist:
$a(t) = a_{\text{hom}}(t) + a_{\text{part}}$
$a(t) = B_1 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t + l_0$

Dies übertragen auf:
$x_1(t) = x(t) - \frac{a(t)}{2}$
$x_1(t) = A_1 t + A_2 - \frac{1}{2}(B_1 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t + l_0)$

$x_2(t) = x(t) + \frac{a(t)}{2}$
$x_2(t) = A_1 t + A_2 + \frac{1}{2}(B_1 \sin \Omega t + B_2 \cos \Omega t + l_0)$

b) Die Anfangsbedingungen liefert die Integrationskonstanten:
$x_1(0) = \xi$
$\dot{x}_1(0) = u$
$x_2(0) = \xi + l_0$
$\dot{x}_2(0) = 0$

Hieraus resultieren die Anfangsbedingungen der Relativkoordinaten:
$\Rightarrow x(0) = \xi + \frac{1}{2}l_0$
$\Rightarrow \dot{x}(0) = \frac{1}{2}u$
$\Rightarrow a(0) = l_0$
$\Rightarrow \dot{a}(0) = -u$

Diese Anfangsbedingungen eingesetzt liefert:
$A_1 = \frac{1}{2}u$
$A_2 = \xi + \frac{1}{2}l_0$
$B_1 = -\frac{u}{\Omega}$
$B_2 = 0$

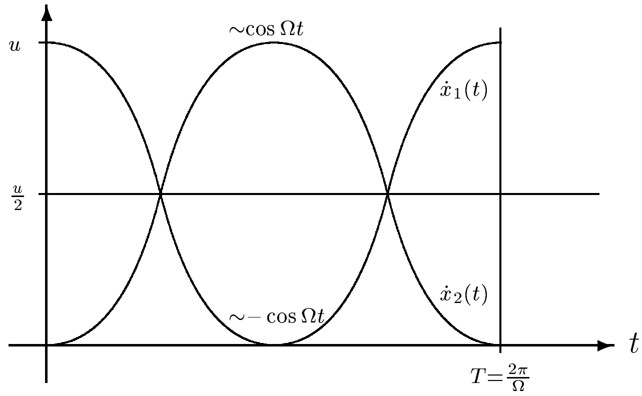
Dies alles eingesetzt liefert die Bewegungsgleichungen:

$x(t) = \frac{u}{2}t + \xi + \frac{l_0}{2}$
$\dot{x}(t) = \frac{u}{2}$

$a(t) = -\frac{u}{\Omega}\sin\Omega t + l_0$
$\dot{a}(t) = -u\cos\Omega t$

$x_1(t) = \frac{u}{2}t + \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega t + \xi$
$\dot{x}_1(t) = \frac{u}{2}(1 + \cos\Omega t)$

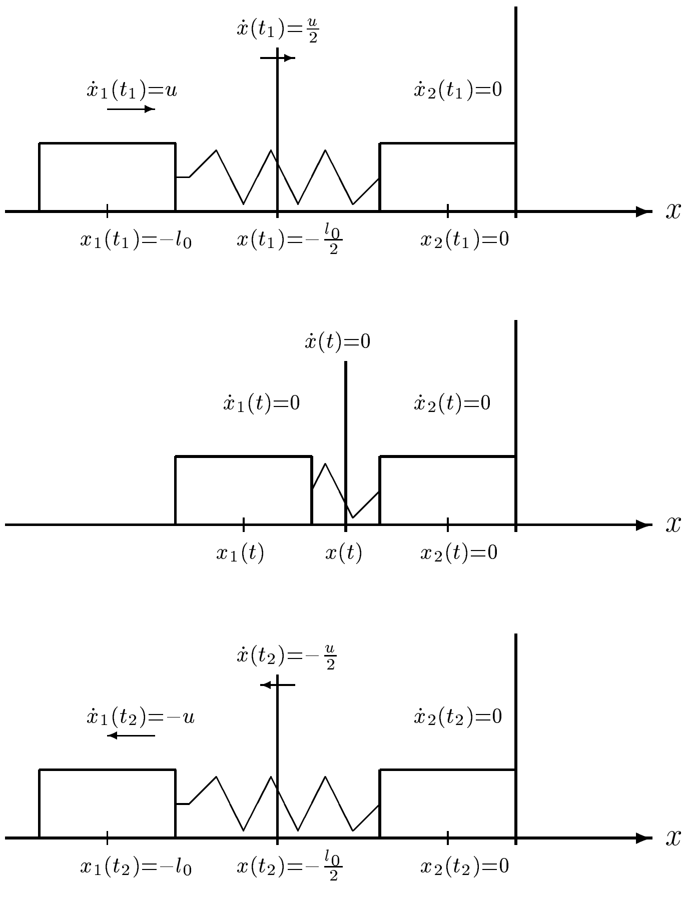
$x_2(t) = \frac{u}{2}t - \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega t + \xi + l_0$
$\dot{x}_2(t) = \frac{u}{2}(1 - \cos\Omega t)$



Die Bedingung, damit die beiden Massen vor dem Stoß nicht zusammenstoßen ist:
$a(t) > 0$
$-\frac{u}{\Omega}\sin\Omega t + l_0 > 0$

$\frac{u}{\Omega}\underbrace{\sin\Omega t}_{\leq 1} < l_0$
$u_{\max} < \Omega l_0$

c) Bedingung dieses Stoßes (I) ist:
$x_2(t) = 0$, $\dot{x}_2(t) = 0$, $\ddot{x}_2(t) = 0$ für $t_1 \leq t \leq t_2$
und $x_1(t_1) = -l_0$, $\dot{x}_1(t_1) = u$

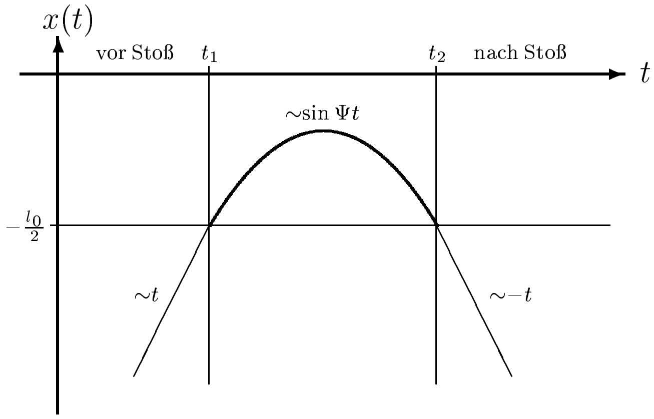


Die Lagrange-Gleichung für diesen Stoßprozeß lautet somit:
$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \underbrace{\dot{x}_2^2}_{=0}) - \frac{1}{2}c(\underbrace{x_2}_{=0} - x_1 - l_0)^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 - \frac{1}{2}c(x_1 + l_0)^2$

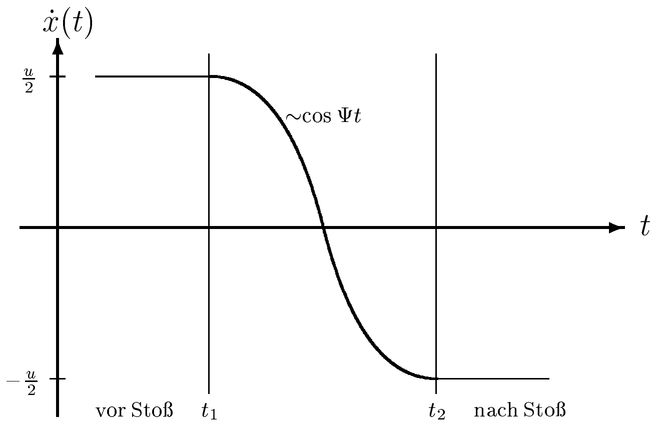
Die Bewegungsgleichung für die linke Masse lautet also:
$m\ddot{x}_1 + c(x_1 + l_0) = 0$
$\ddot{x}_1 + \frac{c}{m}x_1 = -\frac{cl_0}{m}$
Dies ist eine inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung mit Kreisfrequenz $\Psi = \sqrt{\frac{c}{m}}$
Die allgemeine Lösung ist:
$x_1(t) = C_1 \sin\Psi(t - t_1) + C_2 \cos\Psi(t - t_1) - l_0$

Anfangsbedingungen eingesetzt:
$C_1 = \frac{u}{\Psi}$
$C_2 = 0$

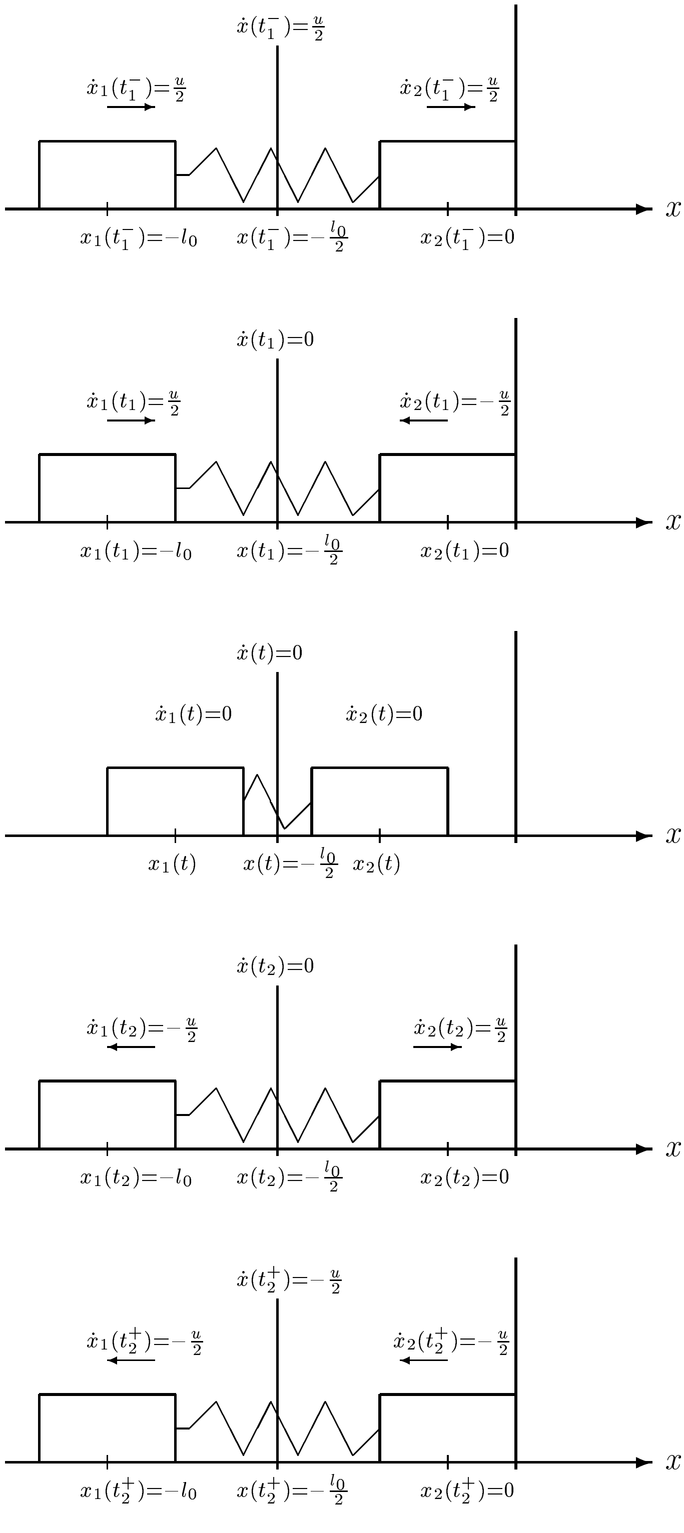
Somit ist die Lösung:
$x_1(t) = \frac{u}{\Psi}\sin\Psi(t - t_1) - l_0$
$\Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(x_1(t) + x_2(t)) = \frac{1}{2}x_1(t)$
$x(t) = -\frac{1}{2}l_0 + \frac{u}{2\Psi}\sin\Psi(t - t_1)$
$\dot{x}(t) = \frac{u}{2}\cos\Psi(t - t_1)$



Die Stoßdauer $T_I = t_2 - t_1$ ist gerade die Zeit für eine halbe Schwingungsperiode der linken Masse:
$T_I = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\Psi} = \frac{\pi}{\Psi}$



d) Bedingung dieses Stoßes (II) ist:
$x(t) = -\frac{l_0}{2}$, $\dot{x}(t) = 0$, $\ddot{x}(t) = 0$ für $t_1 \leq t \leq t_2$
und $x_2(t_1) = 0$, $\dot{x}_2(t_1) = -\frac{u}{2}$



Die Lagrange-Gleichung für diesen Stoßprozeß lautet somit:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(2\underbrace{\dot{x}^2}_{=0} + \frac{1}{2}\dot{a}^2) - \frac{1}{2}c(a-l_0)^2 = \frac{1}{4}m\dot{a}^2 + \frac{1}{2}c(a-l_0)^2$$

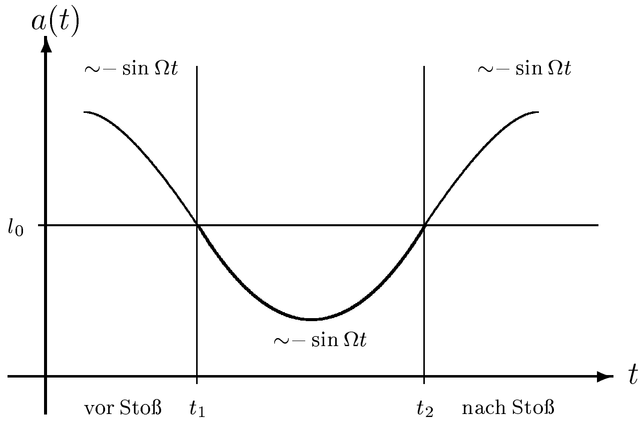
Die Bewegungsgleichung für den Relativabstand a lautet also:
$\frac{1}{4}m\dot{a}^2 + \frac{1}{2}c(a - l_0)^2$
$\ddot{a} + \frac{2c}{m}a = \frac{2cl_0}{m}$
Dies ist eine inhomogene Schwingungsdifferentialgleichung mit Kreisfrequenz $\Omega = \sqrt{\frac{2c}{m}}$
Die allgemeine Lösung ist:
$a(t) = D_1 \sin\Omega(t - t_1) + D_2 \cos\Omega(t - t_1) + l_0$

Zusätzliche Anfangsbedingungen sind mit $a(t) = 2(x_2(t) - x(t))$:
$x_2(t_1) = 0$
$\dot{x}_2(t_1) = -\frac{u}{2}$

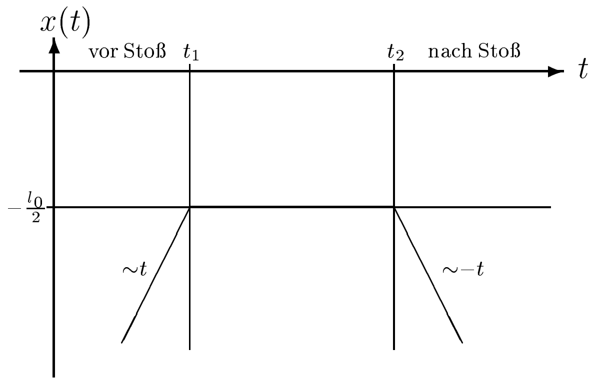
$\Rightarrow a(t_1) = l_0$
$\Rightarrow \dot{a}(t_1) = -u$

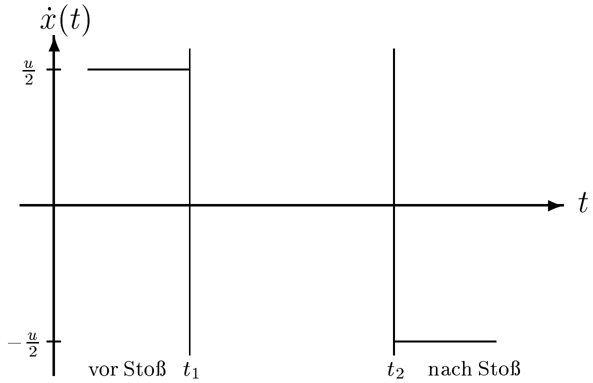
Anfangsbedingungen eingesetzt:
$D_1 = -\frac{u}{\Omega}$
$D_2 = 0$

Somit ist die Lösung:
$a(t) = l_0 - \frac{u}{\Omega}\sin\Omega(t - t_1)$



Die Stoßdauer $T_{II} = t_2 - t_1$ ist gerade die Zeit für eine halbe Schwingungsperiode der beiden Massen:
$T_{II} = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{\Omega} = \frac{\pi}{\Omega}$





e) Damit der Schwerpunkt ideal reflektiert wird, müssen folgende Anfangsbedingungen gelten:

$x_1(t_1^-) = -l_0$
$\dot{x}_1(t_1^-) = 0$
$x_2(t_1^-) = 0$
$\dot{x}_2(t_1^-) = u$

Die Bewegungsgleichungen lauten laut Aufgabenteil b) für $t < t_1^-$:

$x_1(t) = \frac{u}{2}t + \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega t + \xi$
$\dot{x}_1(t) = \frac{u}{2}(1 + \cos\Omega t)$

$x_2(t) = \frac{u}{2}t - \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega t + \xi + l_0$
$\dot{x}_2(t) = \frac{u}{2}(1 - \cos\Omega t)$

Aus $\dot{x}_1(t_1^-) = 0$
$\Rightarrow t_1^- = \frac{\pi}{\Omega}$

Daraus folgt für ξ der Bewegungsgleichungen:
$x_2(t_1^-) = 0$
$x_2(t_1^-) = x_2(\frac{\pi}{\Omega}) = \frac{u}{2}\frac{\pi}{\Omega} - \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega\frac{\pi}{\Omega} + \xi + l_0 = 0$
$\Rightarrow \xi = -l_0 - \frac{\pi u}{2\Omega}$

Alle Anfangsbedingungen sind für dieses $\xi = -l_0 - \frac{\pi u}{2\Omega}$ erfüllt und somit ergeben sich für die Bewegungsgleichungen der beiden Massen:

$x_1(t) = \frac{u}{2}t + \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega t - l_0 - \frac{\pi u}{2\Omega}$ oder anders formuliert

$x_1(t) = \frac{u}{2}(t + \frac{1}{\Omega}\sin\Omega t - \frac{\pi}{\Omega}) - l_0$

$x_2(t) = \frac{u}{2}t - \frac{u}{2\Omega}\sin\Omega t - \frac{\pi u}{2\Omega}$ oder anders formuliert

$x_2(t) = \frac{u}{2}(t - \frac{1}{\Omega}\sin\Omega t - \frac{\pi}{\Omega})$

Lösung zu Aufgabe 8:

a) Es wirken keine äußeren Kräfte und keine äußeren Momente.

b) Impulserhaltungssatz:
(1): $mv = Mv_S + mu \Leftrightarrow (1a): \; m(v-u) = Mv_S$

Drehimpulserhaltungssatz:
(2): $mav = J_S\omega + mau \Leftrightarrow (2a): \; ma(v-u) = J_S\omega$

Energieerhaltungssatz:
(3): $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}J_S\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_S^2 + \frac{1}{2}mu^2 \Leftrightarrow (3a): \; m(v^2-u^2) = J_S\omega^2 + Mv_S^2$

Dies sind drei Gleichungen mit den drei Unbekannten v_S, ω, u.

Die Lösung erhält man nach geschickter Rechnung:
$(1a)\cdot a - (2a) \Rightarrow (4): \; \omega = \frac{Ma}{J_S}v_S$

Dies in (3a) liefert:
(5): $m(v+u)(v-u) = M(1+\frac{Ma^2}{J_S})v_S^2$

(5):(1a) liefert:
$v+u = (1+\frac{Ma^2}{J_S})v_S \Rightarrow (6): \; u = (1+\frac{Ma^2}{J_S})v_S - v$

Dies in (1a) liefert:
$m(2v-(1+\frac{Ma^2}{J_S})v_S) = Mv_S \Rightarrow v_S = 2mJ_Sv\frac{1}{(m+M)J_S+Mma^2}$

Mit $\mu = \frac{M}{m}$ und $J_S = \frac{1}{12}Ml^2$ erhält man:

$v_S(a) = 2mJ_Sv\frac{1}{(m+M)J_S+Mma^2} = \frac{1}{6}v\frac{1}{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1)}$

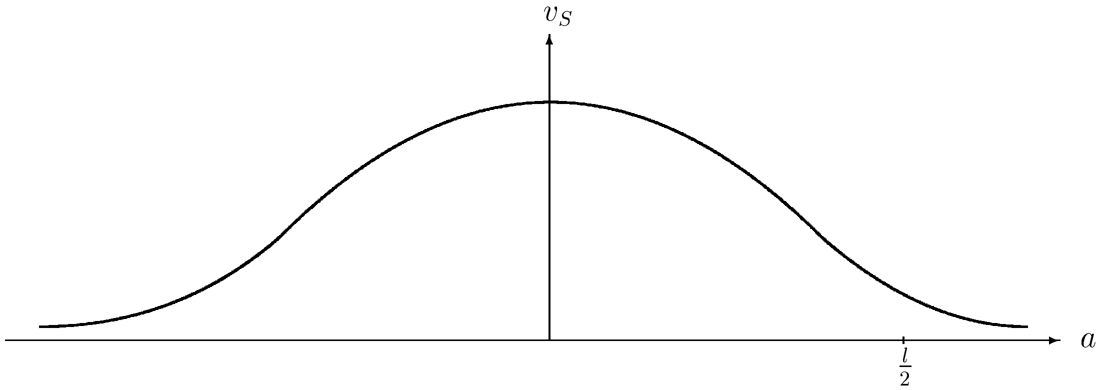
Dies eingesetzt in (4) liefert:
$\omega(a) = 2\frac{v}{l}\frac{(\frac{a}{l})}{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1)}$

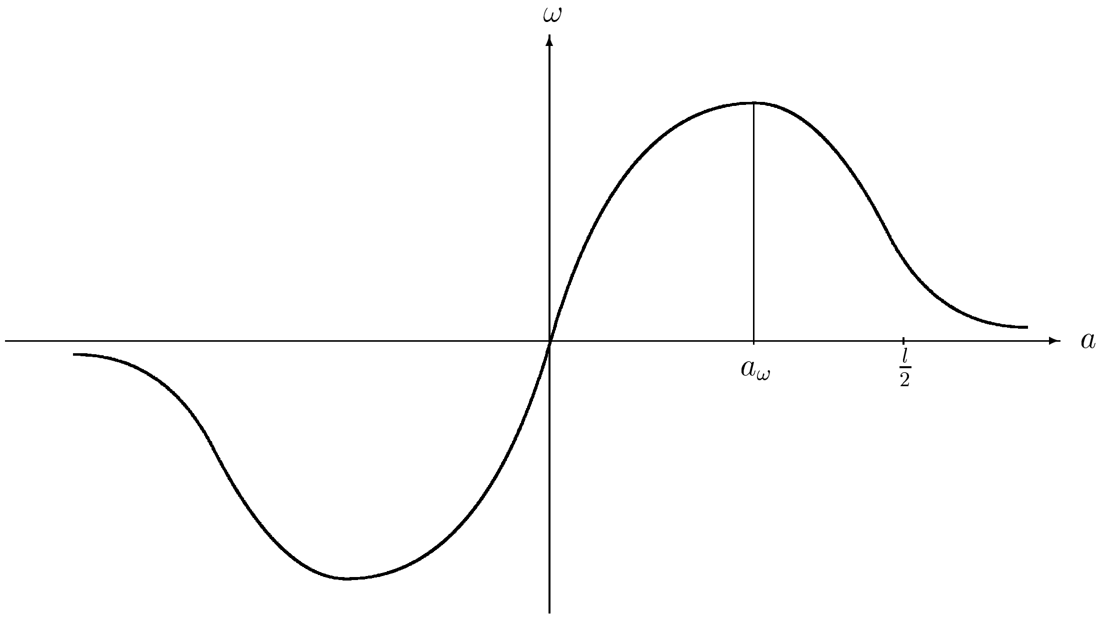
und in (6) eingesetzt liefert:
$u(a) = v\frac{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(1-\mu)}{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1)}$

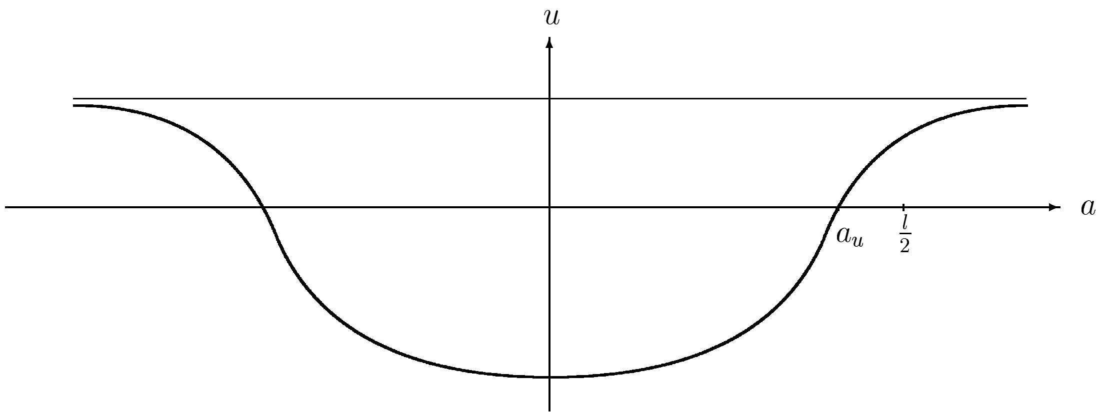
c) $\frac{dv_S}{da} = 0 \Rightarrow \frac{1}{6}v\frac{-2(\frac{a}{l})\frac{1}{l}}{((\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1))^2} = 0 \Rightarrow a_{v_S} = 0$
$\Rightarrow v_{S_{max}} = v_S(0) = 2v\frac{1}{\mu+1}$

$\frac{d\omega}{da} = 0 \Rightarrow 2\frac{v}{l^2}\frac{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1)-2(\frac{a}{l})^2}{((\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1))^2} = 0 \Rightarrow a_\omega = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(\mu+1)}$
$\Rightarrow \omega_{max} = \omega(\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(\mu+1)}) = 6\frac{v}{l}\sqrt{\frac{1}{3(\mu+1)}}$
Für $0 < \mu < 2$ ist $a_\omega < \frac{l}{2}$, für $\mu > 2$ ist $a_\omega > \frac{l}{2}$.
$u(a) = 0 \Rightarrow v\frac{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(1-\mu)}{(\frac{a}{l})^2+\frac{1}{12}(\mu+1)} = 0 \Rightarrow a_u = \frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(\mu-1)}$
Für $0 < \mu < 4$ ist $a_u < \frac{l}{2}$, für $\mu > 4$ ist $a_u > \frac{l}{2}$.

Skizzen:







d) $a_\omega = a_R = \frac{l}{2} \Rightarrow \pm\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(\mu+1)} = \frac{l}{2} \Rightarrow \mu_\omega = 2$

$a_u = a_R = \frac{l}{2} \Rightarrow \pm\frac{l}{2}\sqrt{\frac{1}{3}(\mu-1)} = \frac{l}{2} \Rightarrow \mu_u = 4$

Lösung zu Aufgabe 9:

a) Die Schienen nehmen jeweils 2 Freiheitsgrade auf, so verbleiben insgesamt noch 2 Freiheitsgrade. Die für die Aufgabe benutzten Richtungseinheitsvektoren lauten:

$$\vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_\xi = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die obere Masse m befindet sich an dem Ort $x \cdot \vec{e}_x$,
die untere Masse m befindet sich an dem Ort $\xi \cdot \vec{e}_\xi$,
der Punkt B befindet sich an der Stelle $-a \cdot \vec{e}_x$

Kräftebilanz für die obere Masse m:
Kraft der Feder im Punkt B:
$\vec{F}_1 = c(-a - x)\vec{e}_x = c(-x - a)\vec{e}_x$
Die Projektion der Kopplungskraft mit der unteren Feder auf $\vec{e}_x$:
$\vec{F}_{21} = c[(\xi\vec{e}_\xi - x\vec{e}_x) \cdot \vec{e}_x]\vec{e}_x = c(-x + \frac{\xi}{2})\vec{e}_x$
Die Kraft auf die obere Masse beträgt also:
$\vec{F}_x = F_x\vec{e}_x = \vec{F}_1 + \vec{F}_{21} = c(-2x + \frac{\xi}{\sqrt{2}} - a)\vec{e}_x$
$\Rightarrow F_x = m\ddot{x} = c(-2x + \frac{\xi}{\sqrt{2}} - a)$

Kräftebilanz für die untere Masse m:
Die Projektion der Kopplungskraft mit der unteren Feder auf $\vec{e}_\xi$:
$\vec{F}_{12} = c[(x\vec{e}_x - \xi\vec{e}_\xi) \cdot \vec{e}_\xi]\vec{e}_\xi = c(\frac{x}{\sqrt{2}} - \xi)\vec{e}_\xi$
Die Projektion der Gewichtskraft auf $\vec{e}_\xi$:
$\vec{F}_G = mg[\vec{e}_y \cdot \vec{e}_\xi]\vec{e}_\xi = -\frac{mg}{\sqrt{2}}\vec{e}_\xi$
Die Kraft auf die obere Masse beträgt also:
$\vec{F}_\xi = F_\xi\vec{e}_\xi = \vec{F}_{12} + \vec{F}_G = (c(\frac{x}{\sqrt{2}} - \xi) - \frac{mg}{\sqrt{2}})\vec{e}_\xi$
$\Rightarrow F_\xi = m\ddot{\xi} = c(\frac{x}{\sqrt{2}} - \xi) - \frac{mg}{\sqrt{2}}$

Hieraus folgen die Bewegungsgleichungen:
$\ddot{x} = \frac{c}{m}(-2x + \frac{\xi}{\sqrt{2}} - a)$
$\ddot{\xi} = \frac{c}{m}(\frac{x}{\sqrt{2}} - \xi) - \frac{g}{\sqrt{2}}$

Man definiert den Bewegungsvektor:
$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix}$$

Setzt man die Bewegungsgleichungen nun ein, erhält man eine Matrixform:
$$\ddot{\vec{X}}(t) = \underbrace{-\frac{c}{m}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}}_{\underline{A}} \vec{X}(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{ca}{m} \\ -\frac{g}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}}_{\vec{B}}$$
$$\ddot{\vec{X}}(t) = \underline{A} \cdot \vec{X}(t) + \vec{B}$$

$\underline{A}$ ist eine symmetrische Matrix. Sie kann diagonalisiert werden.

b) Herleitung des Energieerhaltungssatzes:

$$\ddot{\vec{X}}(t) = \underline{A} \cdot \vec{X}(t) + \vec{B} \qquad | \cdot \dot{\vec{X}}(t)$$

$$\ddot{\vec{X}}(t) \cdot \dot{\vec{X}}(t) = [\underline{A} \cdot \vec{X}(t)] \cdot \dot{\vec{X}}(t) + \vec{B} \cdot \dot{\vec{X}}(t) \qquad | \cdot m$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{X}}(t)\right)^2 = m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}[\underline{A} \cdot \vec{X}(t)] \cdot \vec{X}(t)\right) + m\vec{B} \cdot \frac{d}{dt}\vec{X}(t) \qquad | \int$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\vec{X}}(t)\right)^2 = \frac{m}{2}\left([\underline{A} \cdot \vec{X}(t)] \cdot \vec{X}(t)\right) + m\vec{B} \cdot \vec{X}(t) + \text{const.}$$

$$\frac{m}{2}\left(\dot{\vec{X}}(t)\right)^2 \underbrace{-\frac{m}{2}\left([\underline{A} \cdot \vec{X}(t)] \cdot \vec{X}(t)\right) - m\vec{B} \cdot \vec{X}(t)}_{V(x,\xi)} = \text{const.}$$

$$V(x,\,\xi) = -m\left(\left(\frac{1}{2}\underline{A} \cdot \vec{X}(t) + \vec{B}\right) \cdot \vec{X}(t)\right)$$

$$V(x,\,\xi) = cx^2 - \frac{c}{\sqrt{2}}x\xi + \frac{c}{2}\xi^2 + cax + \frac{mg}{\sqrt{2}}\xi$$

c) Bestimmung der statischen (zeitunabhängigen) Ruhelagen $\hat{x}$ und $\hat{\xi}$:

$$\ddot{\vec{X}}(t) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \underline{A} \cdot \hat{\vec{X}} + \vec{B} = \vec{0}$$

$$\hat{\vec{X}} = -\underline{A}^{-1} \cdot \vec{B} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \\ -\frac{mg}{c\sqrt{2}} \end{pmatrix} = -\frac{a}{3}\begin{pmatrix} 2 + \frac{mg}{ac} \\ \sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}mg}{ac} \end{pmatrix}$$

Schwingung um die Ruhelagen:

$$\vec{X}(t) = \hat{\vec{X}} + \tilde{\vec{X}}(t)$$

$$\ddot{\vec{X}}(t) = \ddot{\tilde{\vec{X}}}(t)$$

Eingesetzt in die Matrixbewegungsgleichung mit $\hat{\vec{X}} = -\underline{A}^{-1} \cdot \vec{B}$ liefert:

$$\ddot{\tilde{\vec{X}}}(t) = \underline{A} \cdot \tilde{\vec{X}}(t)$$

d) Bei der Schwingungsgleichung um die Ruhelagen hebt sich notwendigerweise die Inhomogenität $\vec{B}$ weg und man erhält ein homogenes Differentialgleichungssystem.

Eigenwerte und Eigenfrequenzen:

$$\det(\underline{A} - \lambda\underline{E}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - 6\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(3+\sqrt{3}) \Rightarrow \omega_1^2 = \frac{c}{m}\lambda_1 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{c}{2m}(3+\sqrt{3})}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(3-\sqrt{3}) \Rightarrow \omega_2^2 = \frac{c}{m}\lambda_2 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{c}{2m}(3-\sqrt{3})}$$

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren $(\underline{A} - \lambda_i \underline{E}) \cdot \vec{v}_i = \vec{0}$:

Der Eigenvektor zu $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{3})$:

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ - \end{pmatrix} \text{ gegenphasig}$$

Eine Normierung liefert:

$$\Rightarrow \vec{v}_{10} = \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x10} \\ v_{y10} \end{pmatrix}$$

Der Eigenvektor zu $\lambda_2 = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{3})$:

$$\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + \\ + \end{pmatrix} \text{ gleichphasig}$$

Eine Normierung liefert:

$$\Rightarrow \vec{v}_{20} = \sqrt{\frac{2}{3+\sqrt{3}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{x20} \\ v_{y20} \end{pmatrix}$$

Bildet man aus den normierten Eigenvektoren eine Transformationsmatrix $\underline{T}$, die orthogonal ist und die Determinante $\det \underline{T} = +1$ besitzt, so erhält man mit $\tilde{\vec{X}}(t) = \underline{T} \cdot \vec{Z}(t)$ in die Matrixform eingesetzt:

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} v_{x10} & v_{x20} \\ v_{y10} & v_{y20} \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\tilde{\vec{X}}}(t) = \underline{A} \cdot \tilde{\vec{X}}(t)$$

$$\underline{T} \cdot \ddot{\vec{Z}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{T} \cdot \vec{Z}(t) \qquad | \cdot \underline{T}^{-1} \text{ von links}$$

$$\ddot{\vec{Z}}(t) = \underbrace{\underline{T}^{-1} \cdot \underline{A} \cdot \underline{T}}_{\underline{D}} \cdot \vec{Z}(t)$$

$$\ddot{\vec{Z}}(t) = \underline{D} \cdot \vec{Z}(t)$$

$\underline{D}$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten in der Hauptdiagonalen:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \frac{m}{c} \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{pmatrix}$$

Hieraus folgt:

$$\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ c_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet:

$$\tilde{\vec{X}}(t) = \underline{T} \cdot \vec{Z}(t) = \vec{v_{10}} \cdot Z_1(t) + \vec{v_{20}} \cdot Z_2(t) = c_1 \vec{v}_{10} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + c_2 \vec{v}_{20} \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

Die Unbekannten c_1, c_2, φ_1, φ_2 bestimmen sich durch die Anfangsbedingungen der beiden Massen.